Matematiska Bevis

- Ett historiskt, matematiskt och didaktiskt perspektiv

Markus Davidsson &
Sofia Magnusson

Ämneslärarprogrammet med
inriktning mot gymnasieskolan

Uppsats/Examensarbete: 15 hp
Kurs: LGMA1G
Nivå: Grundnivå
Termin/år: HT 2016
Handledare: Johanna Pejlare
Examinator: Laura Fainsilber
Kod: HT16-3001-005-LGMA1G

Nyckelord: Bevis. Matematikhistoria. Undervisning. Matematikdidaktik. Bevismetoder. Formella bevis. Informella bevis.

Abstract

This paper examines mathematical proof from a historical, mathematical and educational perspective. The aim is to investigate what role mathematical proofs play in mathematics and education today as well as give an historical background to the development of mathematical proof. The historical overview provides an insight to the significance of proof throughout the history of mathematics. Mathematical proof has always been a vital part of the foundations of mathematics and continue to be so today. Although, the definition of mathematical proof have become a much debated topic, especially in the educational research. Researchers feel that the traditional depiction of mathematical proof does not comply with how they are used and what form they have. There is an urge for a definition that include the social process of validating a proof. However, educational research suggest that the benefits of mathematical proof is applicable also to mathematics education. Educational researchers have found that proofs hold educational functions and examines if and how these can contribute to education. A philosophical approach to the function of mathematical proof suggest that proof are the bearers of all mathematical knowledge making proofs essential to education. On the contrary, education of proof at upper secondary school in Sweden is not a central part of the curriculum. The curriculum for mathematics barely contains the word proof at all and the core contests for numerous courses does not include mathematical proof. Educational research show that when it comes to education of proof there are several aspects to take into consideration. Aspects that affect both the education in itself and how students will understand mathematical proofs. In conclusion, educational research suggest that mathematical proof could have the same significance in education as it does in mathematics. However, the research show that the implement of proof in education is not as simple as it might seem and that there are many aspects to consider.

Förord

Vi vill inleda med att tacka vår handledare Johanna Pejlare som under långa handledarsamtal gett ovärderlig vägledning och vid ett flertal tillfällen skingrat dimman som vi omgivits av. Framförallt vill vi tacka henne för att hon inledningsvis konkretiserade våra lösa idéer vilket gav oss ett ämne vi båda uppskattat att arbeta med. Vi vill även uttrycka vår tacksamhet till vår examinator Laura Fainsilber som med nya ögon hjälpte oss slutföra arbetet.

Markus & Sofia
Den 31 oktober 2016

Innehållsförteckning

1 Introduktion

Tidigare i år beslutade regeringen om utökad undervisningstid i matematik för grundskolan vilket därmed totalt ger 1125 timmar matematikundervisning till de svenska grundskoleeleverna (Skolverket, 2016). Det är den andra utökningen som har gjorts på kort tid då regeringen gjorde den tidigare utökningen så sent som hösten 2013 (Skolverket, 2016). Matematiken är alltså ett skolämne som prioriteras inom skolväsendet och ämnet debatteras även hett i samhället.

Vår erfarenhet av matematikundervisningen är att det är en stor skillnad mellan å ena sidan grundskolan och gymnasiet och å andra sidan undervisningen på universitet. Det är inte bara en skillnad i kunskapsnivå och arbetssätt utan vad vi vill poängtera är en skillnad i hur matematikämnet behandlas. Vi ser att undervisningen på universitetet ger en annan bild av vad matematematik är. När vi började studera matematik på universitetet märkte vi ett tydligt fokus på bevis, där det matematiska innehållet vi behandlade ständigt introducerades av bevis. Detta ger en bild av de matematiska bevisen vi inte känner igen från vår tidigare skolgång där bevis saknade denna centrala funktion. Denna bild har även bekräftats under våra VFU-perioder. En överblick av ämnesplanen för matematik i gymnasieskolan styrker vår bild då begreppen bevis och bevisföring saknar en framträdande roll. Skillnaden i undervisning har väckt vårt intresse för vilken roll matematiska bevis bör ha i skolan. Vi ställer oss frågande till varför den omfattande matematiska undervisningen i grundskola och gymnasiet misslyckas med att spegla matematiken som vetenskap. Bör inte eleverna efter avslutad grundskoleutbildning fått en rättvis bild av matematiken?

För att närma sig dessa frågor behöver vi dock först bilda oss en förståelse för bevis och dess roll i matematiken vilket leder oss till följande syfte.

1.1 Syfte

Syftet med den här uppsatsen är att undersöka vilken roll bevis har i matematiken och matematikdidaktiken. Frågeställningarna nedan förväntar vi oss vara behjälpliga i denna undersökning.

- *Vad är bevis?*
- *Vilken roll har bevis i matematiken?*
- *Vilken roll har bevis haft i matematikens historia?*
- *Vilka aspekter om bevis behandlas i matematikdidaktiken?*

1.2 Material och metod

Vår uppsats är en litteraturstudie av bevisens roll i matematiken och undervisningen. Uppsatsen innehåller en historisk tillbakablick som i hög grad vilar på Klines (1972) *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times* vilken klassas som ett standardverk över matematikhistorien. För vidare litteratur har framförallt databasen Scopus används men även Google-scholar, GUNDA och CHANS**.** Huvudsakliga sökord vi använt oss av är *proof,* *proving, education* och *mathematical/mathematics.* I dessa sökningar har vi, utöver att sålla bort för oss ointressanta artiklar, utgått från de artiklar som refererats till mest. En stor del av litteraturen har även växt fram genom att se vilka texter forskare återkommer till för att på så sätt beröra den mest tongivande litteraturen.

2 Matematiken och bevisens utveckling

I följande kapitel kommer vi ta ett antal historiska nedslag som vi anser varit av vikt dels i utvecklingen av matematiken i stort, dels i utvecklingen av matematiska bevis som vi kommer se ofta går hand i hand. Inledningsvis kommer vi se hur matematiken, som vi känner den idag, tog form. Därefter en kort beskrivning av symbolspråkets utveckling samt hur matematiker länge förlitade sig på intuition. Vi kommer även att se närmare på bevisförsöken av parallellaxiomet och vilka följder de fick. Slutligen kommer vi diskutera ett antal matematikfilosofiska riktningar och deras syn på bevis. Under denna tillbakablick kommer vi även lyfta fram ett fåtal historiska bevis, som synliggör de historiska skeendena. Dessa kommer bygga på samma argumentation som deras upphovsmän använde sig av men utnyttja den moderna notation vi är bekanta med.

2.1 Antikens Grekland och Euklides Elementa

Den västerländska matematiken och därmed matematisk bevisföring som vi känner den idag uppstod, som så många andra vetenskaper, i det antika Grekland med start i den klassiska eran (ca 500–300 f.Kr.). Det var här som en logisk struktur tog form där matematiken vilade på strikt bevisföring. Även om babylonierna och egyptierna under lång tid utvecklat matematiken och därmed influerat grekerna hade de inte skapat en vetenskap. De hade inte någon utvecklad form av matematisk metod och saknade till stora delar bevis (Kline, 1972, s. 22f). Under denna tid existerade det dock andra stora kulturer som också de hade en rik matematik men även en utförlig bevisföring. Siu (1993) lyfter fram Kina som ett exempel på detta och pekar på att det i den kinesiska matematiken fanns ett överflöd av bevis som verifierade och förklarade de matematiska resultaten. Bevisen följde dock inte den deduktiva slutledningen präglar matematiken än i våra dagar och som vi kommer se utvecklades i Grekland. Av denna anledning följer vi bevisens utveckling från det antika Greklands perspektiv.

Grabiner (2012, s. 149ff) frågar sig varför denna logiska struktur tog sin form just i Grekland och framför ett antal förklaringar. Hon inleder med att lyfta babylonierna och egyptiernas framsteg inom matematiken, men poängterar att deras matematik skiljde sig åt på ett flertal punkter vilket kan ha synliggjort behovet av en starkare bevisföring för grekerna. Samtidigt menar hon att det grekiska samhället, med bland annat födelsen av demokrati, uppmuntrade argumentation och övertygelseförmåga vilket kan ha influerat matematiker. Grabiner lyfter framförallt inflytandet från de grekiska filosoferna, där bland annat Aristoteles ofta lyfts fram som logikens fader, och menar att deras form av resonemang även påverkade hur matematisk bevisföring utvecklades.

Under den klassiska eran var det många filosofiska skolor som utvecklade matematiken, där Kline (1972) lyfter ett antal, däribland Platons och Aristoteles. Vi skall dock inte fördjupa oss i dessa men titta närmare på ett bevis vilket utvecklades av Pythagoréerna, en grupp ledd av Pythagoras (ca 570–470 f.Kr.), som exemplifierar vilka möjligheter som skapades i och med den logiska struktur som växte fram. Beviset är ett motsägelsebevis och visar att $\sqrt{2}$ är ett irrationellt tal.

Bevis av att $\sqrt{2}$ *är irrationellt:*

Antag att $\sqrt{2}$ *är rationellt, då måste* $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$*, där a och b saknar gemensamma faktorer.*

Genom att kvadrera likheten får vi $2b^2 = a^2$*, detta säger oss att a är ett jämt tal, så det går att skriva som* $a = 2c$.

Alltså kan vi skriva $2b^2 = 4c^2$*, som vi förkortar till* $b^2 = 2c^2$.

Men då detta ger oss $b = 2d$ *får vi en motsägelse eftersom a och b inte har några gemensamma faktorer.*

Alltså måste $\sqrt{2}$ *vara irrationellt.*

Utvecklingen av matematiken i Grekland skulle nå sin kulmen i och med Euklides (ca 325–265 f.Kr.) då han sammanställde stora delar av den grekiska kunskapen om matematik och skapade, i *Elementa*, ett verk som skulle komma att sätta standard för matematisk argumentation och uppbyggnad.

Euklides *Elementa* består av 13 böcker som är uppbyggda av definitioner, axiom, satser samt bevis av dessa satser. Även om *Elementa* främst kopplas till geometri så berör den även stora delar aritmetik. De fyra första böckerna behandlar egenskaperna hos rätlinjiga och cirkelformade figurer, däribland Pythagoras sats och vinkelsumman i en triangel. Vidare framförs egenskaper hos förhållandet mellan storlekar, likformiga figurer, tal samt tredimensionella figurer. (Kline, 1972, s. 60ff)

Euklides inleder sin första bok med att lista 23 definitioner, som beskriver de begrepp som förekommer i de första böckerna. Nedan följer ett urval av dessa.

> (1) En punkt är det som saknar delar.
> (2) En linje är en sträcka utan bredd.
> (3) Ändarna av en linje är punkter.
> (15) En cirkel är en plan figur bestående av en linje sådan att alla räta linjer som faller på den från en punkt inom figuren är lika varandra.
> (23) Parallella raka linjer är raka linjer som, om de befinner sig i samma plan och dras ut oändligt i båda riktningarna, inte möter varandra i någon av riktningarna.
>
> [Vår översättning][1] (Joyce, 1998)

Av dessa definitioner är det ett flertal som logiskt sett är problematiska. Ser vi exempelvis på definition 2 inser vi att begreppet bredd saknar definition. Därav blir det svårt att förstå vilken funktion påståendet fyller. Vissa menar att Euklides var medveten om detta och att deras syfte var att skapa en intuitiv förståelse genom att representera begreppen med fysiska ting. (Kline, 1972, s. 58f)

[1] (1) A *point* is that which has no part. (2) A *line* is breadthless length. (3) The ends of a line are points. (15) A *circle* is a plane figure contained by one line such that all the straight lines falling upon it from one point among those lying within the figure equal one another. (23) *Parallel* straight lines are straight lines which, being in the same plane and being produced indefinitely in both directions, do not meet one another in either direction.

Vidare introducerar Euklides tio axiom, som ansågs intuitivt sanna, med vilka han utvecklar matematiken. Målet med dessa axiom är att kunna deduktivt härleda satserna från dessa grundpelare. Detta skulle tillåta en vetenskap som är bortom ifrågasättande så länge som axiomen anses tillförlitliga. Fem av axiomen betecknar Euklides som postulat som är specifika för geometrin som matematisk gren medan de andra fem betecknas som allmänna grundsatser som, enligt Euklides, gäller för alla vetenskaper. (Kline, 1972, s. 57ff & 86ff)

Postulaten

1. Man kan dra en (unik) sträcka mellan varje par av punkter
2. Varje sträcka kan (på ett unikt sätt) förlängas till en linje
3. Man kan beskriva en cirkel med godtycklig medelpunkt och godtycklig radie
4. Alla räta vinklar är lika
5. Om en linje skär två linjer så att summan av två inre vinklar på samma sida om den skärande linjen är mindre än två räta vinklar, så skär de två linjerna varandra på den sida där de båda vinklarna ligger

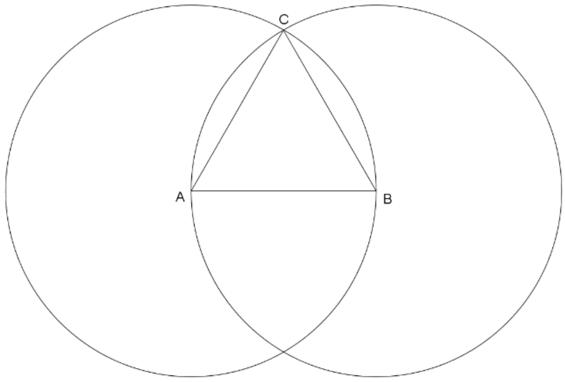
Allmänna grundsatser

1. Storheter som är lika med en och samma storhet är också inbördes lika
2. Om lika storheter adderas till lika storheter så är summorna lika
3. Om lika storheter subtraheras från lika storheter så är skillnaderna lika
4. Storheter som sammanfaller med varandra är lika
5. Det hela är större än sina delar

(Lindahl, 2004, s. 8)

De tre inledande postulaten tillåter konstruktionen av geometriska figurer vilket möjliggör existensen av de definitioner Euklides listade i början av bok I. Vad som också tar sin form i och med dessa axiom är introduktionen av konstruktiva bevis. De skapas i *Elementa* med hjälp av passare och linjal och lutar på de tre första postulaten. Detta utnyttjar Euklides i sin första sats som bevisar att givet en sträcka AB existerar det liksidiga trianglar med sidor av längd AB. (Kline, 1972, s. 60f)

Bevis av att liksidiga trianglar existerar, Bok I, Prop. 1:



Figur 1: Konstruktion av liksidiga trianglar

Utgå från den givna sträckan AB, och rita två cirklar, den första med medelpunkt A, den andra med medelpunkt B, båda med radie AB (Postulat 3).

Cirklarnas skärningspunkt ger oss C.

Dra därefter linjerna AC och BC (Postulat 1).

Eftersom C och B ligger på cirkeln med medelpunkt A, så är AC=AB enligt cirkelns definition.

På samma sätt är BC=AB, då A och C ligger på cirkeln med medelpunkt B.

Detta ger oss den liksidiga triangeln ABC, där AB=AC=BC.

Euklides system exemplifieras tydligt i detta hans första sats där varje steg kopplas till ett axiom. På samma sätt fortsätter utvecklingen av Euklides matematik med ständiga kopplingar till axiomen eller tidigare bevisade satser, som i sin tur bevisats med hjälp av axiomen. Detta kom att bli sinnebilden för hur matematiska bevis skall vara uppbyggda**.** Vi lyfter här ytterligare ett exempel på bevis Euklides utförde då han bevisade att det existerar ett oändligt antal primtal.

Bevis av att det existerar ett oändligt antal primtal, Bok IX, Prop. 20:

Antag att det finns en ändlig lista med primtal $p_1, p_2, \ldots p_n$.

Vi kommer visa att det går att skapa ytterligare ett primtal som inte existerar i listan.

Låt, $N = p_1 p_2 \ldots p_n + 1$.

Om, N är ett primtal själv så existerar det alltså ett primtal som ej var med i den ursprungliga listan och vi är klara.

Om, N ej är ett primtal innebär det att N är ett sammansatt tal, och alla sammansatta tal innehåller ett primtal enligt Bok VII, Prop. 31.

Därmed finns det ett primtal q som delar N, där detta q ej kan varit med den i ursprungliga listan då det skulle lämnat rest 1, och alltså är q ett nytt primtal.

I och med Euklides *Elementa* var en standard satt gällande matematisk bevisföring som skulle komma att gälla i över 2000 år.

2.2 Symbolspråk

Under 1500-talet utvecklades symbolspråket och gav upphov till ny potential inom matematiken. Vad gäller bevisen så kom de nya insikterna att påbörja ett paradigmskifte, från ett geometriskt paradigm till ett algebraiskt paradigm (Grabiner, 2012, s. 155). Bevisen inom matematiken hade fram till 1500-talet bestått av generella exempel eller så grundades de i geometrin (Kline, 1972, s. 261ff). Utvecklingen inom symbolspråket gav upphov till algebra vilken möjliggjorde många framsteg inom matematiken.

Francois Viète (1540–1603) var först med att använda bokstäver som symboler på ett systematiskt och meningsfullt sätt (Kline, 1972, s. 261f). Trots att delar av Viètes symbolspråk accepterades och användes omgående så tog det många år innan hela omfånget av utvecklingen undersöktes och tillämpades. Viètes utveckling av symbolspråket var betydande då den påbörjade övergången av algebran från att kunna lösa enskilda problem till att studera generella matematiska samband. Symbolspråket var revolutionerande eftersom matematiker sedan antikens Grekland använt en retorisk matematik där allt beskrivs med hjälp av ord och följde språkets grammatik. Följaktligen skrevs en vanlig ekvation i form av en lång och besvärlig mening. Viète använde ändå ord till en viss del, exempelvis för att skriva ett tal i kvadrat och lika med, men hans symbolspråk skilde sig avsevärt från tidigare matematiker. Nedan finns ett exempel på hur Viète använde sig av bokstäver, följt av en omskrivning av samma uttryck med vår tids symbolspråk:

$$a\ cubus + b\ in\ a\ quadr.3 + a\ in\ b\ quad.3 + b\ cubo\ aequalia\ \overline{a+b}\ cubo.$$
$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a+b)^3$$

(Kline, 1972, s. 262)

Det dröjde ända fram till 1800-talet innan matematiker kom att utforska och upptäcka symbolspråket och algebrans fulla potential. Det var först då som man började särskilja algebran från geometrin (Kline, 1972, s. 282). Innan dess ansågs algebran vara en förlängning av geometrin snarare än ett eget område inom matematiken. Det förändrade synsättet på algebran resulterade i att istället för att låta geometrin begränsa utvecklingen av algebran så kom algebran att berika, inte minst geometrin men också, matematiken i stort.

2.3 Matematik och naturvetenskap

Under 1600-talet kom matematiken att tillämpas i utvecklingen av andra vetenskaper (Kline, 1972, s.394f). Det var framförallt stora naturvetenskapliga framsteg som initierade en förändring där matematiken kom att användas inom många olika områden. Även matematiken som en vetenskap gjorde stora framsteg men det fanns inget behov av att definiera matematiken och därigenom kom matematikens grunder i skymundan. Först på 1800-talet återgick fokus till matematiken som eget område igen och då påbörjades den största utvecklingen av matematiken sedan antikens Grekland.

I takt med att det gjordes stora framsteg inom framförallt fysiken utvecklades matematiken som ett verktyg för att främja utvecklingen av fysiken. Behovet av att beskriva naturvetenskapliga fenomen var så stort och betydande att matematikens utveckling kom att bero på andra vetenskaper. Det påverkade matematikens riktning med den följden att strävan efter en deduktiv härledning från matematiska axiom förbisågs. Effekten blev att mycket av den matematik som utvecklades saknade definitioner och satser och det i sin tur resulterade i avsaknad av förståelse för begrepp inom analysen. (Kline 1972, s. 617ff)

För att illustrera hur vetenskaperna påverkade varandra kan vi titta närmare på utvecklingen av funktionsbegreppet. Utvecklingen startade då det fanns ett behov av att hitta hastighet, acceleration, tangenten, minimum, maximum och längden av en kurva menar Kline (1972, s. 342ff). Under 1600- och 1700-talet var den matematiska analysen fortfarande starkt influerad av, och ansågs vara beroende av, geometrin. De upptäckter som gjordes var bundna till visualiseringar och intuitiv förståelse av funktioner. Det gjorde att förståelsen för funktionsbegreppet i sig utvecklades sakta. Det var inte för än på 1800-talet som den intuitiva förståelsen av funktionsbegreppet började förändras, då matematiker kom att ifrågasätta om en visualisering av funktion var en korrekt framställning av en funktion.

Karl Weierstrass (1815–1897) var en av de matematiker som motsatte sig tron på intuitionen och ville att matematiken skulle bygga på en stabil grund (Bråting & Pejlare, 2006, s. 346ff). Han motbevisade dåtidens uppfattning att varje kontinuerlig funktion är differentierbar, i någon punkt. Weierstrass konstruerade en funktion som är kontinuerlig men inte differentierbar i någon punkt som visas nedan:

$$f(x) = \sum b^n\, cos(a^n x)\, \pi,$$
$$där \in \mathbb{R}, a\ är\ udda,\ 0 < b < 1\ och\ ab > 1 + \frac{3\pi}{2}.$$

(Bråting & Pejlare, 2006, s. 347)

Weierstrass funktion, som bevisade att kontinuitet inte implicerar differentierbarhet, gav upphov till kreationen av många andra funktioner som visar detsamma. Det var ett viktigt framsteg för förståelsen av funktionsbegreppet men också för matematiska bevis. Weierstass exempel visar hur intuitionen kan vara vilseledande vilket gör stringenta bevis nödvändiga.

Weierstrass upptäckt gjorde att matematiker började ifrågasätta hur man tidigare förlitat sig på intuitionen och geometriskt tänkande (Kline, 1972, s. 965). Utvecklingen av analysen bidrog till, tillsammans med andra nyheter, att det geometriska paradigm som dominerat matematiken kom att omvärderas och matematiken stod inför en stor förändring.

2.4 Parallellaxiomet

I början av 1800-talet stod fortfarande den Euklidiska geometrin stark och många såg den som den mest stabila av alla matematiska grenar. Försök hade gjorts att härleda andra grenar som aritmetiken och analysen från geometrin för att säkerställa deras sanningshalt. De flesta matematiker var även övertygade om att Euklidisk geometri var det rätta, och enda, sättet att beskriva den fysiska världen och universum på. En av de största anledningar till denna säkerhet var de tio axiom som Euklides verk vilade på, som säkerställde att alla slutsatser var sanna så länge som bevisföringen kunde härledas från dem. (Kline, 1972, s. 861f)

Ända sedan Euklides dagar har det dock funnits frågetecken kring axiomen och främst har det femte postulatet, det så kallade parallellaxiomet som vi ser nedan, diskuterats.

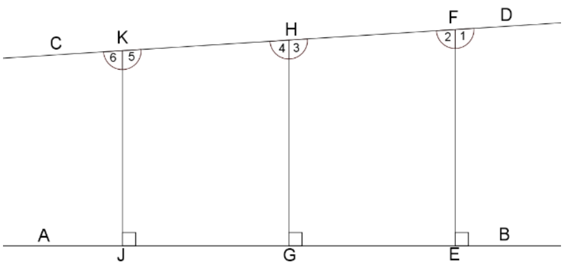
> Om en linje skär två linjer så att summan av två inre vinklar på samma sida om den skärande linjen är mindre än två räta vinklar, så skär de två linjerna varandra på den sida där de båda vinklarna ligger.
>
> (Lindahl, 2004, s. 8)

Till sin form skiljer det sig avsevärt från de andra axiomen, som är korta och koncisa och framförallt uppenbara på ett sätt som det femte postulatet inte är. Mycket talar även för att Euklides själv inte var helt tillfreds med det, då han i *Elementa* undvek att använda det om inte absolut nödvändigt. Den grekiska matematikern Proklos (411–485) frågade sig om inte linjerna kan vara asymptotiska givet att vinkeln med vilken linjerna närmar sig varandra är tillräckligt liten. Detta sammanfattar i mångt och mycket de problem som matematiker såg i det femte postulatet. Axiomen var menade att vara intuitivt sanna men parallellaxiomet krävde att linjerna kunde förlängas mot oändligheten, även om Euklides ansträngde sig för att undvika den formuleringen, vilket går emot vad intuitionen kan föreställa sig. (Kline, 1972, s. 863f)

Behovet av att stärka det femte postulatet ledde till två angreppsmetoder. Å ena sidan har matematiker sökt ersätta postulatet med ett nytt, mer uppenbart sant postulat, å andra sidan har försök gjorts att härleda postulatet från de nio övriga axiomen samt de satser som inte bygger på parallellaxiomet. Det sistnämnda skulle frånta parallellaxiomet sin rang som ett postulat och istället behandla det som en sats (Kline, 1972, s. 863). Vi skall gå igenom ett fåtal av de bevisförsök som gjorts, inte i detalj då det skulle uppta allt för mycket utrymme, men tillräckligt för att ge en bild utav vilka vägar matematiker gått.

Proklos, som vi tidigare nämnt, var en av de som sökte bevisa postulatet. Han ersatte parallellaxiomet med ett axiom Aristoteles utformat och lyckades därmed bevisa det femte postulatet i form av en sats. Aristoteles axiom brottades dock med sin egen trovärdighet vilket innebar att inte mycket var vunnet. (Kline, 1972)

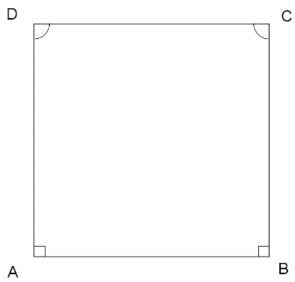
Den arabiske matematikern Nasir al-Din al-Tusi (1201–1274) utförde även han ett bevisförsök av parallellaxiomet. Vi skall endast ge en övergripande sammanfattning av argumentationen som inte ersätter parallellaxiomet utan går istället till dess försvar genom att visa på dess uppenbara sanning. Argumentationen går att exemplifiera genom *fig. 2* där två räta linjer, AB och CD skärs av sträckor EF, GH, JK, … och där dessa sträckor är vinkelräta mot AB, samtidigt som vinklarna 1, 3 ,5, … är trubbiga och vinklarna 2, 4, 6, … är spetsiga. Från detta följer att EF > GH > JK … och då dessa går mot noll måste linjerna skära varandra. Nasir al-Din al-Tusi ansåg sig ha bevisat postulatet men hade under bevisets gång endast behandlat antagandet att en triangels vinkelsumma är 180° vilket vi ska se inte är enda möjligheten. (Kline, 1972, s. 864 & Bonola, 1955)



Figur 2: Representation av Nasir al-Din al-Tusis bevisförsök av Parallellaxiomet

Girolamo Saccheri (1667–1733) är ytterligare en av de många matematiker som arbetat med att bevisa parallellaxiomet och hans bidrag anses som ett av de främsta. Vi skall följa hans argumentation med relativt stor noggrannhet samt gå igenom ett stycke av beviset i detalj.

Saccheri frågar sig om det från de nio kvarvarande axiomen samt de satserna som inte krävde det femte postulatet går att härleda parallellaxiomet. Han inleder med att konstruera en fyrhörning ABCD (*fig. 3)* där vinklarna A och B är vinkelräta samt att sträckorna AD och BC är lika stora. Givet parallellaxiomet skulle vinklarna C och D också de vara vinkelräta men då detta inte står till buds, givet att det är vad som försöks bevisa, går denna slutsats ej att dra. Saccheri bevisar dock att $\measuredangle C = \measuredangle D$ och ser därmed tre möjligheter. (Bonola, 1955)



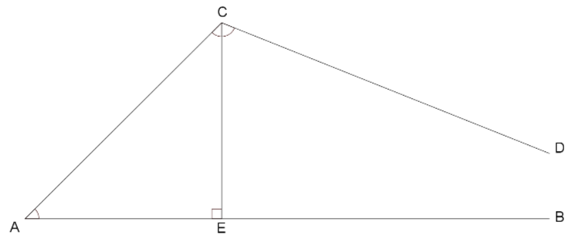
Figur 3: Saccheris fyrhörning

(1) Hypotesen att vinklarna C och D är rätvinkliga.
(2) Hypotesen att vinklarna C och D är trubbiga.
(3) Hypotesen att vinklarna C och D är spetsiga.

Hypotes (1) vore ekvivalent med parallellaxiomet vilket innebär att Saccheri söker finna motsägelser i *Hypotes (2)* och *(3).* Detta skulle innebära att *Hypotes (1)* är den enda möjliga och därmed bevisa parallellaxiomet genom ett fallbevis. Saccheri delar upp sitt bevis i ett antal propositioner vilka vi skall presentera ett fåtal av samt bevisa en av dem. Han visar att om hypoteserna gäller i ett fall gäller de även i alla andra fall (Prop. V, VI och VII). Han härleder att givet *Hypotes (1), (2) och (3)* är triangelns vinkelsumma lika med 180, större än 180 respektive mindre än 180 (Prop. IX). I Prop. XI och XII behandlar han endast *Hypotes (1)* respektive *(2).* Dessa säger att om en given sträcka (a) skärs av två linjer, där den ena är rätvinklig mot sträcka (a) och den andra skär sträcka (a) med en spetsig vinkel kommer dessa linjer att mötas. Detta bevis har stora likheter med Nasir al-Din al-Tusis som vi berörde ovan. (Bonola, 1955)

Låt oss nu se på beviset av Prop. XIII i detalj vilket säger att parallellaxiomet är sant givet *Hypotes (1)* eller *(2).* I beviset kommer det alltså antas att antingen *Hypotes (1)* eller *(2)* gäller och beviset uttalar sig därmed inte om *Hypotes (3).* Vi kommer även utnyttja Prop. IX, XI och XII, **som vi precis presenterat**, i beviset.

Bevis av Saccheris Prop. XIII:



Figur 4: Representation av Saccheris bevis av Prop. XIII

AB och CD är två räta linjer som skärs av linjen AC. (fig. 4)

Anta att $\measuredangle BAC + \measuredangle ACD < 180°$*.*

Dra en sträcka från C som möter linjen AB vinkelrätt.

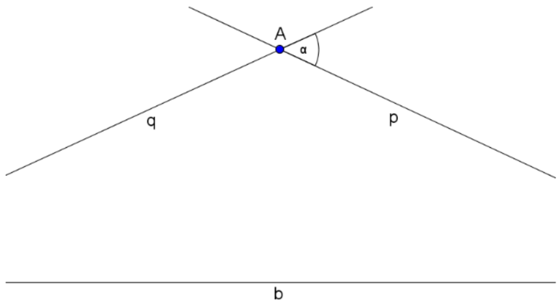
Vi har nu triangeln ACE där $\measuredangle A + \measuredangle C + \measuredangle E \geq 180°$ *givet Prop. IX.*

Detta låter oss skriva olikheten $\measuredangle BAC + \measuredangle ACD < \measuredangle BAC + \measuredangle ACE + \measuredangle AEC$*, som vi kan förkorta till* $\measuredangle DCE < \measuredangle AEC$*.*

Därmed är $\measuredangle DCE$ *spetsig då* $\measuredangle AEC$ *är rätvinklig och enligt Prop. XI och XII kommer linjen CD att skära AB vilket också är vad parallellaxiomet säger.*

Givet att Prop. XIII är bevisat kunde Saccheri visa att *Hypotes (2)* är falskt då parallellaxiomet och de satser som följer av det försäkrar att endast *Hypotes (1)* är sann.

Kvar finns dock *Hypotes (3)* vilket Saccheri också måste motbevisa innan det femte postulatet är säkrat. Vi kommer inte gå igenom hans arbete med detta utan går direkt till hans slutsats som gäller för *Hypotes (3)*. Givet linjen b (*fig. 5*) och punkten A finns det två linjer p och q som går genom punkten A och närmar sig linjen b utan att någonsin skära den, vi ser härmed att Proklos farhågor kring asymptotiska linjer visades stämma**.** Övriga linjer som går genom punkten A, och inte sammanfaller med varken p eller q, går att dela in i två grupper. Den ena kommer att skära linje B medan den andra kommer vara parallell med linje B, då de går genom vinkeln α. (Bonola, 1955)



Figur 5: Representation av Saccheris slutsatser rörande *Hypotes (3)*

Denna slutsats innebär att parallellaxiomet kan vara ersättningsbart. Saccheri var dock inte beredd att acceptera detta då han menade att det gick emot naturen hos räta linjer och förkastade därmed *Hypotes (3)* grundat på intuitionen att parallellaxiomet var det enda rätta. Vi kan här uppmärksamma att Saccheri levde innan bland annat Weierstrass och kanske hade han dragit andra slutsatser om han levt hundra år senare. Nu skulle det dock dröja ytterligare år innan den fulla insikten av dessa resultat upptäcktes av matematiker men Saccheris försök att bevisa det femte postulatet går fortfarande till historien som ett av de främsta samtidigt som dess slutsatser rörande *Hypotes (3)* kan ses som inledningen till parallellaxiomets fall. (Bonola, 1955)

Efter Saccheri fortsatte bevisförsöken men ett flertal matematiker insåg nu att parallellaxiomet inte gick att bevisa och att det var friställt från de nio andra axiomen. En av de som följde i Saccheris spår var Lambert (1728–1777) men han drog andra slutsatser. Lambert insåg att ett annat geometriskt system var logiskt möjligt givet att parallellaxiomet ersattes, men han trodde inte att detta system kunde ersätta Euklides i att beskriva den fysiska världen. Den insikten gjorde dock Gauss (1777–1855), Lobatchevsky (1792–1856) och Bolyai (1802–1860). De två sistnämnda formulerade och systematiserade den gren inom geometrin som idag går under namnet icke-euklidisk geometri som ersätter parallellaxiomet med ett nytt axiom. Den icke-euklidiska geometrin tillåter alla tre hypoteser Saccheri behandlade vilket bland annat innebär att en triangels vinkelsumma inte alltid är 180°. Mer än så ska vi inte beskriva den icke-euklidiska geometrin men vi kommer se att den fick långtgående konsekvenser för synen på matematik. (Kline, 1972, s. 869ff)

2.5 Huvudriktningar inom matematikfilosofin

Den stora matematiska utveckling som skett under 1800-talet skakade om matematikens grundvalar och det uppstod ett behov av att hitta en stabil grund för matematiken. En bidragande faktor var den icke-euklidiska geometrin som visade på bristerna i axiomatiseringen av Euklidisk geometri. Strävan efter en stabil grund gav kring sekelskiftet upphov till olika strömningar inom matematikfilosofin som närmade sig problemet på olika sätt. Vi kommer nu att presentera de tre filosofiska skolor som räknas som huvudriktningar inom matematikfilosofin, nämligen: logicismen, intuitionismen och formalismen.

Under slutet av 1800-talet kom forskning som antydde att matematiken möjligen skulle uppkommit ur logiken och det gav upphov till den logistiska skolan (Kline, 1972, s. 1192ff). Logicismen grundades av Russell och Whitehead som utvecklade sina idéer och tankar i *Principia Mathematica* (1910–1913). Enligt logicismen är matematiken en gren inom logiken då Russell och Whitehead menade att logiken är uppbyggd av axiom ur vilka matematiken följer. Matematiken följer således ur logikens innehåll och matematiska axiom behövs inte. Med det sagt så blir matematiken i sig innehållslös och godtycklig menar Kline (1972).

Det logistiska synsättet fick ta emot mycket kritik, dels eftersom Russell och Whiteheads system var och förblir inkomplett trots försök att förenkla och klargöra det (Kline, 2008, s. 1196f). Dessutom motsatte sig många tanken att lagar om tänkande kan beskriva och förklara naturliga fenomen såsom akustik, elektromagnetism och mekanism. Trots kritiken är logicismen en strömning inom matematiken som påverkar utvecklingen och förståelse för vetenskapen.

Intuitionismen är en huvudriktning inom matematikfilosofin som framhäver intuitionens roll inom matematiken (Kline, 1972, s. 1197ff). Grundaren till denna inriktning brukar ses som Brouwer (1881–1966), då han var den som undersökte och utvecklade dess innehåll. Instuitionismen menar att matematiken består av mentala konstruktioner med ett intuitivt innehåll och att det inte kan reduceras till en gren inom logiken. Brouwer menade att matematiskt tänkande tillåter oss att skapa vårt eget universum som är oberoende av den verklighet som finns och endast begränsad av den matematiska intuitionen. Det är intuitionen som således bestämmer giltigheten och huruvida nya idéer ska accepteras.

Vad gäller bevis har intuitionismen en radikal syn på utformningen och innehållet av bevis (Kline, 1092, s.1197ff). Brouwer menade att matematik inte var bunden till någon form av logik eller logiska regler och därför behövs inte heller axiom i sin bevisföring. Intutionisterna menar också att även om paradoxer existerar inom den accepterade matematiken så är dessa oväsentliga och oviktiga för matematiken. Kravet på konstruktivism leder till uteslutande av koncept som till exempel bygger på indirekta resonemang, exempelvis motsägelsebevis. Dessutom måste konstruktiva definitioner fastställas inom ett ändligt antal steg och det gör att definitioner som behandlar en oändlig mängd inte är tillåtna, så som Euklides definition av oändligt många primtal. Intuitionismen var från sin uppkomst en radikal filosofisk inriktning och förblir så än idag. Den har fått utstå mycket kritik och har i många anseenden blivit förbisedd och ignorerad.

Formalisterna med Hilbert i spetsen driver en tes om att man bör förstå matematiken endast som ett formellt system med ett symbolspråk (Kline, 1972, s. 1203ff). Den formalistiska inriktningen menar att logiken uppkommit ur matematiken och tillsammans utgör de grunden för det formella systemet. Det formella systemet var formalisternas utgångspunkt och med det menar de ett axiomatiserat system ur vilket matematiken kan växa fram genom deduktion, i likhet med hur Euklides konstruerade Elementa. Det viktiga med det formella systemet var för formalisterna att det skulle vara konsekvent och inte innehålla några motsägelser.

Ursprungligen ansåg formalisterna att varje gren inom matematiken skulle bygga på sitt eget formella system men Hilbert utmanade denna tanke och ville att enbart ett formellt system skulle vara grunden till all matematik (Kline, 1972, s. 1203ff). Hilbert och hans medhjälpare lyckades härleda geometrin från aritmetiken vilket gjorde att Hilbert kom att sträva efter att härleda all matematik från aritmetiken. Hilberts optimism bottnade i att han ville axiomatisera hela matematiken och skapa en stabil grund men redan under han livstid kom indikationer på att det inte är möjligt.

Sökandet efter ett fullständigt formellt matematiskt system, som pågått under större delen av 1800-talet, nådde under 1910-talet sin kulmen i logicismen och formalismen (Kline, 1972, s. 1206ff). Russell och Whitehead arbete med *Principia Mathematica* och Hilberts försök att axiomatisera matematiken var de mest ambitiösa och omfattande formella systemen i matematikens historia. Matematikern Kurt Gödel presenterade 1931 sin ofullständighetssats som kom att kullkasta uppfattningen om ett formellt system inom matematiken.

Gödels resultat var revolutionerande och räknas som en av de mest betydande matematiska nyskapelser under 1900-talet (Kline, 1972, s. 1206ff). Gödels ofullständighetssats visade att i ett axiomatiserat matematiskt system så finns det propositioner som varken kan bevisas eller motbevisas med systemets axiom. Det implicerar att varje formellt system är ofullständigt i den bemärkelsen att det är möjligt att formulera prepositioner som överensstämmer med systemets premisser men inte kan bevisas inom systemets ram. Gödels ofullständighetssats fick stort genomslag inom matematiken men även om den utesluter det formella system som Hilbert eftersträvade så slutade Hilbert och formalisterna inte att tro att ett sådant system är möjligt utan menar att en sådan matematik som tillåter systemet ännu inte är utvecklad.

Även då ingen av de filosofiska skolorna har gett matematiken en stabil grund så har de försett oss med olika förhållningssätt till matematiken och dess grundvalar. De filosofiska riktningarna har olika syn på matematiken och matematiska bevis som har influerat nutidens diskussioner kring bevis som vi kommer undersöker närmare i de nästkommande två kapitlen.

3 Olika typer av bevis

I det här kapitlet vill vi beskriva olika sorters matematiska bevis som används inom matematiken. De bevis vi behandlar är de exempel på typer av bevis som är vanligt förekommande i gymnasieskolan och på en grundnivå på universitet. De typer av bevis som redan har exemplifierats i det matematikhistoriska kapitlet redovisas kort och de andra exemplifieras. De olika typerna av matematiska bevis motsvarar vanliga bevismetoder inom matematiken. Kunskap om olika bevismetoder ger en förståelse för strukturen av bevis och kan vara ett verktyg i matematiken. Vi kommer att redogöra for strukturen av följande sorters bevis:

- Direkt bevis
- Motsägelsebevis
- Matematisk induktion
- Konstruktivt bevis
- Fallbevis

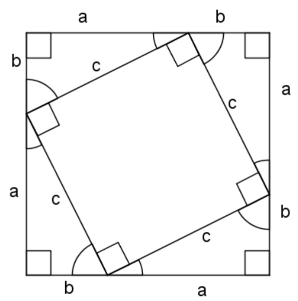
En generell definition för ett bevis är att det är en ”övertygande argumentation för att ett matematiskt resultat skall accepteras” (Kiselman & Mouwitz, 2008, s. 129). Ett matematiskt bevis härleder en sats enligt logikens regler från teorins axiom och satsens antagande till satsens slutsats. Kiselman och Mouwitz (2008) poängterar att formen för matematiska bevis har varierat under historiens lopp.

3.1 Direkt bevis

Ett direkt bevis är den enklaste formen av bevis där satsen innehåller nog med information för att kunna konstruera steg på ett logiskt sätt som leder till en slutsats (Cupillari, 2013, s. 7ff). Direkta bevis utgår från det vi vet eller det som antas i satsen och bevisar att det leder till slutsatsen. Det kan innehålla teorins axiom, teorier och lemman men innehåller inte några nya antaganden. Direkta bevis används ofta när satsen följer formen: om A, så B och slutledningen följer formen: A, alltså B. Nedan är ett exempel på ett direkt bevis som bevisar Pythagoras sats: i varje rätvinklig triangel råder sambandet $a^2+b^2=c^2$, där a och b är längderna på kateterna och c är längden på hypotenusan

Bevis av Pythagoras sats:

Betrakta följande figur.



Figur 6: Illustration av Pythagoras sats.

Arean för den stora kvadraten är $A=(a+b)(a+b)$.

Arean av en av trianglarna är $\frac{1}{2}ab$.

Arean för den stora kvadraten A kan vi också uttrycka

$$A = 4 * \frac{1}{2}ab + c^2 = 2ab + c^2.$$

De båda uttrycken för arean av den stora kvadraten kan då skrivas

$$(a+b)^2 = 2ab + c^2.$$

Avslutningsvis kan vi skriva om uttrycket på följande sätt:

$$a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = c^2.$$

Vi har således kommit fram till sambandet som Pythagoras sats beskriver.

3.2 Motsägelsebevis

Ett motsägelsebevis är ett exempel på ett indirekt bevis. I ett motsägelsebevis åskådliggörs en motsägelse i argumentationen vilket bevisar satsen (Cupillari, 2013, s. 25ff). Det följer ett mönster där man börjar med att anta motsatsen till den sats som sak bevisas, sedan visar man att antagandet leder till en motsägelse, alltså måste satsen stämma. Vi har tidigare exemplifierat ett motsägelsebevis i avsnitt 2.1. Beviset för att $\sqrt{2}$ är irrationellt följer det vanligt förekommande mönstret och det går också att beskriva med hjälp av enkel logik: Satsen S: $\sqrt{2}$ är ett irrationellt tal, då antar man negationen av S (¬S), men antagandet ¬S leder till en motsägelse och alltså stämmer S.

3.3 Matematisk induktion

Matematisk induktion eller induktionsbevis är ett bevis som använder sig av en induktiv bevismetod (Cupillari, 2013, 342ff). Det används ofta för att bevisa att ett antagande är sant för alla de naturliga talen, men kan också användas för andra ordnade matematiska uppsättningar. Induktiva bevis delas in i olika steg, oftast två eller tre beroende hur man ser på stegen. Här kommer vi nu förklara en modell som använder tre steg för att sedan exemplifiera dessa steg med ett bevis. Det första steget visar hur antagandet stämmer för det minsta talet i uppsättningen, när det är de naturliga talen som är uppsättningen så visar man att det stämmer för talet 1. Steg två är det induktiva hypotesen då vi antar att antagandet gäller för något tal n i uppsättningen av tal. Det tredje steget är den deduktiva härledningen där man visar att antagandet gäller för n+1, nästkommande tal i uppsättningen. Det tredje steget implicerar att antagandet stämmer för alla tal i uppsättningen.

Vi kommer nu visa ett induktionsbevis som bevisar att för varje positivt heltal gäller likheten

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Bevis av likheten $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, *där n är ett positivt heltal:*

Steg 1: Satsen gäller för $k = 1$, *då* $VL = 1$ *och* $HL = \frac{1(1+1)}{2} = 1$ *och* $VL = HL$.

Steg 2: Vi antar nu att satsen gäller för något tal k=n, följaktligen är

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Steg 3: Vi ska nu visa att det också gäller för k=n+1, dvs. att

$$(1 + 2 + \cdots + n) + (n+1) = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$$

Enligt antagandet i steg 2 kan vi skriva om vänsterledet till

$$\frac{n(n+1)}{2} + (n+1).$$

Det uttrycket kan vi sedan utveckla för att bevisa att antagandet gäller för n+1 på följande vis:

$$\frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$
$$= \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2} = HL.$$

Eftersom antagandet gäller för k=1, k=n och k=n+1 så gäller det enligt principen för matematisk induktion för alla positiva heltal.

3.4 Konstruktivt bevis

Ett konstruktivt bevis är ett bevis som konstruerar ett efterfrågat objekt (Kiselman & Mouwitz, 2008, s. 131). Men det är inte själva konstruktionen som räknas som ett bevis utan beviset består av att visa att det faktiskt är det efterfrågade objektet som har konstruerats (Solow, 2005, s. 37). Den informella benämningen konstruktionsbevis är en typ av konstruktivt bevis. I konstruktionsbevis används ofta passare och linjal för att konstruera det efterfrågade objektet men i ett konstruktivt bevis kan objektet också exempelvis konstrueras algebraiskt. Ett konstruktivt bevis följer ofta en existenssats som påstår existensen av ett matematiskt objekt. Euklides första bevis där han bevisar existensen av liksidiga trianglar, avsnitt 2.1, är ett exempel på ett konstruktivt bevis av en existenssats. Beviset innehåller en konstruktion av en liksidig triangel som följs av en motivering av att triangeln har den efterfrågade egenskapen liksidighet.

3.5 Fallbevis

Ett fallbevis används när man ska bevisa en sats som innehåller två eller flera fall, dock ett begränsat antal (Solow, 2005, s. 123f). Satsen innehåller ofta nyckelorden ”antingen/eller” och kan exemplifieras som ”B eller C implicerar A”. I beviset gäller det att undersöka för vilket av fallen som påståendet stämmer genom att undersöka varje fall, eller via uteslutningsmetoden. Saccheris bevisförsök av parallellaxiomet, avsnitt 2.4, är ett fallbevis eftersom det avser att utesluta alla hypoteser utom en. Bevisförsöket innehåller tre hypoteser, eller fall, men Saccheri lyckas bara utesluta hypotes två, som säger att vinkelsumman i en triangel är större än 180°.

De olika typerna av bevis som vi redogjort för motsvarar olika bevismetoder. I de allra flesta fall är det svårt att klassa ett bevis som en typ då bevis i regel använder sig av fler än en bevismetod. Så är fallet med Saccheris bevisförsök av parallellaxiomet, avsnitt 2.4**,** där beviset kan beskrivas som ett fallbevis men för att motbevisa hypotes två så används en indirekt bevismetod. För att kunna behärska bevisföring är det viktigt att ha en förståelse för de olika bevismetoderna, speciellt om de kombineras, eftersom det kan leda till ett komplext logiskt resonemang.

4 Bevis i ett matematiskt och didaktiskt sammanhang

I följande kapitel vill vi skapa en förståelse för vilken plats bevis har i ett matematiskt och didaktiskt sammanhang. Rav (1999) kommer argumentera för att bevis är det som utvecklar matematiken och att bevis i mångt och mycket bygger upp hela matematiken. Denna teori har fått stort inflytande på det didaktiska fältet rörande bevis, vilket vi bland annat ser i avsnittet som följer efter Rav då Hanna & Barbeau (2008) undersöker vilka didaktiska konsekvenser Ravs teorier har på skolan. Därefter undersöker de Villiers (1990), Hanna (2000) och Hemmi (2006) vilka specifika funktioner bevis uppfyller i matematiken. Vi inleder kapitlet med att se på alternativa beskrivningar av bevis som skiljer sig från den något traditionella tolkningen och söker beskriva bevis så som de används i matematikers praktik.

4.1 Alternativ till den traditionella beskrivningen av bevis

Utbildningen av nya matematiker förmedlar en mycket precis idé om vad bevis är men trots det finns det ingen generell definition som delas av hela det matematiska samfundet (Cabassut et al., 2012 s. 169f). Den generella uppfattningen är ändå att bevis är en kombination av axiomatiserade satser och formalism skriver Cabassut et al. Många av diskussionerna kring vad bevis är har kommit att handla om begreppen formellt och informella bevis men också den sociala processen som validering av bevis innefattar. I det här kapitlet kommer vi att beskriva begreppen formella och informella bevis och den sociala processen vid validering av bevis. Informella bevis har olika benämningar och definitioner men har gemensamt att begreppen gör anspråk på att beskriva hur matematiska bevis är utformade i praktiken. Det är viktigt att ha en förståelse för diskussionerna kring informella bevis när vi går vidare och tittar på forskning om bevis inom utbildning.

4.1.1 Formellt bevis

Formella bevis förmedlar en traditionell syn på vad matematiska bevis är (Weber, 2008, s. 433). Det formella bevisets struktur är en deduktiv härledning som börjar med ett axiom och följs av antingen axiom eller logiska steg vartefter det resulterar i en slutsats (Hanna, 1990 s. 6). Denna uppfattning menar att det finns ett exakt antal steg för att nå slutsatsen i varje bevis, det går varken att avlägsna något steg eller tillföra något för att förbättra beviset. Det förutsätter ett formellt system som gör det möjligt att utföra slutledningen på ett mekaniskt vis (Hanna, 1990 & Rav, 1999). Följaktligen elimineras de psykologiska aspekter och mänskliga omdömen av bevisföring (Hanna, 1990) vilket är en önskvärd effekt.

Det formella systemet och det formella beviset har som vi sett varit aktuellt och omdiskuterat under stora delar av matematikens historia. Något sådant system har inte gått att uppnå och enligt Gödels ofullständighetssats är det heller inte möjligt att producera formella bevis till alla satser. Men än idag bygger det formella beviset på grunderna av det ofullständiga formella systemet. Under de senaste decennierna har begreppet kommit att bli omdiskuterat då forskning inom olika vetenskaper har ifrågasatt dess innebörd. Weber (2008, s. 434) och Hanna (1990, s. 7f) skriver att under de senaste årtiondena har både matematikdidaktiker och filosofer såväl som matematiker utmanat den formalistiska uppfattningen av bevis och till stor del anser de att den inte är förenlig med matematikers praktiska tillämpning.

4.1.2 Informella bevis och den sociala processen

Dawson (2006, s. 270) menar att om man begränsar sig till att prata om formella bevis så måste man utesluta de flesta bevis som finns eftersom få av dem är formellt axiomatiserade. Många forskare inom speciellt matematikdidaktik har därför formulerat alternativ till det formella beviset. De begreppen beskrivs ofta som informella bevis och vi kommer nu att presentera tre sådana exempel: Ravs konceptuella bevis, Dawsons informella bevis och Hannas acceptabla bevis. Det leder oss också in på den sociala processen som är involverad i bedömning av bevis där vi avslutningsvis presenterar Webers tre perspektiv för bedömning av bevis.

Matematikern Yehuda Rav (1999, s. 11ff) särskiljer formella bevis från konceptuella bevis. Han menar att de konceptuella bevisen är skrivna på en informell matematisk diskurs och inte kan reduceras utan att förlora sin semantiska mening. Det konceptuella beviset består också delvis av formella argumentationer som är acceptabla för matematiker samtidigt som det försöker ge mening åt innehållet. Rav påtalar att fastän konceptuella bevis inte är något uttalat begrepp så kan matematiker känna igen den övergripande strukturen och bedöma om varje steg är korrekt eller inte. Rav anser att när det kommer till matematiska bevis så är det mer givande att diskutera konceptuella bevis än formella bevis då de flesta bevis är av denna sort.

Matematikern John Dawson (2006, s. 270ff) skiljer på formella och informella bevis. Han menar att informella bevis är argument var syfte är att övertyga läsaren att ett matematiskt påstående är sant. Informella bevis kan innehålla lemma som gör bevisen mer hanterbara genom att bryta upp långa formella slutledningar. Där informella bevis också erbjuder en aspekt som förklarar varför läsaren ska acceptera beviset. Dawson konstaterar också att beskriva bevis som ”övertygande argument” kan vara vagt och att bevis givetvis är beroende av den sociala processen av att bedöma argumentet. Han argumenterar för att den sociala processen alltid har och kommer vara närvarande därför är det passande att definiera informella bevis som övertygande argument som är just ett övertygande argument ”av konsensus inom det matematiska samfundet vid en viss tidpunkt [vår översättning][2]” (Dawson, 2006, s. 272). Den definitionen beskriver också tidsaspekten som blir viktig i den sociala processen då kriterierna för ett bevis är beroende av den kontext de verkar inom.

Gila Hanna (1990, s. 6ff), professor i matematikdidaktik, särskiljer formella bevis från acceptabla bevis. Med acceptabla bevis menar hon de bevis som blir erkända inom det matematiska samfundet. Hanna betonar den sociala process som är involverad när det kommer till erkännandet av ett bevis. Hon understryker att innebörden och den upplysande funktionen av bevis väger tyngre än formaliteten av beviset. Under de två senaste decennierna har praktiserande matematiker varit överens om att bevis har olika grad av formalitet men att de fortfarande accepteras. Matematiker använder sig av olika kriterier för att bedöma bevis, medvetet eller omedvetet. De kriterierna är att bevis ”måste utgå från specifika och accepterade premisser, presentera en korrekt argumentation och leda till ett resultat som under resonemang låter rimligt i dess matematiska kontext [vår översättning]” (Hanna, 1990, s. 8). Hanna menar att formellt utfört bevis väger inte lika tungt som ett bevis som återspeglar grundläggande matematiska relationer då det i den matematiska världen, som i resten av världen, är så att nya upptäckter värderas efter deras värde för vetenskapen.

[2] ”by consensus of the mathematical community at any given time”

Keith Weber, forskare i matematikdidaktik, har undersökt den matematiska processen att bedöma bevis, alltså avgöra om ett argument är ett giltigt bevis. Hans resultat visar att sociala processer påverkar bedömningen i stor utsträckning och han beskriver också hur bedömarens individuella epistemologiska uppfattning av bevis är avgörande vid bedömning (Weber, 2008, s. 433). Weber redogör för tre perspektiv på bevis som är kritiska vid bedömning: det första är den traditionella formalistiska, det andra är att bevis är ett övertygande argument och det tredje är bevis som en social process som innefattar förhandling och överenskommelse. Han understryker att de tre perspektiven varken är oberoende av eller motsätter varandra utan att de kompletterar varandra.

Webers tre perspektiv återspeglas i Ravs, Dawsons och Hannas beskrivningar av informella bevis. Perspektiven representerar också hur forskningen inom matematikdidaktik tenderar att beskriva bevis. Det är därför givande att ha en förståelse för hur matematiker och didaktiker beskriver bevis i resterande delar av vår uppsats eftersom vi fortsättningsvis huvudsakligen kommer redogöra för matematikdidaktisk forskning.

4.2 Bevis som bärare av matematisk kunskap

Ravs (1999) artikel *Why Do We Prove Theorems?* Har fått stort genomslag inom matematikdidaktiken och vi kommer i det här kapitlet att redogöra för de övergripande idéerna i artikeln. Vi inleder med att ge en beskrivning av Ravs (1999) tankar och argumentation för att sedan presentera Hanna och Barbeaus arbete med att undersöka om Ravs idéer kan tillämpas i undervisning.

4.2.1 Matematiskt perspektiv

Rav (1999) ställer sig frågan varför matematiker bevisar satser och presenterar argument mot synen att huvudanledningen vore att avgöra satsernas sanningshalt. Tidigt i sin artikel presenterar Rav sin tes att matematiken i grunden är sökandet efter metoder, verktyg och strategier som skall svara mot de problem som är på agendan i samtidens matematik. Detta sökande menar han är helt och hållet sammankopplat till bevis vilket sätter bevisen och inte satserna i huvudrollen av matematikens utveckling. Bevisen är det som driver matematiken framåt, de leder till nya upptäckter och nya frågor.

För att försvara denna tes presenterar Rav (1999) tankeexperimentet PYTHIAGORA vilket är en tilltänkt maskin som kan avgöra sanningshalten av alla matematiska satser. Matematiker kan mata in sin hypotes och PYTHIAGORA avgör om det är sant eller falskt, inget mer, och därefter är hypotesen förvandlad till en sats eller förkastad. Denna maskin skulle enligt författaren ta död på matematiken som vetenskap, eftersom matematiker skulle sluta ha idéer och bilda nya hypoteser som driver utvecklingen framåt.

För att visa på bevisens utvecklande funktion lyfter Rav (1999) fram två teorier, Goldbachs förmodan och Kontinuumhypotesen, som aldrig slutgiltigt bevisats, vilket borde ses som ett misslyckande givet att matematiker endast söker sanningshalten. Han poängterar dock att de bevisförsök som gjorts lett fram till en mängd nya metoder och resultat. För Goldbachs förmodan framhåller Rav framförallt *Brun sieve metoden* som givit upphov till följande resultat och utvecklats till ett eget fält inom matematiken.

(a) Det existerar oändligt många heltal n sådana att både n och n + 2 har som mest nio primtalsfaktorer.
(b) Alla tillräckligt stora jämna heltal kan skrivas som summan av två tal, där båda två har som mest nio primtalsfaktorer.

[Vår översättning][3] (Rav, 1999, s. 7f)

Arbetet med Kontinuumhypotesen förde också med sig nya insikter och hjälpte bland annat Gödel när han utvecklade sin ofullständighetssats som vi tidigare diskuterat. Vad Rav (1999) söker poängtera är att oavsett om dessa hypoteser någon dag blir bevisade eller motbevisade så kommer de framsteg och upptäckter som gjorts leva vidare och producera nya svar och nya frågeställningar.

För att tydliggöra hur Ravs ståndpunkt skiljer sig från andra matematikers kan vi lyfta Klines (1980) argumentation kring Fermats sista sats som säger att för inget heltal n större än 2 finns icke triviala heltalslösningar till ekvationen $x^n + y^n = z^n$. Denna sats bevisades för övrigt år 1995 då Andrew Wiles (1953-) la den sista pusselbiten av beviset, men då Kline uttalade sig var detta ännu inte gjort. Kline påpekar att hundratals djupa arbeten, som behandlar Fermats sista sats, har producerats men frågar sig om dessa inte varit förgäves då satsen mycket väl kan vara olösbar. Att förstå det som att Kline förnekar att arbetet med satsen genererat stora matematiskt framsteg är möjligtvis att göra honom orätt, men det blir ändock tydligt att han värdesätter det slutgiltiga resultatet långt högre än arbetet bakom det. Därav ser vi hur Kline framhåller satsernas roll som fokus för den matematiska kunskapen och bevisen blott blir ett verktyg för att säkerställa deras sanning. Denna uppfattning, som i sin vanligaste form även framhåller att satserna härleds från axiom, kallar Rav (1999) för standardsynen på matematik vilken tjänar väl för att bygga en tillfredställande matematisk filosofi men, poängterar Rav, misslyckas med att beskriva den matematiska praktiken.

Med ett antal exempel visar Rav att axiomatiserade system hör till ovanligheten och att många av de axiom som existerar saknar funktionen som fundament vilket Euklides sökte i sina axiom, istället hjälper de snarare till att definiera objekt och metoder. Geometrin blir enligt Rav en raritet med sitt axiomatiserade system där slutsatser följer logiskt av de givna premisserna, där den icke-euklidiska geometrin dock tydliggjorde att några universella sanningar inte beskrevs.

Rav menar istället att det är bevisen som är ”bärare av matematisk kunskap [vår översättning][4]” (Rav, 1999, s.20). Alla Strategier och tekniker för problemlösning finns i bevisen, sammankopplandet av teorier och resultat sker i bevisen, metodiken och koncepten finns i bevisen, ja enligt Rav existerar hela det matematiska vetandet i bevisen. Författaren stärker sin argumentation genom att lyfta tre exempel som vi inte kommer presentera ingående men låt oss se övergripligt på ett av dem. Rav diskuterar Euklides bevis av att det existerar oändligt många primtal, vilket vi känner igen från avsnitt 2.1. Argumentationen kretsade kring formuleringen $N = p_1 p_2 \dots p_n + 1$ och Rav hävdar att idéen att skapa talet N inte följer från något axiom eller tidigare bevisad sats. Det är istället endast en kreativ och genialisk manöver som tillför till matematiken mer än vetskapen om att det existerar ett oändligt antal primtal. Exempelvis går samma teknik att använda för bevis av ytterligare teorier, bland annat att det existerar oändligt antal primtal med formen $4n + 3$, men det har även utvecklat det matematiska vetandet i kraft av sig själv.

---

[3] (a) There exist infinitely many integers n such that both n and $n + 2$ have at most nine prime factors, (b) Every sufficiently large even integer is the sum of two numbers each having at most nine prime factors.

[4] ”bearers of mathematical knowledge”

4.2.2 Matematikdidaktiskt perspektiv

Hanna och Barbeau (2008) vill undersöka Ravs idéer om bevis och diskuterar i artikeln *Proofs as bearers of mathematical knowledge* deras betydelse för matematikundervisning i stort men också för undervisning av just bevis. De vill visa hur bevis har potentialen, som Rav föreslår, att förmedla metoder, verktyg, strategier och aspekter av problemlösning. Hanna och Barbeau (2008) menar att Ravs specifika idé om bevis som ”bärare av matematisk kunskap [vår översättning]” (Rav, 1999, s. 20) inte har diskuterats utan att man har fokuserat på andra aspekter av bevis i undervisning. De påpekar dock att det finns undantag i exempelvis Lucast som menar att ”bevis och problemlösning är i stort sett samma process och båda leder till [matematisk] förståelse [vår översättning]” (Hanna & Barbeau, 2008, s. 345). De vill fortsätta i samma spår genom att utvärdera hur Ravs idé kan appliceras i klassrummet.

Därför undersöker Hanna och Barbeau (2008) om det finns exempel på matematiska bevis för en gymnasienivå som kan förmedla matematiska metoder, verktyg, strategier och aspekter av problemlösning. De vill också ta reda på om och hur dessa exempel kan fungera och tillföra något i ett klassrum. I sin artikel studerar Hanna och Barbeau två exempel av bevis och hur de kan fungera i undervisning. Vi kommer här nu att återberätta ett av dessa exempel, som dessutom är vanligt förekommande i den svenska gymnasieskolan.

Exemplet behandlar abc-formeln som är en lösningsformel till kvadratiska ekvationer, den är snarlik den formel som vi ofta ser i svenska skolan, pq-formeln. Men vi kommer nu att diskutera exemplet utifrån abc-formeln eftersom det är den som exemplifieras i Hannas och Barbeaus (2008) artikel. Abc-formeln löser en kvadratisk ekvation som är skriven på formen $ax^2 + bx + c = 0$ och där $a \neq 0$ och ser ut såhär:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Hanna och Barbeau (2008) diskuterar hur abc-formeln används för att lösa kvadratiska ekvationer på en grundläggande nivå. Det är möjligt att tillämpa formeln utan att ha en förståelse varken för formeln eller resultatet. Ett enkelt sätt att testa om det blev rätt resultat är att byta ut x-värdena i den ursprungliga kvadratiska ekvationen mot lösningarna. Det bevisar att formeln stämmer, men Hanna och Barbeau frågar sig om den åtgärden inte utelämnar en förståelse för hur abc-formeln faktiskt fungerar.

Hanna och Barbeau (2008) menar att genom att undersöka hur abc-formeln fungerar med en härledning av formeln skapas en förståelse för andra egenskaper och tillämpningar av inte minst kvadratiska funktioner, men också snarlika funktioner. Att härleda abc-formeln leder också till att det går att dra slutsatser kring huruvida det finns några andra lösningar. Ett enkelt test av resultatet ger inte dessa fördelar anser Hanna och Barbeau.

När det kommer till att härleda abc-formeln finns det olika strategier och tekniker men Hanna och Barbeau (2008) förmodar ändå att det är nog sannolikt att eleverna kommer att behöva lite hjälp med det. Genom att introducera tekniken kvadratkomplettering ges eleverna möjlighet att fördelaktigt använda denna teknik som alternativ. Så med hjälp av kvadratkomplettering kan vi skriva om uttrycket $ax^2 + bx + c = 0$, där $a \neq 0$, såhär

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} \Leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{4ac}{4a^2} + \frac{b^2}{4a^2} \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

och slutligen kommer vi fram till abc-formeln: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, där $a \neq 0$.

Introduceringen av kvadratkomplettering kan också leda till att eleverna lär sig andra tekniker som är nya för dem. Hanna och Barbeau (2008) påpekar att den generella tekniken att först addera för att sedan subtrahera en term i ett uttryck kan vara en nyhet för eleverna. Det är en teknik som kommer att användas mer frekvent vid högre matematikstudier. Även om dessa tekniker, kvadratkomplettering och adderande och subtraherande av termer, inte är någon logisk härledning av abc-formeln så är det verktyg eleverna kan använda i andra liknande situationer.

När man väl har identifierat komponenterna som leder till en förståelse för abc-formeln kan man utforska andra situationer när de kan vara användbara. Vi kommer nu att beskriva två situationer som Hanna och Barbeau (2008) illustrerar i sin artikel. Det första exemplet är polynomet $x^4 + 4$. Det är kanske inte uppenbart att det går att faktorisera men om eleverna har förstått kvadratkomplettering, så kan de använda den för att komma fram till följande

$$(x^4 + 4x^2 + 4) - 4x^2 = (x^2 + 2)^2 - (2x)^2 = (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2).$$

För att lösa polynom av fjärde graden behöver man normalt kunskap om komplexa tal och enhetsrötter men ovanstående exempel visar hur även gymnasielever kan komma fram till en lösning.

Den andra situationen är hur kvadratkomplettering kan användas för att ”komplettera en kub” eller med andra ord applicera tekniken på en ekvation av tredje graden. Låt oss undersöka ekvationen $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$. Den kan med hjälp av kvadratkomplettering skrivas om på följande sätt

$$a(x + \frac{b}{3a})^3 + \left(c - \frac{b^2}{3a}\right)x + \left(d - \frac{b^3}{27a^2}\right) = 0.$$

På det sättet kan man lösa ekvationer av tredje graden på formen $x^3 - px + q = 0$, som är startpunkten för generella lösningar för ekvationer av tredje graden.

Hanna och Barbeau (2008) redogör för två sådana situationer som visar hur eleverna kan uttrycka rötter för ekvationer av tredje och fjärde graden med hjälp av koefficienter. Sådana situationer ger eleverna en ökad förståelse av och bättre färdigheter i algebra (Hanna & Barbeau, 2008). När det kommer till algebra så handlar matematiken ofta om att läsa av och förstå den information som ett uttryck innehar. Ibland är det lätt att förstå uttrycket men ibland är information väl dold. Då handlar det inte bara om algebraisk förståelse utan också om färdigheter i algebraisk manipulation. Algebraisk manipulation avser förenkling av algebraiska uttryck som gör den mer hanterbara och det räknas som en viktig färdighet inom problemlösning.

Hanna och Barbeau (2008) avslutar exemplet med att förklara att de vinster vi har gjort när vi betänkt beviset av abc-formeln går bortom de som gjort vid en enkel validering av formeln. Slutligen kan vi men bestämdhet hävda att det bara finns två rötter till en kvadratisk ekvation och alla andra kunskaper eleverna har fått på köpet. Hanna och Barbeau (2008) understryker att det som är viktigast i anseende av artikeln är tillägnandet av tekniker som går att applicerar på många fler situationer än bara det här exemplet, och en bredare kunskap om kvadratiska ekvationer som kan bidra till en mer sammanhängande helhetsförståelse.

Efter de båda exemplen som Hanna och Barbeau (2008) beskriver i sin artikel menar de att det är uppenbart att det finns exempel på bevis som kan fungera precis så som Rav föreslår. Men de betonar också att det finns många frågor om undervisningen av bevis som måste besvaras i forskningen, exempelvis behöver liknande bevis till de i artikeln testas i verkliga undervisningssammanhang. Andra frågor man behöver ta i beaktning är om läroplanen måste justeras för inkludera bevis i undervisningen, hur läraren ska arbeta med bevis i undervisningen och vilka förändringar som behövs för att lärarkollegiet ska inkludera bevis i undervisningen. Avslutningsvis argumenterar Hanna och Barbeau (2008) för att bevis bör ha samma roll i matematikundervisningen som i matematiken, med andra ord så kan bevis ha en större roll i gymnasieskolan för att de har en potential att förmedla viktiga matematiska kunskaper så som strategier och metoder. De menar att lärare har förbisett bevisens potential och att skolväsendet måste uppmärksamma bevisets möjligheter.

4.3 Det matematiska bevisets roller

Ovan såg vi att Rav argumenterade för att det var bevisen som utvecklade matematiken och på många sätt undersökte han vilken roll bevisen har i matematiken. Denna fråga har även intresserat ett flertal didaktiker som, tydligare än Rav, försöker systematisera vilka funktioner bevis fyller i matematiken. En tydlig uppräkning av bevisen funktioner skulle dels medföra en förståelse för bevisens roll i matematiken, dels tydliggöra vilka möjliga vinster som en undervisning fokuserad på bevis kan medföra. Vi kommer nu undersöka de Villiers (1990), Hannas (2000) och Hemmis (2006) bidrag till denna undersökning. Dessa vilar i sin tur på Bells arbete som publicerades 1976 (de Villiers, 1990).

4.3.1 Bevisens roll enligt de Villiers

Matematikdidaktikern de Villiers (1990) anmärker att elever ofta har svårigheter med att se behovet av bevis vilket leder honom till frågan vilket behov matematiker har av bevis eller, för att formulera det annorlunda, vilka funktioner bevis uppfyller. Dessa frågeställningar leder till fem punkter som de Villiers menar sammanfattar matematikbevisets funktioner. Dessa funktioner har enligt Hemmi (2006) kommit att bli standard inom den matematikdidaktiska forskningen där bland annat hon själv utgår från dem. I följande diskussion skall vi främst intressera oss för de matematiska funktionerna.

- *Verifikation* (intresserad av **sanningen** hos ett påstående)
- *Förklaring* (ger insikt till **varför** det är sant)
- *Systematisering* (**organiseringen** av flera resultat till ett deduktivt system av axiom, stora koncept och satser)
- *Upptäckt* (upptäckten eller uppfinningen av **nya** resultat)
- *Kommunikation* (**överföringen** av matematisk kunskap)

[Vår översättning] (de Villiers, 1990, s.18)

Bevis för verifikation eller övertygelse lyfts enligt de Villiers (1990) vanligtvis fram som huvudfunktionen av bevis, inte minst av matematiklärare. Han anser dock att det är något missvisande då övertygelsen oftast kommer före beviset vilket han följer upp med att fråga sig varför matematiker annars skulle ägna månader och år för att bevisa en hypotes. Med detta vill han inte påstå att bevis saknar verifikationsfunktion utan endast sätta det i perspektiv gentemot de andra funktionerna.

Förklaringsfunktionen hos bevis menar de Villiers (1990) mycket väl kan ha en större påverkan på matematikers sökande efter bevis än det att bli övertygade. Som exempel diskuterar han det datorgenerade beviset av fyrfärgssatsen, som säger att det endast krävs fyra färger för att färglägga alla möjliga kartor, så att inga angränsade regioner har samma färg. Detta övertygade de flesta matematiker om dess korrekthet, men sakande förmåga att förklara varför, vilket ledde till att matematiker hade svårare att acceptera det. Därmed argumenterar de Villiers för att frågan *varför* är viktigare än påståendet *att* för matematiker.

De två funktionerna av bevis vi nu diskuterat är för många självklara. Bevis i rollen som organisatör av det matematiska systemet vilket de Villiers (1990) berör därefter är dock inte det. Han påstår här att bevis har en fundamentalt viktig roll i systematiserandet av matematiken till ett deduktivt enhetligt system. Beviset för satsen om mellanliggande värden i analysen, som säger att om en kontinuerlig funktion f i intervallet [a, b] tar värdena f(a) och f(b) kommer den även att ta de värden mellan a och b någon gång under intervallet, menar de Villiers är ett exempel på detta. Bevisets huvudfokus är här att systematisera matematiken och inte att övertyga eller beskriva varför då detta enligt de Villiers inses enkelt.

Därefter pekar de Villiers (1990) på bevisens möjlighet att generera nya upptäckter. I viss mån går det här att anse att han argumenterar emot sig själv då han ifrågasätter de matematiker och didaktiker som påstår att bevis oftast inte är en god metod för nya upptäckter. Dessa verkar enligt de Villiers tro att satser och hypoteser nästan alltid upptäcks via intuition och experiment. Det går dock att fråga sig om inte de Villiers gör detsamma i sin första punkt då han argumenterar för att det inte alltid är bevisen som ger övertygelse. Det finns dock en skillnad mellan dessa punkter som går att exemplifiera genom historien om icke-euklidisk geometri vilket också de Villiers nämner men inte utvecklar närmare. Om vi dock kommer ihåg Saccheris bevisförsök av parallellaxiomet (avsnitt 2.4), så såg vi där hur ett misslyckat bevis slutligen mynnade ut i insikten om att ett annat system var möjligt. Dock endast möjligt, och någon övertygelse om dess riktighet nådde varken Saccheri eller Lambert. Därmed blir det tydligt hur bevis har en förmåga att generera nya upptäckter, utan att för den sakens skull alltid ge övertygelse.

de Villiers (1990) sista punkt är att bevis har en kommunikativ funktion mellan matematiker, mellan professorer och studenter, mellan lärare och elever och inte minst mellan eleverna själva. Denna kommunikativa funktion verkar även som en kontrollinstans vilket vi diskuterat mer ingående i avsnitt 4.1.2.

4.3.2 Bevisens roll enligt Hanna

Även Hanna (2000) intresserar sig för vilken roll bevis bör ha i matematikundervisningen vilket leder också henne till frågan om vad för funktion bevis har i matematiken. Hon upptäcker att det råder delade meningar i frågan och framförallt lägger hon märke till att matematiker i högre grad värdesätter den matematiska förståelsen som kan komma ur ett bevis framför den formella bevisföringen och argumenterar därmed i linje med de Villiers. Hanna utgår från de Villiers (1990) fem punkter men tillför även ytterligare tre som hon dock inte utvecklar nämnvärt, vilket kan bero på att hon inte ser dess omedelbara relevans för skolan.

- *Konstruktionen* av en empirisk teori
- *Utforskandet* av meningen hos en definition eller konsekvenserna av ett antagande

- *Införlivandet* av ett välkänt faktum till ett nytt ramverk och därmed se på det från ett nytt perspektiv

[Vår översättning] (Hanna, 2000, s.8)

4.3.3 Bevisens roll enligt Hemmi

Matematikdidaktikern Kirst Hemmi (2006) diskuterar även hon bevis och hennes preliminära frågeställning är hur universitetsstudenter möter matematiska bevis, vilket vi kommer diskutera närmare i kommande avsnitt (se 5.2). Hon ger dock även en teoretisk bakgrund som bland annat behandlar frågan om vilken roll bevis har inom matematiken. Hemmi tar avstamp i de Villiers lista över fem funktioner som bevis har. Ytterligare tillförs dock en punkt som hon kallar *Transfer* som grundar sig på intervjuer gjorda med verksamma matematiker.

Transfer delar Hemmi (2006, s. 61) upp i två något skilda funktioner där den första är att arbetet med matematisk bevisföring har möjlighet att utveckla det logiska tänkandet även utanför matematikens ramar och därmed vara till hjälp i problemlösning som inte berör matematik. Hon påpekar att det förr i tiden var obligatoriskt för lärda att lära sig geometri då det var vägen till det logiska tänkandet, vilket i mångt och mycket sammanfattar poängen Hemmi lyfter.

Den andra funktionen av Transfer, som Hemmi (2006) presenterar, är en inom matematisk sådan men beskriver egentligen samma funktion som den förra. Att arbeta med bevisföring har möjlighet att erbjuda nya tekniker som kan vara användbara då en tar sig an andra problem samt skapa förståelse som ger insikt på andra matematiska plan. En matematiker Hemmi intervjuar lyfter som exempel att härledningen till formler som behandlar andragradsekvationer har möjlighet att vara användbara i många andra matematiska sammanhang. Detta exempel känner vi igen från Hanna & Barbeaus (2008) argumenterande text i avsnitt 4.2.2.

5 Bevis i undervisningen

I detta kapitel inleder vi med att presentera en analys av styrdokumenten där vi belyser i vilken mån bevis behandlas i framförallt ämnesplanen. Därefter följer vi Hemmis (2006) diskussion av vad en lärare måste förhålla sig till då bevis introduceras hos eleverna. I tredje avsnittet följer vi en studie som Balacheff (1988) utförde på en högstadieskola där han söker klargöra vilka kognitiva nivåer av bevisföring elever befinner sig på. Dessa arbeten kan ses i en större didaktisk kontext där Balacheff rör sig i den konstruktivistiska skolan medan Hemmis arbete växer fram ur en sociokulturell bakgrund.

5.1 Bevis i styrdokumenten

I det här avsnittet vill vi undersöka hur skolans aktuella styrdokument behandlar bevis, främst ämnesplanen för matematik i gymnasieskolan. Vi kommer att undersöka i vilka sammanhang ordet bevis förekommer i ämnesplanen för matematik och i Skolverkets kommentarer till ämnesplanen.

I det inledande avsnittet i ämnesplanen, ämnesbeskrivning och ämnets syfte**,** för matematik så förekommer inte ordet bevis någon gång (Skolverket, 2011a, s. 90ff), men om man tittar på Skolverkets kommentarer till resonemangsförmågan så behandlas matematiska bevis där. Det står skrivet att resonemangsförmågan innebär att kunna

> ” [...] genomföra bevis i tal och skrift. Detta inkluderar att uppmärksamma betydelsen av och kunna redogöra för de bärande idéerna i ett matematiskt bevis och inse skillnader mellan gissningar och välgrundade påståenden.
>
> Matematiska resonemang kan till exempel utgöras av formella skriftliga bevis för matematiska påståenden, där resonemanget består av logiska slutsatser utifrån givna definitioner, axiom och satser.”
>
> (Skolverket, u.å., s.2f)

I kursplanerna för matematik däremot förekommer ordet bevis ett flertal gånger, men inte i samtliga kursplaner. I kurserna för matematik 1a, 2a, 2b och 2c så nämns matematiska bevis inte överhuvudtaget. I centralt innehåll för matematik 1b och 1c så står det under rubriken geometri att undervisningen ska behandla” [i]llustration av begreppen definition, sats och bevis, till exempel med Pythagoras sats och triangelns vinkelsumma” (Skolverket, 2011a, s. 98 & 104). Det skrivningen förtydligas i Skolverkets kommentar ”[i]llustration innebär att presentera begreppens roll och funktion i matematik, samt att synliggöra skillnaden mellan att troliggöra och bevisa ett matematiskt påstående” (Skolverket, u.å., s. 11 & 12). I betygskriterierna för kurserna 1b och 1c behandlas inte bevis.

I kurserna matematik 3b, 3c, 4 och 5 finns det en samstämmighet i hur bevis behandlas i betygskriterierna. När kriterierna för resonemangsförmågan beskrivs för betygen A och C förekommer det en skrivning som är likadan för alla fyra kurserna. För betyget C ska eleven kunna ”genomföra enkla matematiska bevis” (Skolverket, 2011b, s. 22, 25, 28 & 31) och för betyget A ska eleven kunna ”genomföra matematiska bevis” (Skolverket 2011b, s. 23, 26, 29 & 32). Samma samstämmighet råder inte i centralt innehåll för de olika kurserna. I centralt innehåll i kurserna Matematik 3c och 4 så står det att handlingen ska behandla specifika bevis, de Moivres formel för kurs 4 och cosinus-, sinus- och areasatsen för kurs 3c (Skolverket, 2011a, 90ff). Dessutom ska matematik 4 behandla olika bevismetoder enligt det centrala innehållet. I matematik 5 är det specifikt matematisk induktion som ska behandlas. I centralt innehåll för matematik 3b så nämns inte matematiska bevis.

Sammanfattningsvis så är det först i matematik 4 som centralt innehåll behandlar bevis som mer än specifika exempel, fast än att betygskriterierna för kurserna 3b och 3c säger att eleverna ska kunna genomföra matematiska bevis för att uppnå betygen C, B och A. I övrigt så behandlas bevis i kurserna 1b och 1c och i resonemangsförmågan, men för att förstå hur Skolverket tänker sig den kopplingen krävs det närmare efterforskningar i kommentarerna till respektive avsnitt.

5.2 Aspekter av undervisningen av bevis

Hemmi (2006) intresserar sig för hur matematikstudenter på universitetet närmar sig bevis under sin studiegång och tar fram fyra aspekter på hur detta går till. Denna uppdelning anser vi vara applicerbar i arbetet med yngre elever då den berör problematik som kan uppstå oavsett kunskapsnivå.

- Övertygelse/Förklaring
- Induktion/Deduktion
- Intuition/Formalitet
- Osynlighet/Synlighet

[Vår översättning] (Hemmi, 2006, s.41)

Vi känner här igen Övertygelse/Förklaring från de Villiers lista över vilka funktioner bevis har, där övertygelse kan jämföras med verifikation (se avsnitt 4.3.1), vilket även Hemmi anmärker. De andra paren skall dock inte ses som funktioner bevis uppfyller i matematiken utan som egenskaper som bevisen kan innehålla. Inte heller skall de förstås som rena motsatspar, även om de i viss mening är just det, utan snarare som två sidor av samma mynt. Ytterligare poängterar Hemmi (2006) att dessa fyra aspekter inte verkar i ett vakuum utan påverkas av varandra och av ytterligare faktorer, inte minst de Villiers funktioner. Vi skall nu se över dessa aspekter närmare.

Hemmis (2006, s. 43ff) förståelse av övertygelse och förklaring överensstämmer i mångt och mycket med de Villiers (1990) varför vi inte kommer fördjupa oss i någon förklaring av begreppen. Hon lyfter dock ett antal didaktiska synpunkter som vi skall uppmärksamma. Hemmi observerar att didaktiker, bland annat de Villiers och Hanna, har argumenterat för att förklaring och inte övertygelse är huvudfunktionen av bevis i undervisningen. Detta då elever lätt blir övertygade av bland annat lärare och skolböcker, medan förståelse inte nås lika lätt. Detta resonemang vänder sig dock Hemmi mot och menar istället att dessa två bör växa fram i symbios då de är del i en kritisk process för att nå matematisk kunskap och att nå den ena utan den andra i viss mån minskar förståelsen. Med detta sagt påstår Hemmi inte att bevis är enda vägen att nå för dessa insikter. Hon delar de Villiers (1990) syn på att övertygelse ofta nås med andra medel än bevis, och hon inser också att förståelse kan nås genom bland annat generiska exempel. Hemmi (2006) listar dock tre olika vägar att nå övertygelse vilka är övertygelse via auktoriteter, illustration samt härledning från tidigare känna resultat. Av dessa tre är det naturligtvis den sistnämnda som matematiker framförallt eftersträvar, men enligt Hemmi bör även undervisningen eftersträva det. I denna strävan kan bevis ha en nyckelroll då de möjliggör en kritisk analys hos eleverna där slutsatser kan ifrågasättas men också accepteras, inte på grund utav auktoritet, utan genom egna logiska slutsatser.

Vidare diskuterar Hemmi (2006, s. 46) induktion och deduktion som i detta avsnitt skall förstås som två olika sätt att undervisa på. Den deduktiva undervisningen kan förstås genom den klassiska bilden av katederundervisning där läraren steg för steg härleder satser från axiom och eleverna tar till sig informationen. I induktionsundervisning är istället eleverna aktiva i sökandet efter bevis genom heuristiska undersökningar och exempel vilket låter eleverna delta i bevisföringsprocessen. Enligt Hemmi (2006) fick detta arbetssätt stort genomslag under sjuttiotalet, inte minst genom Lakatos artikel *Proofs and Refutation* i vilken han argumenterar för att deduktionsundervisningen fråntar bevisen sitt arv och presenterar dem utan kontext. Därmed går bevisprocessen och förståelsen över hur bevis växer fram förlorad. Induktionsundervisningen tillåter istället att studenter intar rollen som matematiker under sina bevisförsök och får på så sätt en mer korrekt bild utav vetenskapen matematik. Hemmi (2006) lyfter dock empiriska studier som visar på svårigheter att implementera induktionsundervisningen på grund utav motvilja hos studenter. De har saknat intresse för undersökningar utan klara mål, eller så har de accepterat undervisningsformen men velat komplettera den med deduktionsundervisning för att se det rätta svaret presenterat av lärare. En undervisning som kombinerar båda bär också, enligt Hemmi, på möjligheten att hos eleverna bygga en bild trogen matematikers verklighet samtidigt som undervisningen anpassas till elevernas begränsningar.

Nästa punkt på listan är intuition och formalitet. Hemmis (2006, s. 49ff) definition av formalitet motsvarar i stora drag vad vi lyfte i avsnitt 4.1 då formella bevis diskuterades, där hon delar bilden av att den formella bevisföringen inte fullt ut beskriver matematikers praktik. Hon tillägger dock att formalitet är tätt sammankopplat med det matematiska språket och i den meningen skall man alltså också förstå formalitet som matematikspecifika termer och formalia. Intuition skall dock inte tolkas som motsvarigheten till de informella bevis vi diskuterade i samma avsnitt. Istället beskriver Hemmi (2006) intuition som insikten matematiker når genom tidigare kunskap, erfarenheter och exempel men som saknar bevis. Givet att fokus i för stor utsträckning läggs på formalitet då elever möter bevis finns en risk, enligt Hemmi, att eleverna ser bevisen som meningslösa och därmed inte inser behoven av dem. Samtidigt poängterar hon att i för hög grad bortse från formaliteten lämnar eleverna oförberedda på att följa logiska argumentationer. Återigen framhävs vikten av samspel där möjligheten att ta in ett formellt bevis och skapa en intuitiv förståelse av detta lyfts som ett mål att sträva mot.

Slutligen introducerar Hemmi (2006, s. 54) begreppen synlighet och osynlighet. Synlighet förstås här som hur konstruktionen av bevis går till, vad ett bevis innehåller, vilken logisk struktur bevis har men också egenskaper som vilken funktion och historisk relevans de uppfyller. Hemmi (2006) uppmärksammar att synlighet inte skall missförstås som formalitet. Det är alltså inte så att ett formellt bevis automatiskt är synligt. Synlighet avgörs snarare av i vilken grad framställningen av beviset tydliggör de kritiska steg som görs under bevisets gång. Osynlighet menar hon istället beskriver processen då bevis används men inte fokuseras på. Bevis blir i detta förlopp ett medel och inte ett mål i sig. Vidare lyfter Hemmi (2006) forskning som pekar på att bevisföring lärs implicit snarare än explicit. Bevisföring skulle i sådana fall inte vara något undervisningen specifikt skall fokusera på utan en kunskap som växer fram genom matematisk praktik. Selden och Selden pekar dock, enligt Hemmi, mot att det är i de matematiska kursplanerna bevisföring behandlas implicit, vilket inte innebär att även kunskapen är implicit. Istället måste dessa krav tydliggöras och studenter bör få aktiv undervisning i hur bevisföring går till. Därmed lyfts behovet av att synliggöra den matematiska bevisföringen. Hur synlighet och osynlighet skall balanseras bildar enligt Hemmi en form av paradox i undervisningen av bevis, där elever i viss mån behöver haft en egen erfarenhet av bevisföring för att kunna fokusera på dess struktur, innehåll och uppbyggnad, samtidigt som denna erfarenhet på många sätt kräver en tidigare orientering av just dess struktur, innehåll och uppbyggnad.

Vi ser att Hemmis (2006) diskussion inte leder fram till några absoluta slutsatser och inte heller framhåller något av motsatsparen som överlägset gentemot det andra. Detta då presentationen inte heller strävar efter det. Hemmis mål är att poängtera de aspekter som påverkar nybörjares möten med bevis och bevisföring och inte att argumentera för en specifik undervisning.

5.3 Kognitiva nivåer av bevisföring

Matematikdidaktikern Nicolas Balacheff (1988) vill förstå elevers bild av bevis och hur de når övertygelse. Detta gör han genom en studie där högstadieelever i par arbetar med att utveckla en formel som skall beskriva hur många diagonaler en polygon har, givet att antalet hörn är kända. Sambandet för detta kan beskrivas som $f(n) = \frac{n(n-3)}{2}$, vilket ingen av de grupper vi diskuterar når. Under denna studie förväntar sig Balacheff kunna applicera ett antal kognitiva nivåer av bevisföring på elevernas bevisförsök. De kognitiva nivåerna skiljs åt av vilka krav eleverna ställer på sina bevis. Elevernas tankesätt på bevis förändras genom de olika nivåerna där framförallt insikten om behovet av att dra generella slutsatser är starkare i högre nivåer. Han inleder dock med att skilja på pragmatiska och konceptuella bevis. Pragmatiska är de bevis som förlitar sig på specifika fall och handlingar som dras slutsatser av, medan konceptuella går bortom handlingar och istället lutar sig på att finna de egenskaper som är av vikt och sätta ett samband mellan dessa. Steget mellan dessa menar Balacheff är att kunna särskilja det generiska i de specifika fall man undersökt. Då P(n) används nedan avser det en polygon med n antal hörn och $f(n)$ beskriver sambandet vi söker.

De kognitiva nivåer Balacheff (1988) fokuserar på är följande, listade i hierarkisk ordning, där de två förstnämnda saknar egenskaper matematiker söker hos bevis men behandlas av eleverna som sådana.

- Naiv empirism
- Det kritiska experimentet
- Det generiska exemplet
- Tankeexperimentet

[Vår översättning] (Balacheff, 1988, s. 219)

Naiv empirism beskriver Balacheff (1988) som att dra slutsatser från ett fåtal prövade fall. *Givet att hypotesen håller för de fem första fallen så gäller det även för alla andra* lyder argumentation. Denna form av resonemang inser vi saknar bäring men Balacheff lyfter en studie utförd av Bell där så många som en fjärdedel av en grupp av 15-åringar lutade sig på naiv empirism. I Balacheffs egna studie exemplifieras det bland annat i gruppen som från undersökningar av P(4), P(6) och P(8) når sambandet $f(n) = \frac{n}{2}$. Om vi bortser från att sambandet faktiskt misslyckas med att beskriva P(6) och P(8), vilket kan beror på gruppens oklara bild av vad polygon och diagonal faktiskt innebär, kan vi ändå känna igen argumentationen som naiv empirism. Ett fåtal testade fall bygger upp teorin och när ett motargument P(5) dyker upp, löser gruppen det med en ad hoc metod där alla udda tal följer en ny regel. Denna ad hoc mentalitet är enligt Balacheff tydlig indikation på naiv empirism.

Balacheff (1988) vill att det kritiska experimentet skall förstås som en metod där en hypotes vara eller inte vara sätts på prov genom ett specifikt experiment. *Om hypotesen gäller i detta fall kommer den alltid att gälla.* Denna metod växer enligt Balachef fram genom insikten att generella slutsatser måste kunna dras, vilket användare av naiv empirism inte insett. Det specifika fallet väljs därmed slumpmässigt ut i förhoppningen om att det svarar mot denna generalitet. I studien visas detta exempelvis då en grupp nått en metod för att beskriva $f(n+1)$ givet att de vet $f(n)$ och då kommer till följande, ”försök med 15 och då om det fungerar för det, ja då så betyder det att det fungerar för de andra” [egen översättning][5] (Balacheff, 1988, s.224).

Vidare diskuterar Balacheff (1988) det generiska exemplet där hypotesen härleds från ett objekt valt, inte i kraft av sig själv, utan i kraft av de egenskaper det innehar. Objektet representerar därmed den klass av objekt hypotesen uttalar sig om och inte först och främst sig själv. Metoden förekom i ett fåtal fall och vi kan se närmare på en argumentation för att få en bild utav hur den går till. Hypotesen var att $f(n) = (n-3) + (n-3) + (n-4) + \cdots 2 + 1$ som söktes härledas från det generiska exemplet P(6). Den första termen (n-3) insågs genom upptäckten av att det till de två hörn närmast punkten eleverna valt inte gick att dra diagonaler. Från denna insikt som grundade sig på det specifika i fallet P(6) kunde generella slutsatser dras givet att P(6) var en tillräckligt bra representant. Balacheff noterar dock att även efter denna insikt lutar sig grupperna mot det kritiska experimentet för slutgiltigt övertygelse vilket vittnar om en oförståelse av det egna resonemanget.

Högst upp på denna lista sätter Balacheff (1988) tankeexperimentet. Denna nivå kräver en förmåga att avkontextualisera frågeställningen och bryta ner objekten till sina beståndsdelar. Beviset skall vara frånkopplat specifika fall och istället behandla objekten som en och samma. Under studien var det ingen grupp som lyckades utföra detta bevis, men Balacheff lyfter ett exempel där ansatsen existerade, vilket vittnar om en medvetenhet om behovet, även om utförandet brast. Även denna grupp hade undersökt P(6) och kommit fram till att det från varje punkt utgick tre diagonaler. I försök att formulera ett generellt samband inför de termerna x och y men misslyckas med att konstruera ett samband mellan dessa vilket i slutändan gör formuleringen innehållslös. Denna konstruktion av samband, som eftersträvas i tankeexperimentet, anser Balacheff kräva en kognitiv utveckling där eleverna kritiskt måste kunna reflektera kring sina egna slutsatser, men också kunna utnyttja språket som ett logiskt verktyg.

Balacheffs (1988) nivåer kan ses som ett verktyg för att förstå hur elever resonerar kring bevis. Han pekar även på en skiljelinje mellan å ena sidan naiv empirism och det kritiska experimentet, å andra sidan det generiska exemplet och tankeexperimentet. De förstnämnda bygger övertygelse genom konstaterade fakta medan de sistnämnda bygger den på logiska slutledningar. Denna övergång får därmed ses som av vikt för att förstå elevers nivå. Han uppmärksammar dock att det kritiska experimentet, även efter att elever nått en högre nivå, används för att bilda slutgiltig övertygelse. Kring detta resoneras att denna metod används i argumentationer även utanför den matematiska kontexten vilket kan förklara varför elever har svårigheter att överge den. Slutligen diskuterar Balacheff den skillnad i inställning som krävs

[5] ”try it with 15 and then if it works for that, well then that means that it works for the others”

av utövaren då fokus är problemlösning eller bevisföring. Den förra har tydliga praktiska motivationer medan den senare bär på teoretiska. Denna skillnad är inte självklar för elever vilket kan förklara varför vissa elever anser att de lägre nivåerna av bevisföring räcker.

6 Diskussion

I resultatdiskussionen som följer nedan kommer vi sammanfatta forskningen vi berört samt åter vända blickarna mot våra inledande frågeställningar. Därefter kommer vi föra ett utökat resonemang kring hur bevis behandlas i styrdokumenten och ifrågasätta om deras beskrivning gör bevisen rättvisa. Vidare diskuterar vi didaktiska konsekvenser som arbetet medfört för vår yrkesutövning och exemplifierar dessa med hjälp av ett undervisningsupplägg. Slutligen lyfter vi fortsatt forskning som vi ser behov av.

6.1 Resultat

Vi har förstått att bevis på många sätt är ett komplext begrepp. I historien har den på ett fundamentalt sätt påverkat matematiska skeenden. Idag verkar det existera olika uppfattningar om hur bevis bäst bör beskrivas, samtidigt som insikten om dess mångfasetterade funktioner blivit allt mer vedertaget. Ytterligare verkar ett antal aspekter vara av vikt vid ett första möte med bevis.

Kiselman & Mouwitz (2008) gav oss en generell beskrivning av matematiska bevis vilket i stort beskriver bevis som en argumentation, byggt på deduktiv härledning från axiom, som ger övertygelse om satsens sanningshalt. Denna bild förstärktes av Cabassut et al. (2012) men utvecklades även genom att koppla bevis till formalismen. Ser vi på de olika bevismetoder vi listade kan dessa förstås genom denna beskrivning, som får ses som matematikers traditionella förståelse av bevis. Denna beskrivning sammanfattas i begreppet formella bevis där även en mekanisk slutledningsprocess anses beskriva bevis.

Ett ifrågasättande av huruvida det formella beviset faktiskt beskriver matematikers praktik har dock växt fram och fått fäste inom framförallt matematikdidaktiken. Istället argumenteras för en informell förståelse av bevis. Dawson (2006), Hanna (1990) och Weber (2008) framhåller alla att den sociala processen har en nyckelroll inom bevisföring vilket därmed införlivas i begreppet informellt bevis. Dawson menar bland annat att denna process förklarar hur bevis som ansetts övertygande i en kontext förlorat sin övertygelseförmåga i andra, vilket den formella tolkningen inte kan förklara. Nasir al-Din al-Tusis bevis av parallellaxiomet kan ses som ett exempel då det i sin tid ansågs övertygande men hade som vi vet idag stora brister. Rav (1999) delar denna bild men poängterar också att ett försök att tvinga in bevis i den formella beskrivningen oundvikligen leder till att delar av meningen hos beviset går förlorat. Vi ser därmed att frågan om vad bevis är inte har ett entydigt svar utan beror på utifrån vilken utgångspunkt frågan ställs.

Funktionerna bevis uppfyller som de Villiers (1990), Hanna (2000) och Hemmi (2006) listar söker sätta in bevisen i ett bredare matematiskt sammanhang där både historiska och samtida perspektiv kan urskiljas. Jämför vi dessa funktioner med vår historiska tillbakablick kan nämligen ett antal likheter urskiljas. De Villiers verifikation, förklaring och systematisering syns i grekernas arbete, där Euklides *Elementa* är det tydligaste exemplet, men även Hemmis transfer går att skönja i det faktum att filosoferna, utpräglade logiker, drogs till matematiken. Hannas utforskandefunktion kan exemplifieras i Weierstrass arbete med funktionsbegreppet och vi har redan tidigare kopplat Saccheris bevisförsök av parallellaxiomet till de Villiers upptäcktsfunktion. I Rav (1999) har vi sett en argumentation som inte bara undersöker vilka funktioner bevis har i matematiken utan istället lyfter fram bevis som den absolut viktigaste byggstenen i matematik. I bevisen, resonerade Rav, existerar all matematisk kunskap. Huruvida

Ravs artikel har fått stor spridning inom det matematiska fältet har vi inte fått helt klart för oss, vilket innebär att det går att ifrågasätt dess hållbarhet i att beskriva bevisens roll. Den funktion den fyllt inom matematikdidaktiken, där en stor del av den litteratur vi läst förhållit sig till den, berättigar dock att vi lyfter den. Bevis har alltså genom historian fram till idag haft liknande roll som varit så fundamental att avsaknaden av den skulle frånta matematiken dess essens. Draget till sin spets går det även att argumentera för att en matematik utan bevis skulle dö ut.

Vi har alltså förstått att matematikdidaktiken också frågar sig vad ett bevis är samt vilken roll de uppfyller i matematiken och skolan. Ytterligare undersöks vilka vinster en undervisning fokuserad på bevis kan medföra, vilket vi såg då Hanna & Barbeau (2008) undersökte hur Ravs (1999) teorier kan realiseras i undervisningen. Hemmi (2006) lyfte fyra par av aspekter som påverkar elevers förståelse av bevis, vilka därmed bör beaktas då undervisning av bevis planeras. Slutligen såg vi Balacheff (1988) undersöka hur elever arbetade med bevis där fyra kognitiva nivåer framgick. Dessa tydliggjorde hur elever tolkade bevisprocessen där vad de ansåg utgöra ett fullgott bevis framgick men visar också, enligt Balacheff, elevernas möjlighet att resonera matematiskt. Balacheffs (1988) artikel kan tyckas vara till åren och de förklaringsmodeller han utnyttjar sig av, med ett tydligt fokus på kognitiv utveckling, skulle kanske inte idag används i samma grad. Hans nivåer fångar ändock något essentiellt i elevernas förståelse av bevis och artikeln har haft stor inverkan på matematikdidaktiken. Det didaktiska fältet som behandlar bevis spretar därmed i flera riktningar men kretsar ändock kring de ständiga didaktiska frågorna *vad, hur* och *varför?*

6.2 Styrdokument

Begreppet bevis behandlas i ett fåtal delar av ämnesplanen för matematik och när det väl behandlas lämnas ändå ett stort tolkningsutrymme. Det får oss att undra hur Skolverket definierar begreppet, hur myndigheten vill att undervisningen ska gå till och när undervisningen ska bedrivas. De här frågorna kommer vi nu att diskutera utifrån den beskrivning av styrdokumenten vi tidigare har gjort i avsnitt 5.1.

En övergripande bild av läroplanen förmedlar inte en bild av att bevis är en stor del av matematiken. Orden bevis förekommer inte i ämnets syfte och ämnesbeskrivningen (Skolverket 2011b, s. 1ff). Men som vi tidigare har sett så står det ändå i kommentarerna till det inledande avsnittet i ämnesplanen att resonemangsförmågan innefattar bevis (Skolverket, u.å., s.2f), men för att hitta den informationen måste man alltså söka i extramaterialet till ämnesplanen. Och visserligen är det så att förmågorna ska genomsyra undervisningen i alla kurserna, så det går ändå att hävda att bevis implicit ska genomsyra undervisningen i matematik men det blir då en tolkning som lämnas till läraren. Faktum kvarstår att i en stor del av kurserna, matematik 1a, 2a, 2b, 2c och 3b, så behandlar centralt innehåll inte bevis överhuvudtaget. Det faktum att bevis varken förekommer i ämnets syfte och beskrivning eller i stora delar av ämnesplanen kan leda till att bilden av skolämnet matematik skiljer sig från matematik som vetenskap.

I kurserna 3b, 3c, 4 och 5 finns det en samstämmighet i kunskapskraven att elever ska kunna genomföra bevis (Skolverket, 2011b, s. 22ff), men det är oklart i vilken kurs de ska få de kunskaperna. Det är först i kursplanen för matematik 4 som det står under centralt innehåll att undervisningen ska behandla olika typer av bevismetoder. Men elevernas betyg baseras ändå på deras kunskaper i att genomföra bevis i den kursen de läst innan, antingen 3b eller 3c. Utöver det står det i centralt innehåll för kurserna 1b och 1c att undervisningen ska innehålla ”[i]llustration av begreppen definition, sats och bevis” (Skolverket, 2011a, s. 98 & 104) men med det menar de att eleven ska få en bild av bevisens roll i matematiken och att undervisningen ska förmedla en förståelse om bevisens otvivelaktiga karaktär (Skolverket, 2011a, s. 98 & 104). Oavsett hur man väljer att tolka ämnesplanen så behandlas ändå matematiska bevis till en viss grad men tolkningsutrymmet är stort.

Läroplanen förmedlar en otydlig bild av matematiska bevis men just tydliggörandet av begreppet är av betydelse för undervisningen. I ämnesplanen står det om resonemangsförmågan och i kommentarerna till denna finns den enda beskrivningen av vilken betydelse skolverket menar med matematiska bevis. De ger ett exempel till vad resonemangsförmågan utgörs av när de beskriver formella skriftliga bevis (Skolverket, u.å., s.2f). Beskrivningen överensstämmer med den traditionella formalistiska synen på bevis som formella bevis. Men formellt bevis benämns bara en gång till och det är i kommentarerna till kurs 2c där det uppges att det inte finns några krav på att genomföra formella bevis (Skolverket, u.å.). Läroplanen ger ingen tydlig beskrivning av vilka typ av bevis de vill att undervisningen ska behandla. Hemmi (2006, s. 58) poängterar hur viktigt det är att undervisningen av bevis är tydlig för att eleverna ska förstå egenskaperna hos och uppbyggnaden av bevis. Balacheff (1988) menar att elever har svårt att urskilja skillnader mellan de kognitiva nivåerna av bevis. Därför är det viktigt att undervisningen ger en tydlig bild av betydelsen av bevis för att tydliggöra den kognitiva nivån av undervisningen för eleven. Det förtydligandet underlättas onekligen om läraren får en klar bild av begreppet från styrdokumenten.

Det finns många aspekter av behandlingen av bevis i styrdokumenten som kan ifrågasättas och behöver konkretiseras. En starkaste närvaro av begreppet bevis i ämnesplanen skulle förmedla den roll som bevis har i matematiken. Det tolkningsutrymme som existerar i styrdokumenten idag kan leda till att skolämnet matematik inte speglar vetenskapen eftersom bevis är en elementär del av matematik. Det finns mycket som kan göras för att läroplanen ska förmedla bevisens roll i matematiken och inte minst för att klargöra hur undervisningen av bevis ska bedrivas.

6.3 Didaktiska konsekvenser

Vår undersökning av matematiska bevis har gett oss en förståelse för deras roll i matematiken och didaktiken som vi kommer att vilja förmedla i vår undervisning. Vi vill nedan konkretisera hur detta på ett väldigt enkelt sätt kan realiseras. Med detta exempel vill vi också tydliggöra att vi på intet vis förväntar oss av våra elever att kunna bevisa satser matematiker arbetat med i åratal eller att undervisningen behöver vara revolutionerande för att få fram viktiga matematiska poänger.

Låt oss utgå från Pythagoras sats, en sats alla elever möter och förhoppningsvis även får se ett bevis utföras på, och som skolverket själva faktiskt lyfter som exempel på bevis. Den undervisning vi själva fått om denna sats och den vi sett på VFU låter elever i hög utsträckning applicera satsen på problem och verklighetsnära situationer för att på så sätt lära sig den. Vi anser att en sådan undervisning missar poängen med satsen då dess verkliga syfte, enligt oss, är att exemplifiera och tydliggöra det matematiska systemet, den matematiska bevisföringen eller visa matematikens historia. Huruvida elever kan räkna ut höjden på en flaggstång är enligt oss sekundärt, men ändå utgör detta lejonparten av den undervisning vi sett.

Undervisningen av Pythagoras sats skulle kunna gå till på följande sätt. Eleverna får gruppvis eller parvis arbeta med ett bevis, där de ska förstå hur beviset är uppbyggt och vilken matematik som tillämpas. Arbetet avslutas med att eleverna får presentera sina resultat inför klassen. Upplägget är enkelt men vi påstår att det också är givande. Rav (1999) påstod att matematisk kunskap realiserades i bevisen och kommer vi ihåg vårt bevis av Pythagoras sats (avsnitt 3.1) blir det uppenbart att mycket av det matematiska stoff vi önskar föra vidare till eleverna används i bevisen. Väljer vi våra bevis väl tror vi oss kunna behandla stora delar av det centrala innehållet genom arbete med bevis. De Villiers (1999) verifikation och förklaring som även återkom och poängterades tydligare hos Hemmi (2006) anser vi också överföras med detta upplägg, där eleverna inte skall behöva luta sig mot lärarens auktoritet utan i slutet av lektionen kunna argumentera självständigt. Funktionerna systematisering och kommunikation hos bevis som de Villiers också lyfter kommer även de framträda tydliga för eleverna givet att satsen sätts i sitt sammanhang. Upplägget anser vi också balanserar Hemmis (2006) induktion/deduktion och intuition/formalitet. Eleverna kan luta sig mot matematikers argumentation men ändå aktivt arbeta med bevisen genom att de själva skall förklara den bakomliggande strukturen vilket också synliggör den formella strukturen hos bevis samtidigt som en intuitiv förståelse söks. Balacheff (1999) poängterade att elever kunde ha svårigheter att i bevisföringsprocessen se vad som utgjorde ett full gott bevis och enligt oss kommer detta upplägg tydliggöra för eleverna vad de själva skall sträva efter i egna bevis.

Om vi kort ser till de matematiska förmågorna vi skall sträva efter anser vi att upplägget svarar mot begrepps-, procedur-, resonemangs-, kommunikations- och relevansförmågan vilket legitimerar en undervisning fokuserad på bevis även om man bortser från de vinster som ges i att eleverna skapar sig en förståelses av matematiken som vetenskap.

6.4 Fortsatt forskning

Vår undersökning av bevis i matematiken och didaktiken pekar på att det är meningsfullt att undervisa bevis men vi efterfrågar bland annat en mer praktiknära forskning. Framförallt tror vi att utvecklandet av undervisningsmaterial kan tillföra mycket till didaktiken och skolundervisningen. Hur kan undervisningen av bevis gå till och vilka aspekter är viktiga i en klassrumsmiljö? Vilka bevis passar undervisningen för grundskola och gymnasieskolan? För att besvara den andra frågan är det också viktigt att didaktiken analyserar diskussionerna kring informella bevis för att utveckla begrepp som synliggör vilka bevis didaktiker behandlar.

Dessutom efterfrågar vi mer forskning i skolmiljö för att förstå elevers och lärares tankar kring bevis. Hur ser lärare på hur bevis behandlas i läroplanen? Vilken betydelse lägger lärare i matematiska bevis? Hur ser elever på bevis? Hur ser undervisningen av bevis ut? Det är några av de frågeställningar man kan efterforska i en skolmiljö och som kan tillföra mycket till förståelsen för undervisningen av bevis.

Referenslista

Balacheff, N. (1988). Aspects of Proof In Pupils’ Practice of School Mathematics. I Pimm, D. (Red.), *Mathematics, Teachers and Children* (s. 216-235). Hodder & Stoughton: London.

Bonola, R. (1955). *Non-Euclidean Geometry: A Critical and Historical Study of Its Developments*. New York: Dover Publications, Inc.

Bråting, K. och Pejlare, J. (2008) Visualizations in Mathematics. *Erkenntnis* 68(3), s. 345-358. doi: 10.1007/s10670-008-9104-3

Cabassut, R., Conner, A., Isçimen, F.A., Furinghetti, F., Jahnke, H. N., & Morselli, F. (2012). Conceptions of Proof – In Research and Teaching. I Hanna, G. & de Villers, M. (Red.) *The 19th ICMI Study: Proof and Proving in Mathematics Education.* (s. 169-190). New York: Springer.

Cupillari, A. (2013). *The Nuts and Bolts of Proof*. (4 uppl.) Oxford: Academic Press.

Dawson Jr., J. W. (2006). Why Do Mathematicians Re-prove Theorems? *Philosophia Mathematica*, 3(14), 269-286. doi: 10.1093/philmat/nkl009

de Villiers, M. (1990). The role and function of proof in mathematics. *Pythagoras,* South Africa, 23, s. 17-24.

Grabiner, J. V. (2012). Why Proof? A Historian’s Perspective. I Hanna, G. & de Villers, M. (Red.) *The 19th ICMI Study: Proof and Proving in Mathematics Education.* (s. 147-167). New York: Springer.

Hanna, G. (1990). Some Pedagogical Aspects of Proof. *Interchange,* 21(1), s. 6–13. doi: 10.1007/BF01809605

Hanna, G. (2000). Proof, Explanation and Exploration: An Overview. *Educational Studies in Mathematics*, 44(5), s. 5-23. doi:10.1023/A:1012737223465

Hanna, G. & Barbeau, E. (2008). Proofs as Bearers of Mathematical knowledge. ZDM Mathematics Education 40(3), s. 345-353. doi:10.1007/s11858-008-0080-5

Hemmi, K. (2006). *Approaching Proof in a Community of Mathematical Practice* (Doktorsavhandling). Stockholm: Matematiska institutionen, Stockholms universitet.

Joyce, D.E. (1998). *Euclid’s Elements – Book 1.* Hämtad 2016-10-31, från http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/bookI/bookI.html#defs

Kiselman, C. & Mouwitz, L. (2008). *Matematiktermer för skolan*. Göteborg: Nationellt centrum för matematikutbildning, NCM.

Kline, M. (1972). *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*. New York: Oxford University Press.

Kline, M. (1980). *Mathematics The Loss of Certainty.* New York: Oxford University Press

Lindahl, LÅ. (2004). *En inledning till geometri.* Uppsala: Matematiska institutionen, Uppsala universitet.

Rav, Y. (1999). Why Do We Prove Theorems? *Philosophia Mathematica,* 7(3), 5-41. Hämtad 2016-09-01, från http://philmat.oxfordjournals.org/

Hanna, G. (2000). Proof, Explanation and Exploration: An Overview. *Educational Studies in Mathematics*, 44(5). doi:10.1023/A:1012737223465

Siu, MK. (1993). Proof and pedagogy in ancient China: Examples from Liu Hui's commentary on JUI ZHANG SUAN SHU. *Educational Studies in Mathematics,* 24(4), s.345-357. doi:10.1007/BF01273370

Skolverket. (2011a). *Läroplan, examensmål och gymnasiegemensamma ämnen för gymnasieskola 2011.* Stockholm: Skolverket.

Skolverket. (2011b). *Ämnesplan för gymnasieskolan, Matematik.* Hämtad 2013-09-24, från http://www.skolverket.se/laroplaner-amnen-och-kurser/gymnasieutbildning/gymnasieskola/mat?tos=gy&subjectCode=MAT&lang=sv

Skolverket. (2016) Ytterligare utökad undervisningstid i matematik. Hämtad 2016-10-23, från http://www.skolverket.se/laroplaner-amnen-och-kurser/nyhetsarkiv/nyheter-2016/nyheter-2016-1.247170/ytterligare-utokad-undervisningstid-matematik-1.247176

Skolverket. (u.å.). *Alla Kommentarer – Om ämnet Matematik* (pdf). Hämtad 2016-10-22, från http://www.skolverket.se/laroplaner-amnen-och-kurser/gymnasieutbildning/gymnasieskola/mat?subjectCode=MAT&lang=sv&tos=gy

Solow, D. (2005). *How to do and read proofs.* (4 uppl.) Hoboken: John Wiley & Sons, Inc.

Weber, K. (2008). How Mathematicians Determine if an Argument Is a Valid Proof. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39(4), 431-459. Hämtad 2016-09-01, från http://www.jstor.org.ezproxy.ub.gu.se/stable/40539306