



GÖTEBORGS UNIVERSITET

Estetiska uttryck som verktyg i matematiken

Moa Magnusson

Självständigt arbete L6XA1A

Handledare: Rune Romhed

Examinator: Maria Åström

Rapportnummer: VT17-2930-029-L6XA1A

Titel: Estetiska uttryck som verktyg i matematik/Aesthetic learning tools in mathematics
Författare: Moa Magnusson
Typ av arbete: Examensarbete på avancerad nivå (15 hp)
Handledare: Rune Romhed
Examinator: Maria Åström
Rapportnummer: VT17-2930-029-L6XA1A
Nyckelord: Matematik, estetiska uttryck, estetiska läroprocesser, grundskolan

Sammanfattning:

Undervisningen i matematik behöver bli bättre men kanske också annorlunda. Olika idéer kring hur matematikundervisningen skulle kunna utvecklas har framförts, ett av dem är att satsa på estetiska uttryckssätt och läroprocesser.

Syftet med den här uppsatsen är att undersöka vad forskning som behandlar användandet av estetiska uttryck i matematikundervisningen, menar att estetiska uttryck gör med skolmatematiken. Vilken funktion har användandet av estetiska uttryck och processer i matematikundervisningen? Jag utgår ifrån följande teorier när jag analyserar mitt material: svensk matematikundervisningshistoria, estetiska läroprocesser, och kritisk realism.

Som analysmetod har jag använt mig av tematisk innehållsanalys.

Min ursprungliga sökning efter relevant vetenskaplig litteratur gjordes genom en sökning i databasen Education Research Complete. De sökord jag använde var här "mathematics", "arts" och "elementary school", och jag begränsade sökningen till litteratur utgiven från år 2000 till 2017. Efter genomgång av dessa artiklar återstod tolv stycken som passade in på det jag ville undersöka, varav sju amerikanska, två brittiska, och en vardera från Ungern, Cypern och Kanada.

Min slutsats är att de strukturer som finns i matematikundervisning skapar och omskapar ett visst lärande, och estetiska läroprocesser i matematikundervisningen har möjlighet att skapa en annan sorts matematiskt lärande, som eventuellt kan förbättra den matematiska kunskapen hos eleverna. De teman jag funnit påtalar de positiva effekterna av en kreativ och lekfull matematik. Denna skapar kommunikation och diskussion, eleverna lär tillsammans och av varandra, får lättare att fokusera, känner mer engagemang och motivation. Det finns också indikationer på att de estetiska verktygen kan hjälpa eleverna att förstå matematik på djupet, och gå från en procedurell kunskap till en konceptuell sådan. Med procedurell kunskap menar jag att ha en viss färdighet, som att kunna räkna ut vad $49/7$ blir, medan en konceptuell kunskap innebär att eleven förstår *begreppet* division, som samband mellan division och multiplikation, del av helhet et cetera.

Innehåll

1. Inledning – 3
1.2 Syfte och frågeställning - 3
2. Teoretisk utgångspunkt – 4
2.1 Svensk matematikundervisning, historia och framväxt - 4
2.2 Estetiska uttryck och läroprocesser - 4
2.3 Kritisk realism – 5
3. Metod – 7
3.1 Avgänsning och resultat – 7
3.2 Teman – 7
3.3 Arbetets faser – 7
3.4 Dilemman och forskningsetiska frågor – 8
3.5 Deskriptiv undersökning – 8
3.6 Reliabilitet, validitet, generaliserbarhet - 9
4. Presentation av materialet - 10
5. Resultatredovisning och analys - 13
5.1 Kreativ matematik - 13
5.2 Negativa effekter av att använda estetiska uttryck i matematikundervisningen. - 13
5.3 Alternativa uttryckssätt - 14
5.4 Kommunicera matematik - 14
5.5 Matematisk förståelse på djupet - 16 vilja och förmåga att ”vara i” matematiken - 16
5.6 En vilja och förmåga att ”vara i” matematiken – 17
5.7 Matematiska förmågor - 18
6. Diskussion – 19
6.1 Resultatdiskussion - 19
6.2 Metoddiskussion - 21
6.3 Avslutande diskussion och förslag på vidare forskning - 21
7. Referenser - 22
7.1 Datamängden - 22
7.2 Övrig litteratur – 23
8. Bilaga - 25

1. Inledning

Matematik är ett ämne som väcker känslor, inte alltid positiva sådana. Ute på VFU har jag märkt att det är ett ämne som värderas högt i skolan, och som många tycker är svårt. Tråkigt är ett annat omdöme. Elever som är duktiga i matematik ses ofta som smarta, medan de som har svårare för ämnet kan dömas ut som mindre smarta, av sig själva och omvärlden. Lovisa Sumpter är docent och lektor i matematikämnets didaktik vid Stockholms universitet och forskar just om känslor och matematik. Hen menar att redan i lågstadiet dalar elevers intresse för matematik och ersätts då ofta av negativa känslor (Björkman, 2017).

2012 års resultat i Pisa-undersökningen väckte stor oro då Sverige hade den sämsta resultatutvecklingen av alla OECD-länder, och låg 16 poäng under genomsnittresultatet i matematik (Skolverket, 2013). Samma år fick Skolverket i uppgift av regeringen att genomföra den största satsningen någonsin på kompetensutveckling inom matematik, det så kallade "Matematiklyftet".

Undervisningen i matematik behöver bli bättre men kanske också annorlunda. Olika idéer kring hur matematikundervisningen skulle kunna utvecklas har framförts, ett av dem är att satsa på estetiska uttryckssätt och läroprocesser. I en artikel i *Pedagogiska Magasinet* skriver Carl-Magnus Höglund (2009) om Anne Bamfords undersökning "The Wow Factor" som skrevs på uppdrag av Unesco 2005 och som visar att estetiska ämnen har en positiv effekt på elevers lärande i såväl språkinläring som matematik. Material från 170 länder analyserades och visade att länder som Finland och Sydkorea, som ligger i topp i internationella undersökningar också satsar på estetik och kreativitet i skolan. I Finland läser till exempel alla lärarstudenter konst. Detta väckte ett intresse för att undersöka vad forskning i ämnet har kommit fram till.

1.1 Syfte och frågeställning

Syftet med den här uppsatsen är att genom en litteraturstudie undersöka vad forskning, som behandlar användandet av estetiska uttryck i matematikundervisningen, menar att estetiska uttryck gör med skolmatematiken. Här fokuserar jag på grundskolans undervisning av matematik.

Vilken funktion har användandet av estetiska uttryck och processer i matematikundervisningen?

2. Teoretisk utgångspunkt

Jag kommer här gå igenom de teorier som jag utgår ifrån när jag analyserar mitt material: svensk matematikundervisningshistoria, estetiska läroprocesser, och kritisk realism.

2.1 Svensk matematikundervisning, historia och framväxt

Sverker Lundin skriver i sin avhandling *Skolans matematik. En kritisk analys av den svenska skolmatematikens förhistoria, uppkomst och utveckling* om hur skolmatematiken kom att utvecklas i Sverige. Idag har vi ett ideal om en inkluderande skola där barn från olika delar av samhället, med olika ursprung och förutsättningar möts i ett och samma klassrum, även om det fortfarande råder hög segregering inom städer. I slutet av 1800-talet var skolan mycket segregerad, och bestod av en rad olika skolformer: folkskolor, flickskolor, realskolor, och så vidare. Efterhand kom detta att ändras och idealet blev att skapa en "objektiv sortering" inom skolan. Lundin menar att denna utveckling kan sägas fullbordad först under 1960-talet. Den objektiva sorteringen skulle gallra bland eleverna för att samhällets resurser skulle läggas på de som hade bäst förutsättningar att läsa vidare vid gymnasium och universitet. Matematiken användes till stor del vid denna gallring. Från 1920-talet fokuserade därför skolmatematiken på skriftliga prestationsmätningar och färdighetsträning. Det förekom dock en kritik mot matematikens roll som gallringsinstrument, och under 1960-talet inleddes en reformprocess som kallades "den nya matematiken". Denna ville komma närmare den vetenskapliga matematiken. Samtidigt fanns en kritik av hur undervisningen i skolorna gick till. John Dewey, Maria Montessori och Jean Piagets teorier kring barn och pedagogik hade fått fäste. Dessa teorier menar Lundin till mångt och mycket satte sig i opposition till den praktik som fanns i skolan. Idéer som att elever behöver lära genom sinnliga konkreta aktiviteter, samt ha ett eget intresse för lärandet växte fram (Lundin, 2008). Dewey fokuserade på fyra instinkter som hen menade att barn liksom vuxna drivs av. Det är den sociala instinkten, instinkten att tillverka, undersöka och uttrycka sig konstnärligt. Detta menade Dewey därför skulle prägla undervisningen (Sundgren, 2011). "För Maria Montessori var lek och arbete synonymt, det viktiga var att tillvarata barnens lust till aktivitet. Barnen leker och experimenterar med det pedagogiska materialet och lär sig samtidigt olika färdigheter" (Svenska Montessoriförbundet, 2017-05-09). Piaget i sin tur lade stor vikt vid att kunskap är något som aktivt skapas av individen själv (Halldén, 2011). Lärarna skulle läras om och undervisningen förändras. Men mot slutet av 1970-talet var entusiasmen för "den nya matematiken" mer eller mindre borta och matematiken blev åter ett sorteringsämne, och internationella prestationsmätningar blev en ytterligare sortering och mätning av kvalitén i den svenska matematikundervisningen (Lundin, 2008).

2.2 Estetiska uttryck och läroprocesser

Estetik benämns av Ingrid Pramling Samuelsson som "läran om det sköna och om konsten" i boken *Konsten att lära barn estetik: en utvecklingspedagogisk studie av barns kunnande inom musik, poesi och dans* (Pramling Samuelsson, 2011, s.12). Lek, lärande och estetik kopplas ihop i boken. På samma sätt som det anses naturligt för barn att vilja leka med varandra, så är det naturligt att vilja uttrycka sig estetiskt. Studier har visat att barn gärna skapar tillsammans och dessutom utmanar, inspirerar och kritiserar varandra under leken och skapandet, vilket lärare inte alltid anses göra. Pramling Samuelsson saknar hos förskola och skola det metasamtal som pågår naturligt parallellt med att barn leker. Leken förhandlas och formas språkligt samtidigt som den sker (Pramling Samuelsson).

Begreppet “estetiskt uttryck” kan ha många olika betydelser. Kjersti Bale tar i boken *Estetik - en introduktion* från 2010 upp filosofen Gadamers syn på konst som lek, symbol, fest. Konstverket är inte bara ett ting utan snarare en arbetsprocess med en publik som mål. Exempel som nämns är skådespel, musik och dans, och hur denna ger upplevelser av frihet, fascination och glädje (Bale 2010).

Bale beskriver också filosofen och pedagogen John Deweys syn på konsten. I sitt verk *Art as Experience* från 1934 skrev Dewey om sambandet mellan estetisk erfarenhet och allmänna livsprocesser. Om att det finns ett samspel med världen i konsten, att den är både ett deltagande och en kommunikation. Den estetiska upplevelsen menade Dewey ha både praktiska, emotionella och intellektuella kvaliteter. En så rik upplevelse som möjligt är målet (Bale, 2010).

Filosofisk estetik sammanfattar Bale som “disciplin, men också i förbindelse med konstbaserade läroämnen som film, konstvetenskap, litteratur, musik och teater, både i en mer praktisk betydelse, om de enskilda konstarnas verkningssmedel, som litterär estetik eller filmestetik, och om teori knuten till de enskilda konstarna.” (2010, s. 12-13). Det är den här definitionen jag har utgått ifrån när jag sökt texter att analysera utifrån estetiska uttryck i matematikundervisning.

När författarna Lindstrand och Selander (2009) i boken *Estetiska läroprocesser - upplevelser, praktiker och kunskapsformer* ska förklara uttrycket “estetisk läroprocess” skriver de att ett estetiskt uttryck tillför något till världen som inte fanns där innan, och har förmågan att förändra vår syn på vår verklighet. En läroprocess i sin tur tillför en förståelse av världen som inte fanns för personen tidigare.

I rapporten *En kulturskola för alla - estetiska ämnen och läroprocesser i ett mediespecifikt och medieneutralt perspektiv* (2003) från Myndigheten för skolutveckling, skriver författarna Marner och Örtegren att det vidgade textbegreppet innebär en syn där inte endast språket förmedlar kunskap. “Att inbegripa estetiska läroprocesser i ämnesövergripande skolarbete ger ökade möjligheter till olika typer av lärande” (s. 9). Förmedling av information och kunskap kan ske genom språket, men också genom kroppen, bilder, ljud etc. Det ena utesluter inte det andra - vilket är vad multimodalitet handlar om, och en sådan menar Marner och Örtegren behövs i den sociokulturella betydelsebildningen. I slutet av rapporten föreslås några olika inriktningar på vidare forskning i ämnet, exempelvis föreslås att “till forskningen i högre utsträckning bör knytas ämnesdidaktisk kompetens och kunskap om de semiotiska system som respektive ämne fokuserar, i syfte att få till stånd en fördjupad kunskap om estetiska läroprocesser. Studier av mediespecificerade läroprocesser behövs följaktligen, särskilt i relation till ämnesövergripande arbete” (Marner & Örtegren, 2003, s.116-117).

Sammanfattningsvis: estetiska uttryck definieras i uppsatsen som ämnen kopplade till konst, musik, drama, litteratur. Estetiska läroprocesser beskrivs ha förmågan att få eleven att förstå världen på nya sätt, och i ett vidgat textbegrepp kan kunskap förmedlas med fler medier än det verbala språket.

2.3 Kritisk realism

Kritisk realism fokuserar på hur individer gör mening av sina erfarenheter men också hur den sociala kontexten påverkar denna mening. Som teori ligger den mellan essentialism och konstruktionism (Braun & Clarke, 2006). Enkelt förklarar hävdar konstruktionismen att

verkligheten är socialt konstruerad och essentialismen att objekten i vår verklighet har inneboende egenskaper som inte är konstruerade av oss människor (Nationalencyklopedin a, b, 2017).

Kritisk realism presenterar enligt företrädare som Bhaskar och Lawson (1998) ett alternativ som både erkänner vetenskaplig kunskap utan att för den sakens skull bli positivistisk, och ett behov av att se till kontext, agens och strukturer utan att bli subjektivistisk, det vill säga en uppfattning att för att något skall existera så krävs det att ett subjekt varseblir eller reagerar känslomässigt på det.

Bhaskar (1998b) menar att all vetenskap måste hitta ett sätt att hantera paradoxen som består i att kunskap producerat av människor är en socialt skapad produkt samtidigt som de ting som kunskap handlar om inte är skapade av människan utan existerar i sig själva.

Kritisk realism ser ett stort behov av, och en mening i att analysera hur strukturer och agens skapar och omskapar varandra över tid och att försöka förklara varierande resultat vid olika tillfällen. Frågor som hur kontexter sätter villkor för vår frihet som subjekt, men också hur vi kan skapa förändring (Archer, 1998).

Den kritiska realismen menar att det existerar en verklighet som inte är avhängig våra begrepp om den. Att erkänna strukturer men inte vara blind för att se att individer kan skilja sig från strukturen eller kollektivet. Kritisk realism handlar om att se att det individuella perspektivet kan bestå av myter, felaktigheter, konventioner och okunskap. Som i sin tur kan undanröjas med vetenskap. Det finns också ett fokus på möjlig samhällsförändring. I forskning av den sociala verkligheten så är alltid villkoren öppna. Med det menas att det inte går att kontrollera så att ett utforskande av den sociala verkligheten sker under exakt likadana förhållanden varje gång, utan olika mekanismer samspelar alltid och på olika sätt (Danemark, Ekström, Jakobsen & Karlsson, 1997).

Kritisk realism är alltså en ontologisk teori som beskriver verkligheten enligt ovan. Dess motsats, konstruktivismen, har sitt sätt att beskriva verkligheten. Andreas Quale (2012) beskriver den konstruktivistiska synen på matematik i sin artikel "On the Role of Constructivism in Mathematical Epistemology." på följande sätt: a mathematical theory is indeed a prime example of a theoretical model, constructed by its practitioners (mathematicians). The model may then be designed to describe and explore, in mathematical terms, some part of the natural world; this would then identify it as belonging to the realm of applied mathematics (for instance, theoretical physics)." (s. 106).

Konstruktivismen är besläktad med relativismen som hävdar att det inte går att prata om en objektiv verklighet, utan menar att all kunskap konstrueras av oss människor, av specifika anledningar och i specifika kontexter (Quale, 2012).

Ett exempel på hur kritisk realism använts som utgångspunkt i en studie av matematikundervisning är artikeln "How much freedom does a teacher have in designing a learning event when adhering to assessment prescription?" av Sarah Bansilal (2010). Genom att granska de ideal som uttrycks i den läroplan som en sydafrikansk matematiklärare har att förhålla sig till, och kontrasten till de knappa skolresurser och de underprivilegierade elever med stora matematiska svårigheter som ska få ta del av dessa ideal och matematikundervisning, så målas en bild upp av en lärare som fastnar i glappet mellan dessa två verkligheter. Klassrumsverkligheten stämmer helt enkelt inte överens med den verklighet

som beskrivs i läroplanen. Bansilal menar att det är viktigt att uppmärksamma detta glapp för att kunna skapa förändringar i läroplan och tillgodose behov i skolorganisationen: ”The teacher’s disconnection and loss of agency – where she did not view herself as being able to make a difference – is a crucial issue for curriculum development agencies. A critical realist perspective calls for spaces to be created to liberate individuals to exercise their agency, and not to close down, regulate and make prescriptions about the forms of practice without taking cognizance of the substance of practice.” (s. 88).

3. Metod

Som analysmetod har jag använt mig av tematisk innehållsanalys som är en metod för att identifiera, analysera och beskriva mönster, det vill säga teman inom data (Braun & Clarke, 2006).

3.1 Avgränsning och resultat

Min sökning efter relevant vetenskaplig litteratur gjordes i databasen Education Research Complete. De sökord jag använde var här “mathematics”, “arts” och “elementary school”, och jag begränsade sökningen till litteratur utgiven från år 2000 till 2017. Detta gav 144 resultat, och efter att ha läst dessas sammanfattningar och rensat bort litteratur som behandlade annat än det jag är intresserad av att undersöka, exempelvis forskning riktad mot förskola, gymnasium, eller universitetsutbildning, kemi, naturvetenskap, fysik, estetiskt tilltalande matematik, med mera, återstod 14 artiklar vars sammanfattningar tydligt indikerade ett innehåll som var relevant för min undersökning. Två av dessa artiklar gick inte att läsa på grund av att Göteborgs Universitet inte prenumererade på dessa tidskrifter, så slutsumman artiklar var tolv stycken, varav sju amerikanska, två brittiska, och en vardera från Ungern, Cypern och Kanada.

3.2 Teman

Mitt övergripande fokus har varit att undersöka vad forskning menar att estetiska uttryck gör med skolmatematiken, och därefter i detalj undersöka återkommande mönster och teman. Jag har hållit mig på den explicita, beskrivande nivån, snarare än att tolka om det finns budskap bakom orden. Temana uppstår givetvis inte av sig själva utan forskaren har en aktiv roll, därför är det viktigt att skriva ut vilka val hen gör vad gäller metod för att få fram svar på de frågor hen ställer. Detta är syftet med det här kapitlet. Även den teoretiska utgångspunkten är viktigt att göra tydlig, eftersom den förutsätter olika saker om datan. (Se teorikapitlet). Temana som väljs ska fånga något specifikt i datan i förhållande till de forskningsfrågor som ställs. Vilken storlek ska ett tema ha för att vara relevant är en fråga som behöver ställas. Men det handlar inte bara om kvantitet utan forskaren måste bedöma sina teman på olika grunder (Braun & Clarke, 2006).

3.3 Arbetets faser

I mitt arbete har jag följt ett antal arbetsfaser så som de beskrivs av Braun och Clarke (2006), och redogör för dessa nedan:

Under fas 1) har fokus varit att lära känna min data, det vill säga den totala mängden insamlade artiklar. Detta har gjorts genom läsning och omläsning. Under denna fas ska

mönster och mening försöka hittas. Jag har antecknat under läsningen och samlat idéer inför den kommande kodningen.

Under fas 2) har jag påbörjat kodningen av datamaterialet. Koderna består av specifika drag i datamaterialet som jag tyckt varit intressanta för att de svarat på mina uppsatsfrågor. Här har jag använt mig av färgkodning för att göra en första uppdelning av teman. Dessa har jag sedan sorterat i olika högar. Braun och Clarke (2006) påpekar att det är viktigt att de data som plockas ut inte är kontextlösa, något som ofta kritiserats enligt dem. En viss textbit kan koda flera gånger om den passar in i flera koder. Det är också viktigt att inte osynliggöra de tillfällen som motsäger varandra i datamaterialet.

I fas 3) sorterades koderna under passande teman. Från början hade jag 13 olika teman men märkte att flera av dem kunde slås ihop till ett tema, och det slutade på 7 olika övergripande teman.

Under fas 4) lästes allt material igenom igen. Det ska finnas tydliga skillnader mellan teman och innehållet i varje tema ska vara logiskt och överensstämmande.

I fas 5) namngav och definierade jag mina teman. Här skriver Braun och Clarke att det är viktigt att inte bara parafrasera datamaterialet inom varje tema, utan förklara vad det innehåller och varför detta är av vikt för analysen. Varje tema behöver en skriftlig analys om vad den innehåller och hur det hänger samman med arbetet som helhet och de andra temana.

Under fas 6) skapades själva rapporten i sin helhet och den slutgiltiga analysen. Denna ska övertyga läsaren om att rapporten har validitet och ett värde. Analysen i sin tur måste vara mer än en analys av datamaterialet, utan ska även argumentera i relation till forskningsfrågorna (Braun & Clarke, 2006).

3.4 Dilemman och forskningsetiska frågor

Här måste jag fråga mig själv om jag på ett hederligt sätt läst och tolkat de texter jag tagit del av. Jag har gjort mitt bästa för att göra artikelförfattarna rättvisa genom att inte vantolka eller överdriva deras resultat.

En intressant sak som Braun och Clarke skriver om tematisk analys är dilemman att forskaren både är en del av det samhälle som analyseras och den som gör analysen. Om jag tänker på detta i förhållande till det examensarbete jag själv ska göra, där jag ska analysera vad matematikdidaktisk forskning ser för fördelar med att använda estetiska uttrycksformer, så kan jag konstatera ett antal saker. Jag är själv blivande mattelärare. Jag ska även bli bildlärare och har en kandidatexamen i kulturvetenskap – och har alltså på förhand en väldigt positiv syn på estetiska uttrycksformer. Min syn på matematik är mer tvetydig. Å ena sidan har jag aldrig haft särskilt svårt för ämnet, och har till och med kunnat uppskatta matematikens särprägel och hur mycket den avviker från de ämnen jag har en starkare dragning till, som språk och konst. Däremot har jag aldrig haft matematik som favoritämne.

3.5 Deskriptiv undersökning

Jag väljer att göra en deskriptiv snarare än en tolkande undersökning, just för att jag inte vill färgas för mycket av den syn jag på förhand har på min egen frågeställning. Jag vill också lära mig strategier för att använda estetiska uttrycks sätt i matematikundervisningen. Jag hoppas

hitta rapporter som tar upp negativa aspekter av att kombinera matematik och estetik, för på samma sätt som jag vet att många har svårt för matematik, så vet jag att många har svårt att uttrycka sig estetiskt, vilket skulle kunna öka deras svårigheter i matematik snarare än att underlätta dem. Och målet är att skapa en så bra matematikundervisning som möjligt. Braun och Clarke (2006) skriver att även vid en deskriptiv analys så måste materialet analyseras. De menar att frågor måste ställas som: vad betyder detta temat? Vilka förutfattade idéer bygger den på? Vilka förhållanden ligger bakom det? Vad säger helheten av temana oss?

3.6 Reliabilitet, validitet, generaliserbarhet

I fråga om reliabilitet är jag relativt säker att de teman jag hittat skulle hittas även om en annan person gjorde motsvarande studie. Detta för att de så tydligt besvarade frågan om vilken påverkan de estetiska uttrycken hade på matematikundervisningen. Däremot är det möjligt att en annan person skulle hitta ytterligare teman som jag varit blind för på grund av att jag är präglad av specifikt mina erfarenheter och tidigare studier.

För att skapa validitet har jag försökt vara så öppen som möjligt med min metod, teori och förutfattade idéer om ämnet som kan tänkas färga av sig på uppsatsen. Urvalet är baserat på de artiklar jag fick fram i min sökning och jag har inte valt bort någon i förmån för det resultat jag har förväntat mig.

Generaliserbarheten begränsas av att uppsatsen bygger på relativt få studier, även om jag tagit del av de jag funnit tillgängliga i min sökning.

4. Presentation av materialet

Nedan följer en presentation av de tolv artiklar jag har med i min undersökning. Jag går igenom bakgrundsfakta kring studierna och artiklarna samt vilken typ av estetiskt uttryck som använts.

Forskarna Krisztián, Ágota, Gombos och Vereczkei (2015) beskriver en ungersk studie vars syfte var att undersöka om spatial förmåga och sifferkompetens kan utvecklas genom att använda origami, det vill säga konsten att vika tredimensionella figurer av papper. Under 10 veckor fick en grupp på 13 elever i årskurs 5 och 6 med konstaterade matematiska svårigheter under 60 minuter öva origami utöver sina vanliga matematiklektioner. Det fanns också två kontrollgrupper som endast hade ordinarie matematiklektioner, en med tolv elever med matematiska svårigheter och en med tolv elever utan matematiska svårigheter. Under kursens gång genomfördes allt mer komplicerade origamiuppgifter, från att vika en enkel sköldpadda i början, till att vika en komplicerad blomma på slutet. Arbetet pågick utan tidspress och eleverna fick arbeta i sin individuella takt. Efter kursen testades experimentgruppen och de två kontrollgrupperna genom ett spatial förmåga-test, och ett test med 40 tal i de 4 räknesätten.

Den amerikanska forskaren Boakes (2009) beskriver ytterligare en studie med origami som fokus. Här undersöks vilken påverkan origami kan ha som undervisningsverktyg, och huruvida det kan öka den spatiala förmågan och geometriförståelsen. En grupp med 56 elever i årskurs 7 deltog i undersökningen, varav hälften bestod av en kontrollgrupp. Alla elever fick 80 minuters geometriinstruktioner per dag under en månad. Experimentgruppen fick 3 gånger i veckan 20 minuters origamilektion inom detta geometripass. Origamilektionerna gick till så att eleverna fick instruktioner för hur de skulle gå tillväga steg för steg, för att vika en specifik origamimodell, samtidigt som relevanta geometri-termer och koncept gick igenom. Efterhand blev origamifigurerna allt mer komplicerade. Ett förtest och ett eftertest genomfördes med tre separata spatiala test, ett med kortrotation, ett med pappersvikning och ett ytutvecklingstest.

Forskarna Elia, Gagatsis och Demetriou (2007) beskriver en studie från Cypern som undersöker hur tre olika typer av representation utöver rent verbal sådan används av elever vid additiv problemlösning. De tre typerna var dekorativa bilder, informativa bilder och bilder av tallinjen. 26 skolor deltog och sammanlagt 1447 elever från årskurs 1, 2 och 3. Testet som genomfördes bestod av tjugotal frågor med ett-steps-problem i addition eller subtraktion. Vissa tal hade bara text, andra hade en dekorativ bild, en informativ bild, eller en bild av tallinjen.

En kanadensisk studie riktad mot särbegåvade elever beskrivs av Gadanidis, Hughes & Cordy (2011). Öppna matematiska uppgifter blandades med olika estetiska uttrycksformer, bland annat musik, diktskrivning, bildskapande, drama, i kombination med ikt. Syftet med undersökningen var att undersöka elevernas syn på sin vanliga matematikundervisning, elevernas uppfattning av den undervisning de fick inom studien, och deras matematiska tänkande under denna. Målet var att främja kreativt tänkande i en matematisk kontext. Studien startades med att de 32 elever som deltog genomförde en matematikspäckad dag, som följdes av 6 veckors internetbaserade uppgifter och diskussioner, och avslutades med ännu en matematikspäckad dag. Anledningen att uppgifterna var just öppna var för att skapa möjligheter för eleverna att göra kopplingar mellan olika matematiska koncept och få uppleva komplexiteten i ämnet. Eleverna jobbade i grupper om fyra elever i varje. Data togs från

observationer, videoinspelningar, elevernas egna summeringar, inlägg i det aktuella internetforumet och gruppintervjuer.

Författaren Wilcox (2011) beskriver sex amerikanska lärares beskrivning av hur de använder skrivande som en del av matematikundervisningen. Skrivmetoderna som beskrivs är följande:

- Lärandeloggar - eleverna får under några minuter skriva om ett matematiskt område eller regel, exempelvis för att repetera något klassen tidigare gått igenom.
- Tänka-skriva-dela - en variant av lärandelogg där elevtexterna delas och revideras.
- Gemensamt skrivande.
- Skrivböcker för matematiska anteckningar.
- Matematiska noveller.
- Klassbok med matematiska koncept och fakta
- Gemensam matematisk alfabetbok skapad av eleverna med matematiskt vokabulär A-Ö.

Wilhelm, McMillan, Walters och Lovering (2006) beskriver ett ämnesintegrerat arbete i no, matte och engelska med fokus på att studera månens faser. 186 amerikanska elever i årskurs 7 deltog under 6-7 veckor. Först gjordes ett test på vad eleverna redan kunde om ämnet, därefter fick de under fem veckor föra en måndagbok där de uppmuntrades att använda sig av beskrivande språk, poesi och teckningar. Matematiskt fokus var det geometriska förhållande mellan jorden och de olika månfaserna. Efter arbetets slut gjordes ett eftertest.

Den amerikanska forskaren Anderson (2015) beskriver hur dans- och rörelseterapi (DMT), används för en grupp på 14 elever i årskurs 7 i matematikundervisningen. Eleverna i studien hade alla socioemotionella svårigheter och diagnoser, samt inlärnings- och koncentrationssvårigheter. Studien var fyra veckor lång och eleverna hade en timmes integrerad matematik- och danslektion varje dag under denna period. Före, under och efter varje matematiklektion genomfördes en trestegsrörelsessekvens med syfte att stödja tankeorganisering, grovmotorik och självregulering av känslor. Matematikfokuset var vikt, grundläggande multiplikationsfärdighet, och att kunna räkna ut area av olika former. Studiens data bestod av videofilmer, observationer, intervjuer, elevers arbetsblad och resultat på matematiska tester.

Den brittiska forskaren Anne Watson (2005) beskriver också hur lärare kan använda dans för att lära ut spatiala, rytmiska, strukturella och symboliska aspekter av matematik. Artikeln är teoretisk och bygger på egna och andra lärares erfarenheter av att använda dans i matematikundervisning.

Författaren K. Nolan (2009) berättar i artikeln om sin bok *Musi-Matics: Music and Arts Integrated Math Enrichment Lessons*. Nolan arbetar på University of Arizona och undervisar bland annat i musik för grundskolan med fokus på att integrera musik i andra ämnen, bland annat matematik.

Författarna Mitchell, Whitin och Whitin (2012) beskriver hur lärare kan använda sig av lapptäcken från Gee's Bend som utgångspunkt för att lära ut bild, matematik, språk och amerikansk historia till elever i åk 4-8. De specifika lapptäckena kommer från det afroamerikanska samhället Gee's Bend i Alabama i USA, där kvinnor för över 100 år sedan började skapa lapptäcken av uttjänta kläder och mjölsäckar från början för att hålla sina familjer varma och som senare utvecklades till en försörjningskälla. Med dessa lapptäcken som utgångspunkt presenteras sedan sätt att arbeta med bild, matematik, språk och

historia. Matematikdelen handlar om att höja elevernas medvetenhet av mönster och former. Först analyseras ett lapptäckes mönster och former och vad de kan representera i den verkliga världen och olika geometriska figurer. Därefter får eleverna söka efter liknande former i sin närmiljö, fota två mönster och experimentera med att sätta ihop dessa på olika sätt genom att vända och vrida på dem.

Bintz och Delano Moore (2002) beskriver hur litteratur lämpar sig för att användas i matematikundervisning. Författarna är lärarutbildare, en inriktad på matematik och en på läs- och skrivkunnighet. De arbetar med att hålla workshops i sätt att använda litteratur för att stödja matematiskt tänkande för elever i åk 4-8 (am. middle school). Syftet med artikeln är uppdelat i 4 delar: att definiera läs och skrivkunnighetsstandard, dela med sig av litteratur med potential att lära ut matematik, beskriva litteratur som fokuserar på olika aspekter av geometri och mätning, och slutligen diskutera vilken potential den här litteraturen har för att variera matematikundervisning.

Fleming, Merrell och Tymn (2004) har skrivit en artikel som skiljer sig från övriga artiklar eftersom den beskriver en studie från England där matematikundervisning inte blandades med estetiska uttryck, utan istället undersökte vilken påverkan drama hade på elevers attityd och resultat i matematik, läsande, skrivande och självbild. Två skolor ingick i studien som var treårigt och kallades "Transformation" och dessa skolor matchades mot två kontrollskolor från samma område och med elever med liknande hemförhållande. Under dessa tre år fick eleverna regelbundet delta i dramaworkshops.

För en bättre överblick över materialet, se bilaga 1 där de presenteras schematiskt.

5. Resultatredovisning och analys

Jag kommer här redovisa de olika teman jag utläst ur mitt material. Temana kommer hanteras i storleksordning, där det minst förekommande temat i mitt datamaterial redovisas först, och det mest omfattande sist.

5.1 Kreativ matematik

Det tema som hade minst utrymme i texterna (3 av 12) gavs desto större utrymme i de studier där det förekom. Jag har benämnt det "Kreativ matematik", och det innehåller vissa begrepp som jag ser som betydelsefulla; *kreativitet*, *lekfullhet*, *övertäckning* och *fantasi*.

"Immersing students in mathematics, in a deep way, is naturally a creative, imaginative experience that is artistic in nature" (Gadanidis et al., 2011, s. 424). Nolan (2009) beskriver också kreativitet som en viktig ingrediens vid lärandet av matematik.

I Ungern menar Krisztián et al. (2015) att matematiska svårigheter ofta börjar märkas på allvar i årskurs 5 och 6. De speciallärare som tar sig an de här eleverna använder sig av ett mer *lekfullt* sätt att lära sig matematik, men också av mer skiftande metoder för undervisning än vad som är vanligt i matematikklassrummet.

Eleverna i Gadanidis et al.'s studie *övertäckades* av konstdelen i programmet, och var positiva till den. Som en av eleverna säger: "the art twist was cool" (2011, s. 424). Just övertäckningsmoment som uppmuntrar eleverna att använda sin *fantasi* inte är vanligt inom matematikundervisning menar författarna. Eleverna i projektet benämnde inte matematik som något favoritämne, trots att de alltså var särskilt begåvade inom just matematik. De menade att de såg matte som mindre fritt än exempelvis drama och språkliga aktiviteter. Inom dessa menade de att de fick jobba mer projektbaserat, vilket de föredrog. Ett sätt som användes inom studien för att skapa en känsla av slumpmässighet var att låta eleverna använda en tärning och slå fram olika siffror, som sedan blev det första talet i en ekvation med summan 10. Slumpmässigheten i sin tur skapade desto större matematisk *övertäckning* kopplat till de mönster de upptäckte när de sedan ritade grafer av ekvationerna.

Andra estetiska uttryck som användes var poesi. Genom att skriva dikter så uttryckte eleverna sina matematiska idéer genom en konst-lins, för att väcka deras *fantasi* och få dem att se matematiska samband. En elev reflekterar över detta: "I really needed to use my imagination and personal theories to answer some of the questions." (Gadanidis et al., 2011, s. 419).

Ju längre in i projektet de kom så märktes det att eleverna förstod att fokus var på att undersöka matematiska koncept och relationer och se matematik på ett *fantasirikt* sätt skriver Gadanidis et al. (2011). Detta fick dem att efter hand engagera sig djupare och mer *kreativt* i matematiska idéer. Detta märktes i de dikter de skrev om parallella linjer, och i hur de undersökte och skapade grafer av komplexa ekvationer.

5.2 Negativa effekter av att använda estetiska uttryck i matematikundervisningen.

Ett tema som inte heller tog mycket utrymme i materialet men som ändå nämndes i 3 av 12 studier var de negativa effekter som kan uppstå vid användandet av estetiska uttryck i matematikundervisningen. Temat handlade om *distraktion*, *oförändrade matematikresultat* och *sämre matematikresultat*.

Watson (2005) som skriver om dansens potential inom matematikundervisningen väljer att trots allt varna för hur dansen tvärtom kan *distrahera* om den inte integreras på ett naturligt sätt i matematikundervisningen: “However, such activities can also be a distraction from mathematics if they are not integrated into the learners’ overall mathematical experience. At worst, students only remember the dancing (s. 22).

När det gäller dekorativa bilder i matematikundervisningen ser Elia et al. (2007) *ingen ökad förståelse/resultat* i de matematiska som innehöll en dekorativ bild, eleverna tycktes mest fokusera på den skrivna texten.

Origamiinstruktionerna tycktes enligt Boakes (2009) hjälpa de elever som kodats som pojkar medan de som kodats som flickor faktiskt *gjorde sämre ifrån sig* på eftertestet än förtestet innan origamilektionerna. Forskning har pekat på att flickor lättare ifrågasätter sitt arbete vilket kan förklara det *sämre resultatet*. Elia et al. (2007) skriver att i deras studie klarade eleverna de uppgifter sämre där det fanns en informativ bild till texten som krävdes för att kunna lösa uppgiften. Detta berodde enligt forskarna på att dessa bilder krävde mer tankeverksamhet.

5.3 Alternativa uttryckssätt

I mitt undersökta material har jag hittat fem alternativa sätt att uttrycka sig genom de estetiska uttrycken, vars funktion har varit att: *representera/symbolisera, transformera, organisera och dokumentera*. Detta tas upp i 4 av de 12 texterna.

Elia et al. (2007) skriver att visuella *representationer* är viktiga för de stödjer reflektion och därför enligt forskning en hjälp för lärandet. Watson (2005) beskriver det *symboliska* värdet i dans på följande sätt: “In school, learners can create movements, invent ways to encode the movements, and use these codes to convey knowledge to others. Through trying to do this they can develop an understanding of the need for symbolisation and how it can encapsulate complex situations — a mathematical understanding” (s. 21). Hen menar att abstrakta *representationer* av olika strukturer, exempelvis permutationer, grafer och olika kombinationer uttrycks i många traditionella danser och hen exemplifierar med engelska och keltiska folkdanser och den amerikanska dansen square dance. Bintz och Delano Moore (2002) tar det hela ett steg längre när de skriver att läsande faktiskt *är* matematik. “The reading does not just introduce the mathematics, the reading is the mathematics. That is, reading functions as a tool to learn mathematics by exploring text potentials” (s. 28).

Wilcox och Monroe (2011) skriver att lärande loggböcker med elevens egna exempel på kopplingar hjälper eleverna att skapa en matematisk förståelse eftersom det får dem att *transformera* information, till konstruktioner av betydelse, snarare än att bara memorisera fakta. Formatet “klassbok” ger eleverna en möjlighet att skapa och använda *representationer* för att *organisera*, kommunicera och *dokumentera* matematiska idéer.

5.4 Kommunicera matematik

Det fjärde temat handlar om att kunna kommunicera matematik genom estetiska uttryck. Detta skriver 6 av 12 studier om. Att ha en *publik, instruera*, lära sig ett *matematiskt*

vokabulär, introducera nya matematiska koncept, *diskutera* matematik, *lära av varandra* och i stort *kommunicera* matematik är de underteman som ryms här.

Gemensamt skrivna matematiska klassböckerna ger en känsla av att ha en *publik* skriver Wilcox och Monroe (2011), och menar att detta i sig ökar motivationen att lära matematik för eleverna.

Boakes (2009) skriver att origami kan vara ett effektivt verktyg för att ge *instruktioner* i. Bintz och Delano Moore (2002) som skriver om att använda sig av skönlitteratur med matematiskt innehåll använder också detta som ett verktyg för att ge instruktioner och skriver så här om detta: "A perennial challenge to middle school teachers is the fact that "one size fits all" instruction is not effective. Students come to mathematics classes perhaps grouped by skill in computation and/or algebra, but still range widely in their reading ability and knowledge of geometry & measurement. Differentiated instruction is the practice of creating related learning experiences in which students can be taught content matched to their instructional level" (s. 30-31).

Att skriva Alfabetböcker är också användbart för utvecklande av ett *matematikvokabulär*, skriver Wilcox och Monroe (2011). Lärandeloggar menar de är bra för att *introducera* en lektion eller avsluta den men deras erfarenhet är även att kvalitén på de matematiska *diskussionerna* under lektionerna blev bättre när eleverna förväntades skriva. Forskarna i studien av Gadanidis et al. (2011) märkte när de lyssnade till just *diskussioner* som eleverna hade i sina grupper, att de använde fraser från de sånger de tidigare sjungit ihop. I de onlinediskussioner som eleverna hade så märktes det också att de poster som hade något visuellt element i form av tex en teckning, fick fler kommentarer än de utan.

Det finns också flera exempel på när eleverna lär av varandra i samband med estetiskt skapande. När eleverna delade med sig av en lärandelogg som var tydlig och förklarade ett fenomen på ett bra sätt, så *gav detta de andra eleverna ett exempel att följa och använda sig av*. En annan skrivmetod kallar de "tänka-skriva-dela med sig". Detta sätt att arbeta gjorde att läraren kunde fånga upp missuppfattningar. Elever på olika nivå av förståelse fick *dela med sig* av sina uppfattningar om ett visst matematiskt område, och när ett flertal svar kommit fram fick eleverna skriva igen och revidera det de skrivit från början för att visa på sin ökade förståelse för konceptet ifråga (Wilcox & Monroe, 2011). I ett tidigare nämnt citat från Watsons (2005) så beskriver det just hur kunskap kan *förmedlas till andra* genom kodade rörelser. Eftersom de matematiska idéerna konstruerades genom gruppaktiviteten att skriva tillsammans i studien som Wilcox och Monroe (2011) skriver om, så *hjälper eleverna varandra att kommunicera* matematik.

Just kommunicerandet av matematik förekommer många gånger i materialet. Formatet "klassbok" ger eleverna, som nämndes i förra temat en möjlighet att *kommunicera* matematiska idéer med hjälp av ord, bilder och symboler (Wilcox & Monroe, 2011). Gadanidis et al.(2011) skriver att bilder har en förmåga att *kommunicera* idéer bara genom att ses, och att eleverna gärna använde sig av teckningar för att *kommunicera* sitt sätt att tänka till de andra. Även Elia et al. (2007) menar att visuella representationer är viktiga verktyg för att *kommunicera* matematiska idéer och därför enligt forskning en hjälp för lärandet.

5.5 Matematisk förståelse på djupet

Det femte temat handlar om att verkligen förstå matematik, genom och av estetiska uttryck och processer. Detta temat förekom i 7 av 12 artiklar och handlar om konceptuell förståelse, *reflektion* och *analys*, *eget ansvar* och *lära genom kroppen och omvärlden*,

Den ursprungliga matematiska kunskapen hos eleverna i studien av Gadanidis et al. (2011) tenderade att vara procedurrell snarare än konceptuell, men ju längre eleverna fått arbeta på det nya konstbaserade sättet desto mer anpassade de sig till det mer utmanande sättet att lära matematik och visade även uppskattning för detta sätt att ta sig an matematik. Det märktes efterhand att eleverna förstod att fokus var på att undersöka matematiska *koncept* och relationer och se matematik på ett fantasirikt sätt. Detta fick dem att efter hand engagera sig djupare och mer kreativt i matematiska idéer. Detta märktes i de dikter de skrev om parallella linjer, i hur de undersökte och skapade grafer av komplexa ekvationer. Elevvärdering av undervisningen pekade på att de handfasta aktiviteterna hjälpte dem att *tänka igenom* olika idéer.

Djup förståelse kräver *reflektion* och *analys*. “Arts integration generally is defined as the linking of a content area and an art form to reach a deeper level of engagement, learning, and reflection than without the art form (Anderson, 2015, s. 232). Elever beskrivna av Gadanidis et al. (2011) påtalade just detta att de behövde använda *egna teorier* för att kunna besvara frågor. Dessa kommentarer gjordes vanligen i en kontext där eleverna utvecklade multipla sätt att se ett koncept eller där de drog för dem *nya kopplingar mellan olika matematiska idéer*. Wilcox och Monroe (2011) menar att när eleverna skriver en lärande loggbok med sina egna exempel på kopplingar hjälper detta eleverna att skapa en matematisk förståelse eftersom det får dem att transformera information, till *konstruktioner av betydelse*, snarare än att bara memorisera fakta. I studien med lapptechnik av Mitchell et al. (2012) uppmuntrades eleverna att undersöka de geometriska koncepten *på djupet* och göra *genomtänkta* visuella och verbala *förklaringar*.

I skrivövningen av sorten tänka-skriva-dela med sig fick eleverna skriva igen och revidera det de skrivit från början för att visa på sin ökade förståelse för konceptet ifråga. En effekt av detta menar Wilcox och Monroe (2011) är att eleverna lär sig att *ta ansvar* för sin matematiska förståelse. Även Gadanidis et al. (2011) skriver att eleverna uttryckte uppskattning av att få möjlighet att *själva ha kontroll* över de matematiska riktningar de undersökte.

Watson (2005) skriver att klassiska rytmer kan fungera som ett sätt att utveckla en känsla för bråk och skriver såhär om dans: “The added feature of dance can be used to show students that they know these relationships already through their movement, through their beating out of rhythms, so that fractions express what their bodies can already do” (s. 20). Hen menar också att: “All a teacher is doing when introducing movement to explore shape, or number, or graphs, is making overt use of what is already around in the way students experience the world.” (s 19). “Any part of the body can trace out a circle and feel its centre, the constancy of its radius, and the plane in which it lies.” (s. 18).

En elev beskriven av Wilcox och Monroe (2011) lär sig förstå positiva och negativa tal med hjälp av ett piano: “It is weird that -2 is greater than -5 .” Studenten gjorde sin *egen jämförelse*: “It is like a piano, lower to higher with middle C. Smaller to larger with zero. Zero and C aren’t small, big, high, or low” (s. 525).

Att ta del av eller skapa visuella representationer är viktiga för att stödja *reflektion* enligt Elia et al. (2007). Origami förstärker som tidigare nämnts den *spatiala förmågan* (Krisztián et al., 2015).

5.6 En vilja och förmåga att ”vara i” matematiken

9 av 12 texter skriver om viljan och förmågan att vara *i* matematiken. Med det menar jag *engagemang, entusiasm, motivation, och förmåga till fokus*.

Att under några minuter skriva i en lärandelogg hjälper eleverna att *fokusera* på matematik skriver Wilcox och Monroe (2011). Anderson (2015) uttrycker det såhär: “The importance of this influential relationship between mind and body has been supported by evidence of a neurodevelopmental connection between physical and mental activity, in which increased physical activity supports mental alertness (s. 231). Hen skriver att eleverna var mer *fokuserade* och visade större uppmärksamhet och koncentration under de matematiska delarna av lektionerna än lektioner utan dans och rörelse. Nolan (2009) beskriver ett av målen med musikmatematiska lektioner såhär: “for a few moments — have students forget they are learning and just be in the moment of the activities.” (s. 20).

Watson (2005) som också skriver om dans i kombination med matematikundervisning ser en möjlighet till större *engagemang* hos eleverna i matematiklärandet vid användandet av dans, men skriver också att det kräver vissa saker av undervisningen:

In order for such experiences to have more than novelty and motivational value, they need to relate closely to classrooms in terms of what it means to do mathematics. Students need to be able to pick up and use some of the ideas presented in novel contexts in their normal lessons, as habit. Innovation, at its best, makes a difference to how learners think in all their experiences of mathematics, not just in the innovative context. Dance as a mode of revealing and enhancing learners’ abilities to do some of the things that are useful in mathematics, and that might lead to a deeper understanding of how to engage in learning. (s. 22).

Just *engagemang* är något Anderson (2015) skriver om. Både observationer och uppföljande intervjuer indikerade ett ökande deltagande och engagemang hos eleverna. Även de matematiska resultaten blev bättre. Anderson menar att när elevernas attityder blir mer positiva till undervisningen i matematik så hjälpte detta dem att nå lärandemålen.

Bintz och Delano Moore (2002) skriver: “we offer this model as a way of organizing texts about related mathematical ideas so that teachers can use literature to make mathematics more engaging and relevant to their students who come to mathematics classrooms with diverse backgrounds” (s. 30).

Entusiasm och motivation ska inte underskattas när det gäller undervisning. Origami skriver Krisztián et al. (2015) ökar *motivationen* hos eleverna. Fleming et al. (2004) beskriver att eleverna som ingick i dramaprojektet fick signifikant mer *positiv attityd* mot ämnet matematik än kontrollgruppen. De fick också en mer positiv självbild vilket tillsammans med attitydförändringen tros vara anledningen till högre prestationer i skolan. Enligt Gadannis et al. (2011) svarar en elev såhär vid en utvärdering av undervisningen: ”I was learning and having fun at the same time!” (s. 416). Boakes (2009) får sammanfatta det hela: “Students

responded in an overwhelmingly positive manner with words like “fun”, “helpful”, “enjoyable”, and “awesome”. How often do students respond like this to math instruction?” (s. 8).

5.7 Matematiska förmågor

Det sista temat handlar om matematiska förmågor. I 9 av 12 studier beskriver författarna olika matematiska områden och förmågor som med fördel kan läras ut med estetiska uttryck. Här finns ett tydligt mönster där *geometrikunskap* kommer på en första plats, följt av *aritmetisk förmåga*, *algebraisk förmåga* och det mer abstrakta fenomenet *matematiskt tänkande*.

Inom geometri finns en rad olika förmågor och kunskapsdelar. Musikmatematiska lektioner kan tex användas för att lära ut jämförelse och uppskattning skriver Nolan (2009). Origami förstärker den *spatiala förmågan* skriver Krisztián et al. (2015). Även Anderson (2015) pekar på spatial förmåga som något som kan utvecklas genom att göra olika rörelser. *Geometriska former* lärdes ut i Wilhelm et al. (2006) genom studien om månens olika faser. Mitchell (2012) lär med hjälp av arbete med lapptäcken och lapptechnik ut *geometriska transformationer* som *rotationer*, *förflyttningar* och *vändningar* av olika *former*. *Area*, *omkrets*, *figurer* och *mätenheter* lärs ut i studien av Bintz et al. (2002) med hjälp av skönlitteratur. Anderson (2015) lär ut *areaberäkning* och *mätning* men också grundläggande *multiplikation*. I förtesten hade eleverna ett snitt på 15% rätt, efter dansmatematiklektionerna gjordes testen om och eleverna snittade nu på 85% rätt. I undersökningen av Boakes (2009) fick eleverna frågan till vilken grad de upplevde att origamilektionerna hjälpte dem att förstå geometri och en Likert-skala 1-5 användes (1=håller inte alls med, 5= håller verkligen med). Elevernas svar snittade på 4,36, vilket måste anses vara väldigt högt.

Nolan (2009) genomför i sina matematiklektioner additiv träning. Krisztián et al. (2015) testade *sifferförmågor* och *aritmetiska förmågor* innan och efter origamilektionerna. Sifferförmågan förbättrades tydligt i gruppen som genomförde experimentet medan de två kontrollgrupperna låg kvar på samma nivå som före de 10 veckorna. Experimentgruppen kom till och med nära den kontrollgrupp som bestod av elever utan matematiska svårigheter i resultat efter de 10 veckorna. De aritmetiska förmågorna hade också förbättrats men kom inte upp i nivå med kontrollgruppen utan matematiska svårigheter.

Algebraiska förmågor som mönster och talföljd beskrivs av Nolan (2009) som något musikmatematiska lektioner kan användas till att lära ut.

När det gäller de mer abstrakta förmågorna som *matematiskt* och *logiskt tänkande* menar Anderson 2015) att dans och rörelser har visat påverka i en positiv riktning. “A quality of movement—for example, Light or Strong—can be used to describe the effort involved when a performer approaches an element of movement, such as Weight.” (s. 233). När eleverna skrev och skrev om hjälpte det dem att utveckla sitt *matematiska tänkande* påstår Wilcox och Monroe (2011). Gadanidis et al. (2011) skriver att även om eleverna var engagerade och skapade matematiskt intressanta dikter och sketcher så fanns det utrymme för dem att växa inom området. De menar att att börja tänka konstnärligt kring ett ämne som en tidigare sett bestå av rätt och fel, svart och vitt kräver övning och erfarenhet av den mer *luddiga delen* av matematiken. De skriver att matematik per definition är *komplex* och *mångbottnat*.

6. Diskussion

Att sjunga om matematik, lyssna på matematiska sånger och berättelser, skriva dikter, berättelser och beskrivningar av matematik. Att vika origamifigurer och lära sig matematik, rita grafer och visuella förklaringar, dansa matematiskt, dramatisera matematik, förstå lapptechnik och därmed lära sig matematik - vad gör det med skolmatematiken?

Till att börja med blir det svårt att fortsätta kritisera matematik för att vara tråkig, men vad händer mer?

Syftet med den här uppsatsen har varit att undersöka vad forskning, som behandlar användandet av estetiska uttryck i matematikundervisningen, menar att estetiska uttryck gör med skolmatematiken. Vilken funktion har användandet av estetiska uttryck och processer i matematikundervisningen?

6.1 Resultatdiskussion

Svaren som jag hittat i mitt granskade material visar att det finns potentiellt negativa effekter, som jag kommer återkomma till, men utöver detta tycks matematisk undervisning med hjälp av estetiska uttryck enligt artiklarna bli mer kreativ och lekfull, skapa alternativa sätt att uttrycka och förklara matematik på, främja diskussion och gemensamt lärande, skapa engagemang, fokus, och matematisk förståelse på djupet. Den kreativa matematiken innehåller fantasi, lek och överraskning. Den kreativa och fantasifulla beskrivs som hjälpsamt eftersom matematiken i sig har dessa kvaliteter. Kreativitet och lärande hänger ihop. Lekfullheten för tankarna till Gadamer's syn på konsten som just lek och fest, men samtidigt en arbetsprocess. I det lekfulla finns utrymme både att stimulera elever med matematiska svårigheter, och elever som är särbegåvade. Variationen i sig tycks vara ett nyckelord. Med hjälp av fantasin tar sig eleverna djupare in i matematiken. Som Pramling Samuelsson (2011) skriver så tycks texterna visa att lek, lärande och estetik hör ihop. Det för också tankarna till Montessori för vilken lek och arbete var synonymt, och där det viktiga var att tillvarata barnens lust till aktivitet. När barnen leker och experimenterar med det pedagogiska materialet lär det sig samtidigt olika färdigheter (Svenska Montessoriförbundet, 2017-05-09). I matematikundervisning för de allra yngsta är det vanligt med en kreativ och lekfull matematikundervisning, kanske borde detta följa med upp i åldrarna i matematikundervisningen?

Ett annat tema som dök upp i materialet var de alternativa sätten att uttrycka sig genom de estetiska uttrycken. Det estetiska kan hjälpa till att representera och symbolisera matematiska koncept. Detta stödjer reflektionen och kan förmedla kunskap menade författarna. Dans kan uttrycka matematiska idéer och läsande kan *vara* matematik. Att med egenskrivna ord, bilder eller rörelser förstå det matematiken försöker berätta, istället för att bara memorera formler eller multiplikationstabellen. Dessa idéer stöds av det Marner och Örtegren (2003) skriver om det vidgade textbegreppet. Inte endast det verbala språket förmedlar kunskap, och olika uttryck fungerar för olika typer av lärande, vilket i sin tur gagnar våra olika elever.

Kommunikation av matematik är ytterligare ett tema. Estetiska uttryck menar nära hälften av författarna i de artiklar jag studerat kan hjälpa elever att ta till sig ett matematiskt vokabulär med viktiga begrepp, det kan fungera som stöd vid matematiska instruktioner, introducera nya begrepp, underlätta diskussion elever emellan så de kan lära av varandra, men också erbjuda en publik till det estetiskt skapade. Enligt Gadamer är ju konstverket en arbetsprocess med en publik som mål. Publik beskrivs som motivation till lärande i temat (Bale, 2010). Pramling

Samuelsson (2011) skriver som nämnts att det sker ett naturligt metasamtal i det lekfulla och estetiska, och Dewey beskriver konsten som ett samspel med omvärlden som innehåller både ett deltagande och en kommunikation. När eleverna skriver om det matematiska de lär blir diskussionerna bättre menar en författare. En annan tar upp att sånger med matematiskt innehåll som eleverna fick sjunga gav fraser de sedan använde sig av när de diskuterade de matematiska koncepten. Teckningar väckte intresse i diskussioner. Framförallt pekar temat på de tillfällen då de estetiska uttrycken hjälper eleverna att lära av varandra. Genom att skriva och dela med klasskamraterna, genom kodade rörelser i dans, genom bilder som kommunicerar idéer utan behov av ett verbalt språk.

Ett stort tema handlar om att vilja vara i matematiken, men också om förmågan till detta. Engagemang, motivation och entusiasm behövs för att vilja lära sig matematik, men också en förmåga att fokusera på ämnet. Kopplingen mellan hjärnan och kroppen beskrivs som viktig för att skapa fokus, något som gäller alla men speciellt för de elever som har koncentrationsproblem. Att vara så uppslukad i det skapande nuet att eleverna glömmar att de lär ses också som en teknik till lärande, likt Deweys definition av målet med konst: att ha en så rik upplevelse som möjligt. Det ges flera exempel på förbättrade resultat i matematik vid användandet av olika estetiska uttryck, eleverna får en mer positiv attityd till ämnet, och entusiasm och motivationen ökar. Gadamer beskriver enligt Bale (2010) fascination och glädje som viktiga aspekter av konsten, och att faktiskt ha roligt när en lär matematik tycks vara en viktig ingrediens till ökat lärande.

Av de specifika matematiska förmågor som eleverna lärde sig hade geometri ett stort fokus, men aritmetisk förmåga, algebraisk förmåga och det mer abstrakta fenomenet matematiskt tänkande fanns också med. Framförallt beskrevs skrivande, origami, litteratur och dans ha stor påverkan på lärandet av detta.

Att använda estetiska uttryck som verktyg i matematikundervisningen är dock inte per definition ett framgångsrecept. Artiklarna tar upp risker som distraktion från det matematiska innehållet. Detta tillsammans med ovana och eventuell prestationsångest kan tvärtom försämra resultaten i matematik. Informativa bilder kan ha en negativ effekt just för att det kräver av eleven att tänka på ett nytt och mer komplext sätt.

Intressant nog finns det ju också en artikel som tar upp just denna komplexitet som en positiv sak. När det gäller matematisk förståelse på djupet beskrivs detta ske genom konceptuell förståelse, reflektion och analys, eget ansvar och genom att lära med kroppen och omvärlden som verktyg. Eleverna i studien med matematiskt särbegåvade hade trots detta en procedurell snarare än konceptuell matematisk kunskap men kunde genom de kreativa estetiska uttrycken fördjupa sig i matematikens koncept och komplexitet. I en annan studie hjälpte skrivande eleverna att transformera information till konstruktioner av betydelse, och i studien med lapptechnik uppmuntrades eleverna att undersöka de geometriska koncepten på djupet och göra genomtänkta visuella och verbala förklaringar. Likt (Bale, 2010) beskriver Deweys pedagogiska syn tycks dessa studier se de estetiska uttrycken inneha både praktiska, emotionella och intellektuella kvaliteter. Det egna ansvaret som ges eleverna när de får skapa själva i matematiken snarare än att plöja färdigformulerade matematiktal i en bok sammanfaller med hur Bale beskriver Gadamer's konstupplevelse som bland annat innebär en frihet för skaparen. Matematiken finns inte bara i matematikboken och när eleverna upptäcker att det finns matematik i en rörelse, i en snillrikt vikt pappersfigur eller i en rytm, så tycks detta fördjupa den matematiska förståelsen. Den estetiska läroprocessen tycks som Lindstrand

och Selander (2009) skriver tillför något till världen som inte fanns där innan, och har förmågan att förändra vår syn på vår verklighet.

6.2 Metoddiskussion

Att använda en litteraturstudie och tematisk analys för att förstå vad estetiska uttryck har för potentiell påverkan på matematikundervisning i grundskolan upplever jag ha fungerat väl. Dock hade det varit intressant om det funnits tid att göra bredare sökning i flera databaser och på så sätt fått tillgång till fler studier. Avgränsningen har varit nödvändiga för uppsatsens omfång och tidsbegränsning, men en sökning som sträckte sig över mer än de senaste 17 åren hade naturligtvis breddat och fördjupat analysen av ämnet.

6.3 Avslutande diskussion och förslag på vidare forskning

Avslutningsvis: matematikundervisning har begränsats i utformande genom att det historiskt varit ett sorteringsämne som byggt på skriftliga prestationsmätningar och färdighetsträning. Den kritik som riktats mot matematikundervisningen i Sverige har sett ett behov att komma närmare den vetenskapliga matematiken, till exempel matematikens mångfacetterade natur. Det har också funnits en kritik av hur undervisningen i skolorna gått till. Dessa teorier har på många sätt satt sig i opposition till den praktik som funnits i skolan. Idéer som att elever behöver lära genom sinnliga konkreta aktiviteter, samt ha ett eget intresse för lärandet är här i fokus. En estetisk läroprocess tillför en ny förståelse av världen som inte fanns för personen tidigare. Estetiska läroprocesser skapar ökade möjligheter till olika typer av lärande där förmedling av information och kunskap inte bara sker genom språket, men också genom kroppen, bilder, ljud och så vidare. Det är naturligt för barn att vilja uttrycka sig estetiskt, och skapande tillsammans genererar situationer där eleverna utmanar, inspirerar och kritiserar varandra, och föder ett naturligt metasamtal kring det som lärs. Ur ett kritiskt realistiskt synsätt finns en paradox där matematik och matematikundervisning är socialt skapade produkter samtidigt som den faktiska världen består av fenomen som kan sägas ha matematiska samband och mönster i sig själva. Här finns en ingång till ett estetiskt fokus på det konkreta och sinnligt upplevda. De strukturer som finns i matematikundervisning skapar och omskapar ett visst lärande, och estetiska läroprocesser i matematikundervisningen har möjlighet att skapa en annan sorts matematiskt lärande, som kan förbättra den matematiska kunskapen hos eleverna.

Matematikundervisning är skapad av oss utifrån vissa historiska betingelser, ämnets funktion, skolans organisering, syn på matematiken med mera, men jag menar att denna undervisning missat en hel del av matematikens inneboende egenskaper, och därför inte lever upp till sitt fulla potential, och att estetiska uttryck och processer i matematikundervisningen har en möjlighet att uppmärksamma delar av matematiken som varit förbisedda. Parallellt med Mattelyftet kanske det vore värt att damma av 60-talets idé om "den nya matematiken". Den som ville komma närmare den vetenskapliga matematiken och inspirerades av John Dewey, Maria Montessori och Jean Piagets teorier kring barn och pedagogik. Idéer som att elever behöver lära genom sinnliga konkreta aktiviteter, samt ha ett eget intresse för att lärandet ska kunna växa fram.

Förslag på framtida forskning i ämnet är studier som konkret undersöker hur matematik kan läras ut med olika estetiska uttryck, för att hitta vilket estetiskt uttryck som lämpar sig bäst med vilket matematiskt område. Det hade också varit intressant med ett undervisningsmaterial baserat på en sådan studie.

7. Referenser

7.1 Datamängden

Anderson, A. (2015). Dance/Movement Therapy's Influence on Adolescents' Mathematics, Social-Emotional, and Dance Skills. *The Educational Forum*. 79(3), 230-247.

Bintz, W., Delano Moore, S. (2002). Using Literature to Support Mathematical Thinking in Middle School. *Middle School Journal*. Vol. 34(2). s.25-32. doi: 10.1080/00940771.2002.11495350

Boakes, N. (2009). Origami instruction in the Middle School Mathematics Classroom: Its Impact on Spatial Visualization and Geometry Knowledge of Students. *Research in Middle Level Education Online*. vol. 32(7), s 1-12.

Elia, I., Gagatsis, A., Demetriou, A. (2007). The effects of different modes of representation on the solution of one-step additive problems. *Learning & Instruction*. Vol. 7(6), s 658-672. doi: 10.1016/j.learninstruc.2007.09.011.

Fleming, M., Merrell, C., Tymms, P. (2004). The impact of drama on pupils' language, mathematics, and attitude in two primary schools. *Research in Drama Education*. vol. 9(2), s. 177-197. doi:10.1080/1356978042000255067.

Gadanidis, G., Hughes, J., Cordy, M. (2011). Mathematics for Gifted Students in an Arts- and Technology-Rich Setting. *Journal for the Education of the Gifted*. vol. 34(3) s. 397-433.

Krisztián, A., Ágota, B., Gombos, H., Vereczkei, L. (2015). Developing Numerical Ability in Children with Mathematical Difficulties Using Origami. *Perceptual & Motor Skills*. vol. 121(1), s. 233-243. doi:10.2466/24.10.PMS.121c16x1.

Mitchell, R., Whitin, P., Whitin, D. (2012) Interdisciplinary Invitations: exploring Gee's Bend Quilts. *Art Education*. vol. 65(1). s 25-32

Nolan, K. (2009). Musi-Matics! Coining a Phrase that Links the Arts with Math Instruction. *Music Educators Journal*. vol. 95(3), s.19-20

Watson, A. (2005). Dance and mathematics: Engaging senses in learning. *Australian Senior Mathematics Journal*. vol. 19(1). s. 16-23

Wilcox, B., Monroe, E. (2011) Integrating Writing and Mathematics. *Reading Teacher*. vol. 64 (7), s. 521-529. doi: 10.1598/RT.64.7.6.

Wilhelm, J., McMillan, S., Walters, K., Lovering, E. (2006). Phasing in lunar observations. *Science Scope*. vol 29(6). s 64-66

7.2 Övrig litteratur

Archer, M. (1998). Introduction: Realism in the social sciences . In M. Archer, R. Bhaskar, A. Collier, T. Lawson, A. Norrie (red.), *Critical Realism. Essential Readings* (s.189-205). London, New York: Routledge

Bale, K. (2010). *Estetik - En introduktion*. Göteborg: Bokförlaget Daidalos

Bansilal, S. (2010). How much freedom does a teacher have in designing a learning event when adhering to assessment prescription? *Education as Change. vol. 14*(1), s. 77-90. doi: 10.1080/16823206.2010.494339.

Bhaskar, R. (1998a). General Introduction. In M. Archer, R. Bhaskar, A. Collier, T. Lawson, A. Norrie (red.), *Critical Realism. Essential Readings* (s.ix-xxiv). London, New York: Routledge

Bhaskar, R. (1998b). Philosophy and scientific realism. In M. Archer, R. Bhaskar, A. Collier, T. Lawson, A. Norrie (red.), *Critical Realism. Essential Readings* (s.16-47). London, New York: Routledge

Bhaskar, R. & Lawson, T. (1998). Introduction: Basic texts and developments. I M. Archer, R. Bhaskar, A. Collier, T. Lawson, A. Norrie (red.), *Critical Realism. Essential Readings* (s.3-15). London, New York: Routledge

Björkman, K. (2017, januari). Fokus på rätt och fel får många att tappa sugen. *Origo, januari*, 22-23.

Braun, V. & Clarke, V. (2006). Using Thematical Analysis in Psychology. *Qualitative Research in Psychology*. 3(2), 77-101. doi: <http://dx.doi.org/10.1191/1478088706qp063oa>

Danermark, B., Ekström, M., Jakobsen, L., Karlsson, J. (1997). *Att förklara samhället*. Lund: Studentlitteratur

Halldén, O. (2011). Piaget – kunskap som meningsskapande. I A. Forssell (red.) *Boken om pedagogerna*. (s. 131-152). Stockholm: Liber

Höglund, C. (2009). The wow factor. *Pedagogiska magasinet*. <http://pedagogiskamagasinet.se/the-wow-factor/>

Lindstrand, F., Selander, S. Estetik, skapande, kreativitet och lärande. (2009). I F. Lindstrand & S. Selander (Red.), *Estetiska lärprocesser - upplevelser, praktiker och kunskapsformer*. (s. 11-12). Lund: Studentlitteratur.

Lundin, S. (2008). *Skolans matematik. En kritisk analys av den svenska skolmatematikens förhistoria, uppkomst och utveckling*. (Doktorsavhandling, Acta Universitatis Upsaliensis: Uppsala. Studier i utbildnings- och kultursociologi; 2).

Märner, A. & Örtengren, H. (2003). *En kulturskola för alla - estetiska ämnen och läroprocesser i ett mediespecifikt och medieneutralt perspektiv*. (Forskning i fokus, nr 16). Stockholm: Myndigheten för skolutveckling

Nationalencyklopedin [NE]. (2017a). *Essentialism*. Tillgänglig:
<http://www.ne.se/uppslagsverk/encyklopedi/lång/essentialism>

Nationalencyklopedin [NE]. (2017b). *Konstruktionism*. Tillgänglig:
<http://www.ne.se/uppslagsverk/encyklopedi/lång/konstruktionism>

Pramling Samuelsson, I. (2011). *Konsten att lära barn estetik: en utvecklingspedagogisk studie av barns kun.nande inom musik, poesi och dans*. (2. uppl.) Stockholm: Norstedt.

Quale, A. (2012). On the Role of Constructivism in Mathematical Epistemology. *Constructivist Foundations*. vol. 7(2), s. 104-111.

Skolverket. (2013). *Kraftig försämring i PISA*. Hämtad 2017-0519 från
<https://www.skolverket.se/om-skolverket/press/pressmeddelanden/2013/kraftig-forsamring-i-pisa-1.211208>

Sundgren, G. (2011). John Dewey – reformpedagog för vår tid? I A. Forssell (red.) Boken om pedagogerna. (s. 103-130). Stockholm: Liber

Svenska Montessoriförbundet. (u. å) *Myter och fakta om Montessori*. Hämtat 2017-05-09 från
<http://montessoriforbundet.se/>

Bilaga 1, översikt material

Titel	Författare	Land	Estetiskt uttryck	Tema
Dance/Movement Therapy's Influence on Adolescents' Mathematics, Social-Emotional, and Dance Skills.	Anderson, A	USA	Dans	-Vara i matematiken -Matematiska förmågor -Förståelse på djupet
Using Literature to Support Mathematical Thinking in Middle School.	Bintz, W., Delano Moore, S.	USA	Litteratur	- Alternativa uttryckssätt - Kommuniera matematik - Vara i matematiken -Matematiska förmågor
Origami instruction in the Middle School Mathematics Classroom: Its Impact on Spatial Visualization and Geometry Knowledge of Students.	Boakes, N.	USA	Origami	-Negativa effekter -Kommunicera matematik -Vara i matematiken -Matematiska förmågor
The effects of different modes of representation on the solution of one-step additive problems.	Elia, I., Gagatsis, A., Demetriou, A.	Cypern	Bilder	-Negativa effekter -Alternativa uttryckssätt - Kommuniera matematik -Förståelse på djupet
The impact of drama on pupils' language, mathematics, and attitude in two primary schools.	Fleming, M., Merrell, C., Tymms, P.	England	Drama	-Vara i matematiken
Mathematics for Gifted Students in an Arts- and Technology-Rich Setting.	Gadanidis, G., Hughes, J., Cordy, M.	Kanada	Musik, poesi, bild och drama	-Kreativ matematik -Kommunicera matematik -Vara i matematiken -Matematiska förmågor -Förståelse på djupet
Developing Numerical Ability in Children with Mathematical Difficulties Using Origami.	Krisztján, A., Ágota, B., Gombos, H., Vereczkei, L.	Ungern	Origami	-Kreativ matematik -Vara i matematiken -Matematiska förmågor -Förståelse på djupet
Interdisciplinary Invitations: exploring Gee's Bend Quilts.	Mitchell, R., Whitin, P., Whitin, D.	USA	Foto, lapptechnik	-Matematiska förmågor -Förståelse på djupet
Musi-Matics! Coining a Phrase that Links the Arts with Math Instruction.	Nolan, K.	USA	Musik	-Kreativ matematik -Vara i matematiken -Matematiska förmågor
Dance and mathematics: Engaging senses in learning.	Watson, A.	England	Dans	-Negativa effekter -Alternativa uttryckssätt - Kommuniera matematik -Vara i matematiken -Förståelse på djupet
Integrating Writing and Mathematics.	Wilcox, B., Monroe, E.	USA	Skrivande	-Alternativa uttryckssätt -Kommunicera matematik -Vara i matematiken -Matematiska förmågor -Förståelse på djupet
Phasing in lunar observations.	Wilhelm, J., McMillan, S., Walters, K., Lovering, E.	USA	Poesi, bild	-Matematiska förmågor