Fler bråk i matematikundervisningen

Fler bråk i matematikundervisningen

En aktionsforskningsstudie där lärare lär om progression

Caroline Nagy

GÖTEBORGS UNIVERSITET
ACTA UNIVERSITATIS GOTHOBURGENSIS

Ängelholms kommun och Högskolan i Halmstad har tillsammans bidragit till att göra denna studie möjlig.

Abstract

Title: Teaching about fractions in mathematics. Professional learning about progression with an action research approach.

Author: Caroline Nagy

Language: Swedish with an English summary

Keywords: action research, analytical tools, communities of practice, fraction, negotiations, professional learning, progression, school stages

Few studies have a focus on progression in teaching and learning mathematics. An assumption for this study was that progression in teaching between school stages was important. The approach of the study was based on action research. Four teachers from preschool to 9th grade (age 1-16) were invited to a temporary team, a community of practice. The overall aim of the study was to develop knowledge about teaching fractions when teachers used students' understandings as a point of departure for their action plans. A second aim was to illuminate what influences progression in their teaching.

The team of teachers used the four phases of action research: plan, act, observe and reflect, during their learning processes. The teachers' learning sessions were videotaped and transcribed and this provided the main data that formed the basis of the results. Wenger's dimensions of social learning were used as an analytical tool: joint enterprise, mutual engagement and shared repertoire.

Four themes that described teachers' negotiation of qualities in mathematics instruction were identified: interpreting students' understandings, basing instruction on students' understandings, visualizing fractions and ensuring students' understanding. When teachers, regardless of what stage was involved, reified similar instructions, it did not benefit students' learning opportunities. In order to improve progression in teaching fractions, it was important that teachers succeeded in identifying students' understandings and that the team negotiated different qualities in their community of practice. The shared repertoire (the pre-tests and the video recordings) formed the core of negotiating progression based on students' understandings. The team showed a mutual engagement, with students' learning as their joint enterprise. An implication of the study is that teachers from different educational stages can negotiate progression and improve it.

Innehåll

Förord

Forskarutbildningen har inneburit en personlig resa och utveckling där jag tacklat motgångar och glatts med framgångar. Den stora progression som jag upplevt mellan tidigare studier och forskarutbildning har inneburit tvivel på min förmåga och att lyckas med utbildningen. Men nu sitter jag här och skriver ner mina sista ord, vilket innebär att jag är i mål. Visst känner jag en enorm lycka och stolthet, men framför allt en stor tacksamhet till alla som på olika sätt stöttat mig och bidragit till denna studie.

Först och främst vill jag rikta ett stort tack till de deltagande lärarna i studien. Utan er hade studien varken varit möjlig eller blivit vad den är. Lärdomarna jag gjorde tillsammans med er, både på möten och genom att filma i era klassrum/förskoleverksamhet, är otaliga. Det har känts viktigt att berätta om vår gemensamma resa. Det fick mig att fortsätta skriva när jag ville ge upp. Jag vill i samband med detta passa på att tacka Ängelholms kommun som såg möjligheterna med studien och skolans rektorer som gav goda förutsättningar för att genomföra den.

Självklart vill jag rikta ett stort tack till mina kunniga handledare som på olika sätt både har stöttat och utmanat mig. Tack Pia Williams för att du gav mig idén att ta med förskolan i studien. Utan förskolan hade studien inte känts komplett. Tack för dina tydliga kommentarer och den energi du gett. Tack Angelika Kullberg för alla värdefulla samtal kring min empiri. Redan i ett tidigt skede fick du mig att förstå att jag hade både spännande och värdefulla data. Till Ann-Christine Wennergren: det finns inte ord för att beskriva min tacksamhet. Vad jag än försöker skriva här kommer att låta banalt i jämförelse med vad du har betytt och betyder för mig. Men jag ska göra ett försök. När min text hade mer att önska gav du kommentarer som inspirerade mig att fortsätta jobba. Du är min kritiska vän! Tack för ditt stora engagemang, ditt tålamod och inte minst all tid du har lagt ner. Ditt sätt att handleda har inspirerat mig att bli en bättre handledare.

Jag vill även rikta ett tack till Cecilia Wallerstedt och Claes Malmberg, som var diskutant vid planerings- respektive avstämningsseminarium, för noggrann läsning av min text. Tack Cecilia för dina skarpa frågeställningar och synpunkter i starten av min studie. Du lärde mig att ta plats som aktionsforskare.

Tack Claes för dina insiktsfulla kommentarer kring användningen av Wengers teori. I ett skede när jag kände mig vilse gav du mig en riktning.

Jag vill även tacka Catherine Machale Gunnarsson för noggrann språkgranskning av mitt abstrakt och engelska summering.

En stor eloge till mina underbara kollegor på lärarutbildningen i Halmstad som tagit sig tid att lyssna, uppmuntra och ge goda råd. Tack för den enorma arbetsglädje det innebär att arbeta tillsammans med er.

Jag vill även tacka alla vänner som trots frånvaro verkar finnas kvar. Ett särskilt tack till min vän Anna-Karin som nästintill varje fredag eftermiddag/kväll tagit en kopp kaffe tillsammans med mig och dryftat allt mellan himmel och jord och däremellan några dilemman kring att vara forskarstudent.

Sist men viktigast av allt, vill jag tacka både Csabas och min familj för att ni alltid finns där och alltid ställer upp. Tack för att ni visat att det finns ett liv bortom forskarstudierna. Ett särskilt tack till min man Csaba som har haft ett otroligt tålamod med min frånvaro. När du ringt mig på jobbet och frågat när jag kommer hem har du lärt dig att 20 minuter betyder minst 2 timmar. Tack för allt du gjort som gett mig utrymme att ägna mig åt mina studier. Dessutom, tack för all god matlagning!

Halmstad 26/10 2017
Caroline Nagy

Kapitel 1 Introduktion

I denna uppsats har jag valt att ha fokus på undervisning om tal i bråkform. Mitt intresse tog fart när jag i min c-uppsats intervjuade åtta elever i årskurs 5 om deras förståelse av tal i bråkform. I den studien fann jag en stor variation i elevernas förståelse, vilket fångade mitt intresse. Löwings (2016) forskning visar att svenska elever har svårigheter med bråk trots att flera studier genomförts inom området.

Förutom mitt intresse för tal i bråkform tar denna studie utgångspunkt i egna erfarenheter av matematikundervisning och lärares kompetensutveckling. Redan som elev i grundskolan och gymnasiet var matematik ett favoritämne, kanske för att jag klarade studierna i matematik ganska bra. När jag sedan som lärarstudent började första matematikkursen på lärarutbildningen fick mitt självförtroende i matematik sig en rejäl törn. Jag klarade räkneprocedurer bra, men jag saknade kunskaper om i vilka sammanhang de olika procedurerna kunde användas eller varför de fungerade. Jag insåg att den undervisning jag mött under mina skolår i grundskolan och i gymnasiet till stor del hade haft fokus på räkneprocedurer men där lärarutbildningen visade på andra undervisningsmetoder som byggde på matematik med förståelse.

När jag 1994 fick mitt första lärarjobb i grundskolan var jag full av förväntningar, framför allt att få undervisa i matematik, så att eleverna fick en förståelse för innehållet. Vissa undervisningsidéer visade sig fungera ganska bra, medan andra snabbt hamnade ”på hyllan”. Så småningom undervisade jag till stora delar på det sätt som jag själv undervisats på, eftersom jag varken hade erfarenheter eller stöd nog att veta hur jag skulle komma vidare.

Några år senare, efter att ha undervisat på ett sätt som jag inte fullt ut trodde på, började jag gradvis testa nya sätt. Detta gav mig glädje i arbetet, men jag kände mig ändå frustrerad då jag genomförde förändringarna ensam. Även om vi arbetade i arbetslag handlade våra möten snarare om rastvakts scheman, planera idrottsdagar, elevärenden, beställning av material med mera än om ämnesinnehåll och didaktiska problem. Dock planerade vi vissa lektioner tillsammans som idrott och NO, men det handlade om att planera vad vi skulle göra, något som sällan utgick från forskning om undervisning och lärande. Annan kompetensutveckling som vi fick var ofta i form av föreläsningar som inte följdes upp. Därför kände jag mig hänvisad till att läsa litteratur på egen hand, åka på konferenser och prova mig fram.

Ett annat dilemma, som jag upplevde som lärare på lågstadiet, var att jag varken hade kunskap om förskolans praktik eller om undervisning i årskurs 4-9. Det skedde sällan samtal mellan stadierna och jag visste inte om ämnesinnehållet jag valde utifrån Lpo 94 (Skolverket, 2006) var det samma som nästa stadie valde eller om det skiljde sig åt för mycket. Dessutom funderade jag över om min undervisning på lågstadiet skulle kunna förhindra problem i senare årskurser. Dessa funderingar fick jag aldrig svar på. Den läroplanen som användes då, Lpo 94, (Skolverket, 2006) var med sina strävansmål och uppnåendemål, inte så tydliga med ämnesinnehållet för de olika årskurserna.

Även om min undervisning inte hann utvecklas så långt som jag önskat uppmärksammades min undervisning i matematik och jag fick föreläsa om matematikundervisning för lärare i kommunen. Dock var det frustrerande att bedriva kompetensutveckling som jag sedan tidigare själv upplevt inte var tillräcklig för att utveckla min egen undervisning.

Utifrån mina upplevelser av kompetensutveckling känns det därför extra inspirerande att i detta arbete, genom aktionsforskning, äntligen få möjlighet att tillsammans med lärare i förskolan och grundskolan bidra med att utveckla matematikundervisning samtidigt som den studeras. Min utgångspunkt är att lärare tillsammans kan utveckla sitt kunnande om matematikundervisning om de ges tid och möjlighet att förhandla om vad i undervisningen som gör skillnad för elevernas lärande (jfr. Wenger, 1998).

Kapitel 2 Inledning

Problemområde

Den här licentiatuppsatsen handlar om progression i matematikundervisning, särskilt riktat mot tal i bråkform, från förskolan till årskurs 9. För att ringa in problemområdet beskrivs först forskning om elevers förståelse av bråk i olika åldrar för att sedan argumentera för behovet av nya sätt att studera undervisning.

Elevers sjunkande resultat i bråk

Under senare år har svenska elevers grundläggande matematikkunskaper sjunkit (Löwing, 2016). Många elever saknar grundläggande förståelse för tal i bråkform (Moseley & Okamoto, 2008) och i Sverige är det så många som 50 % av eleverna i årskurs 6 som saknar grundläggande taluppfattning av bråk (Löwing, 2016). Trots att forskning fokuserat på att öka kunskapen om elevers förståelse av bråk och hur den utvecklas har elever fortfarande svårigheter inom området (Newton, 2008). TIMSS-rapporterna[1] visar att svenska elevers kunskaper i matematik i årskurs 8 sjunker sedan första studien genomfördes i Sverige 1995 och att eleverna i årskurserna 4 och 8 (Skolverket 2008a, 2008b, 2008c, 2008d) har bristande kunskaper i bråk. Även om den senaste TIMSS-rapporten visar att svenska elevers resultat ökar, är resultaten fortfarande lägre än 1995 (Skolverket, 2016b). Svenska elevers resultat på både PISA- och TIMSS-testen hamnar under genomsnittet, vilket har bidragit till att matematikundervisningen hamnat än mer i fokus i den svenska skoldebatten. Sedan matematiken fått ett större utrymme i förskolans läroplan, Lpfö98 (Skolverket, 2016a) omfattar debatten även undervisning i allt lägre åldrar.

Progression i elevers lärande

Det finns sedan många år tillbaka studier om hur elever förstår bråk i olika åldrar, byggt på kognitionsvetenskap (Empson, 1999) och därmed kunskap om progression i elevers lärande. Det finns även studier som pekar på att

[1] TIMSS: Trends in International Mathematics and Science Study

elever upplever svårigheter att lära sig bråk (Behr, Lesh, Post & Silver, 1983). Denna forskning redogör för att förskolebarns matematiska kunskaper visar ett samband med skolframgångar i matematik vid 15 års ålder (Watts, Duncan, Siegler & Davis-Kean, 2014). Dessutom har elevers förståelse av tal i bråkform och division vid 10 års ålder visats ha samband med elevers prestation i matematik vid 16 års ålder (Siegler m.fl., 2012). Resultatet från TIMSS-studierna visar att elever, från andra jämförbara länder, lär sig mer, eller annat kunskapsinnehåll, mellan årskurs 4 och årskurs 8 än vad svenska elever gör (Skolverket, 2012). Under åren 2008-2013 testades svenska elever i olika årskurser i bland annat bråk. Elever i årskurs 8 och elever som gick första året på gymnasiet fick samma uppgifter kring addition och subtraktion av bråk. Resultatet visar att eleverna hade låg lösningsfrekvens oavsett stadie, vilket indikerar att det inte skett någon större kunskapsutveckling inom detta område. Dessutom visar resultatet från årskurs 6 att eleverna inte kunde förkorta och förlänga bråk, vilket är en viktig förkunskap för att kunna göra bråken liknämniga vid addition och subtraktion (Löwing, 2016). Liknande resultat kring progression i elevers lärande finns även i en amerikansk studie med elever i 14- och 17-års åldern (Behr & Post, 1992). I den studien hade eleverna låg lösningsfrekvens på addition av bråk med olika nämnare. De som löste uppgifterna korrekt kunde emellertid inte förklara idéerna bakom uträkningen. Det föreföll snarare som om de hade memorerat en procedur. För att förstå orsaken till dessa svårigheter förespråkar Mix, Levin och Huttenlocher (1999) att forskare undersöker hur barn i förskolan förstår bråk innan de fått formell undervisning. Empson (1999) anser istället att forskning behöver ta hänsyn till hur elever tänker när de deltar i undervisning, det vill säga studera elevernas förståelse ur ett situerat perspektiv.

Progression i undervisning

Säfström (2017) har genomfört en begreppsanalys kring begreppet progression där hon skiljer mellan progression i elevers lärande och undervisningsprogression[2]. Progression kan ses som en kvalitet i undervisning och handlar om att det genom utbildningen ställs successivt ökande krav. Om undervisningen genom utbildningen ligger på en konstant nivå, där eleverna får repetera sina kunskaper, alternativt att kraven ökar så mycket att eleverna inte kan möta dessa krav reduceras elevernas möjlighet till lärande och

[2] Det som jag i denna studie kallar progression i undervisning benämner Säfström utbildningsprogression.

utveckling. Ökade krav i undervisningen behöver inte per automatik innebära att elever lär sig. Undervisning som tar tillvara elevers kunskaper och färdigheter från tidigare undervisning och utmanar eleverna genom ökade krav har potential att ge förutsättningar för lärande.

Kunskapsutvecklingen för de svenska eleverna mellan årskurs 4 och 8 är inte lika stark som i andra länder (Skolverket, 2012) vilket kan tolkas som att undervisningen brister i grundskolans senare hälft eller att elever i de lägre årskurserna inte utvecklar tillräcklig kunskap för att gynna lärande i högre årskurser. En orsak till att elevernas kunskapsutveckling inte är så stark, beror enligt Kilborn (2013a) på bristande kontinuitet i undervisningen och/eller om mindre bra val av undervisningsmetoder. Kunskapsutveckling börjar dock tidigare än vid skolstart. Skolinspektionen (2011) skriver fram förskolans viktiga roll för livslångt lärande, att ge alla barn de förutsättningar de behöver senare i livet. Watts m.fl. (2014) poängterar vikten av att barn tidigt utvecklar matematiska färdigheter då det är av betydelse för elevers långsiktiga prestation. Om undervisning i områdena bråk och division förbättras kan även elevers lärande utvecklas, inte bara i bråk och division, utan även i mer avancerad matematik (Siegler m.fl., 2012).

Begreppet undervisning används även inom förskolan och har aktualiserats i samband med förändringen av Skollagen (SFS 2010:800) och innebär att förskolan ingår som en egen skolform i hela utbildningssystemet. Enligt Persson (2015) kan det likställas med aktiviteter som stödjer barns lärande genom att utvidga och dekontextualisera det sammanhang som aktiviteten utspelar sig i. Barns lärande och utveckling organiseras ofta i form av större sammanhängande meningsfullheter som till exempel i: temaarbete, sociala relationer eller lek. Undervisning i förskolan utgår på så vis från interaktionen mellan den som undervisar och den som undervisas, vilket skiljer sig från ett synsätt som bygger på en enkelriktad kommunikation från lärare till barn. Det kräver ömsesidig interaktion och samspel, och därmed blir kommunikation i form av relationer och interaktion undervisningens kärna (Doverborg, Pramling & Pramling Samuelsson, 2013; Jonsson, Williams & Pramling Samuelsson, 2017; Wallerstedt, Lagerlöf & Pramling, 2014). Detta sätt att undervisa handlar om att finna en balans mellan vuxenstyrda och barninitierade aktiviteter.

Utifrån kursplanen, Lgr 11 (Skolverket, 2017c), finns en tänkt progression mellan stadierna, vilket kan tolkas som att eleverna får nya utmaningar för varje stadium. En aspekt, för en utmanande undervisning, är hur väl lärare anpassar ämnet till de krav som anges i kursplanen (Attewell & Domina, 2008). En annan aspekt, för att utmana eleverna, är att ta utgångspunkt i deras kunskaper. En undervisning som utmanar alla elever är viktig för att utveckla elevers kunskap. På några skolor som Skolinspektionen (2010) granskade hade lärarna begränsad kunskap om elevers resultat i matematik i andra åldersgrupper och skolformer än den egna undervisningen.

De studier som granskat matematikinnehållets förändring mellan stadier kommer inte fram till en enhetlig bild av progressionen. När progressionen inte fungerar optimalt kan det bero på bristande kommunikation mellan lärarna i de olika stadierna (Larson, 2014). Förskolans läroplan (Skolverket, 2016a) lyfter fram att förskolan ska sträva efter att samarbeta med skolan för att stödja barnens allsidiga utveckling och lärande i ett långsiktigt perspektiv genom att utbyta kunskaper och erfarenheter mellan lärare på de olika stadierna. Även Alatalo, Meier och Franks (2016) menar att det är viktigt att dialogen vid övergångar fokuserar på elevers lärande, för att gynna kontinuitet och långsiktig kunskapsutveckling. Dock visar deras studie att både förskollärare och lärare i förskoleklass anser att lärarna i förskoleklass inte bör få kännedom om varje elevs kunskapsutveckling för att undvika att lärarna har förutfattade meningar vid första mötet med eleverna. Äldre studier har visat att lärare i den svenska skolan dessutom har bristande förståelse för arbetet i förskolan och vilka områden förskolan arbetar med (Gustafsson & Mellgren, 2005). Liknande och nyare resultat rapporteras även från andra länder inom OECD[3]. Dessa rapporter pekar dessutom på det omvända, att förskollärare har begränsad kännedom om skolans praktik (Broström, 2002; Neuman, 2002). En utgångspunkt för denna studie är att lärare som känner till sina elevers förståelse och har kännedom om undervisning i andra åldersgrupper kan ha en tydligare progression i sin undervisning.

I Sverige är det vanligt att läroböcker har ett betydande inflytande i matematikundervisningen (Heikka, 2015). Lärare använder exempel från boken vid genomgångar (Heikka, 2015) och eleverna arbetar individuellt med uppgifterna (Larson, 2014). Det förefaller som att lärare ser läromedlet som en konkretisering av kursplanens innehåll (Heikka, 2015). Svenska läroböcker liksom andra länders läroböcker består till stor del av rutinuppgifter som inte

[3] Organisation for Economic Co-operation and Development (OECD) är en samarbetsorganisation för de industrialiserade länderna med uppgiften att främja ekonomisk och social utveckling (Skolverket, 2013). I studien framgår inte vilka OECD länder som har liknande resultat som i Sverige, enbart vilka åtgärder olika länder sätter in för att underlätta övergångar.

kräver mer än imitativa resonemang. När läroboken får ett för stort inflytande i undervisningen får eleverna mest öva på procedurer (Jäder, 2015; Sidenvall, 2015). I en jämförelse mellan två läroböcker, en från årskurs 4 och en från matematikkurs 1b på gymnasiet (bilaga 1 & 2), med samma matematiska innehåll av bråk, synliggörs att utbildningsprogressionen mellan årskurserna inte är stor, eller att det görs upprepningar. Studier visar att aktiviteter som genomförs i skolan ofta är hämtade från läroboken. Möjligheten till lärande påverkas både av lärobokens utformning och hur den används i undervisningen (Jäder, 2015).

Det finns få studier om progression i matematikundervisning mellan stadier och skolformer, till skillnad från studier om progression i elevers förståelse. Ett antagande för denna studie är att progressionen i undervisningen mellan årskurser är av betydelse, det vill säga om progressionen är för stor mellan årskurser alternativt att det görs för många upprepningar kan det påverka elevernas kunskapsutveckling. En utgångspunkt i denna studie är följaktligen att en förutsättning för progression är god kvalitet i undervisningen. Om kvaliteten i undervisningen brister kan det påverka elevernas möjlighet till lärande vilket i sin tur försvårar ökade krav i undervisningen.

Skolverket (2015b) definierar kvalitet inom utbildning med hur väl förskola och skola kännetecknas av en strävan att förbättra verksamheten utifrån rådande förutsättningar. Kvalitet handlar även om hur väl verksamheten uppfyller de nationella målen och följer de nationella riktlinjerna. Skolinspektionen (2010) skriver fram att en undervisning av hög kvalitet är en förutsättning för att elever ska kunna nå de nationella målen. Hög kvalitet innebär att undervisningsinnehållet är relevant, det vill säga utgår från de nationella målen och inte från läromedel. Innehållet behöver bearbetas så att det blir tillgängligt för eleverna. De behöver både stöd och stimulans i sin kunskapsutveckling och en undervisning som utmanar utifrån deras förutsättningar. Höga förväntningar har stor betydelse liksom att göra eleverna engagerade och delaktiga i sitt lärande.

Lärares kunskap om undervisning i bråk

Bråk är ett ämne som anses vara relativt svårt att undervisa om (Newton, 2008), det är matematiskt komplext, kognitivt utmanande, och en viktig kunskap för elever att få med sig för att lyckas i högre utbildning i matematik (Lamon, 2007). Studier visar att lärare både behöver ämneskunskaper och didaktiska kunskaper som tillsammans kan skapa möjligheter för elevers lärande. Det kan handla om att känna till elevernas förkunskaper och veta vilka representationer som passar bäst för undervisningsinnehållet (Ball & Bass, 2000). En lärare behöver även känna till vilka "typiska" fel elever oftast fastnar i (Ball, 2007). När lärare har bestämt sig för vad eleverna ska utveckla kunskap om och har tagit reda på vad eleverna redan vet kan lärarna planera hur de ska stödja sina elever för att alla ska nå dit. Det handlar inte enbart om att välja uppgifter som bygger på elevernas tidigare kunskap utan även, utifrån ett situerat perspektiv, förhandla fram en gemensam förståelse utifrån problemsituationer som innehåller och utvidgar förståelsen (Empson, 1999).

Även om flera lärare i Balls (2007) studie uttrycker att de vill fokusera på begrepp och resonemang i sin undervisning kan de hindras av sin egen matematiska förståelse. Lärares egna erfarenheter av matematik kan ha handlat om memorering och regler istället för att skapa mening och förståelse för begrepp. Enligt Ball behöver dessa lärare se över och revidera det sätt de lärt sig matematiska idéer och metoder. Studien visar att det inte räcker med kompetensutveckling för att utveckla metoder och strategier i undervisningen. Det räcker inte heller med enbart uppmuntran. Uppgiften är betydligt mer komplex än så. Det handlar enligt Ball (2007) om att se seriöst på lärande och ta hänsyn till vad elever redan kan och hur de resonerar i förhållande till innehållet och tillsammans med eleverna synliggöra vad de försöker åstadkomma.

Kollegialt lärande

Sjöberg (2009), som analyserat styrdokument, skriver fram att dagens lärare kollegialt kan lära av varandra och bidra till skolutveckling. Lärares reflekterande samtal möjliggör utvärdering och förändring av undervisningen. Vidare skriver Sjöberg att lärare har en viktig roll att hålla sig uppdaterade på forskning om undervisning och lärande. Även Tyrén (2013) betonar att kollegor är viktiga för skolutveckling, då det är svårt att som enskild lärare förändra verksamheten, så vida det inte handlar om mindre förändringar eller förbättringar i det egna klassrummet. Det kollegiala lärandet kan ske såväl i arbetslag som i andra gruppkonstellationer (Lauvås, Lycke & Handal, 2016).

Inom förskolan har det funnits en tradition av att ingå i arbetslag som är konstruerade runt en barngrupp. Enligt Gannerud och Rönnerman (2007) är det en förutsättning för verksamheten att förskollärarna arbetar tillsammans.

Lorties (2002) studie från 1960-talet visade att läraryrket till stor del varit ett ensamarbete, medan de flesta lärare idag ingår i någon form av arbetslag och samarbetar med kollegor. Scherp (2002) beskriver att det finns olika typer av arbetslag i grundskolan, ämnesöverskridande arbetslag och ämnesindelade arbetslag. Det ämnesöverskridande arbetslaget, som arbetar inom sitt stadium, kan gynna ett tematiskt arbetssätt medan det ämnesindelade arbetslaget istället kan gynna ämnet då det kan organiseras efter sin inre logiska ordning. Scherp fann i sin studie att endast 14 % av lärarna ingick i ämnesindelade arbetslag.

Gannerud och Rönnerman (2007), Ohlsson (2004a) och Scherp (2002) ger en samstämmig bild av att arbetslagsmöten i början på 2000-talet tenderade att domineras av administrativa, organisatoriska och ekonomiska frågor och när det väl blev tid för pedagogiska samtal handlade det om tidigare erfarenheter, händelser och planering av nytt ”görande” men inte så mycket om kollegialt lärande. Sedan dessa studier genomfördes har mellanledare som till exempel arbetslagsledare eller förstelärare införts för att bland annat handleda arbetslag och driva skolutveckling. Trots detta tenderar en del arbetslag att fokusera på administrativa och organisatoriska frågor (Liljenberg, 2015). Även lärare uttrycker att reflektion kring undervisning och läraruppdrag bortprioriteras på grund av tidsbrist (Skolverket, 2015a).

> Reflekterande samtal utifrån det man gjort förekommer i viss begränsad omfattning medan slutsatser, lärdomar, samt kopplingar till forskning och andras erfarenheter samt till uppdraget är mycket sällsynta (Sherp, 2002, s. 108).

Citatet visar att kollegialt lärande i syfte att utveckla undervisningen sällan varit i fokus på arbetslagsmöten och att kvaliteten i samtalen är avgörande för utfallet. Det räcker inte att lärare vidareförmedlar lyckade undervisningsmetoder. De behöver istället urskilja på vilket sätt de framgångsrika tillvägagångssätten skiljer sig från de man provat tidigare och varför det leder till bättre resultat. Dessa lärdomar kan sedan testas i nya situationer för att se om de fungerar även där, detta för att bygga upp en fördjupad kunskap om de principer som ligger bakom framgångsrika lösningar (Scherp, 2002). Enligt Ohlsson (2004c) är det skolledares och arbetslagsledares ansvar att dra upp tydliga riktlinjer för arbetslagets uppgift och dessutom stimulera till reflektion i det kollegiala lärandet. Lauvås m.fl. (2016) framhåller vikten av att genomföra reflekterande samtal i nya gruppkonstellationer och inte i redan existerande arbetslag. Mycket tas för givet i en väletablerad grupp och det finns en risk att omedelbara behov som uppträder får företräde i samtalen.

Lesson study och learning study är två olika modeller där lärare kollegialt utvecklar undervisning kopplat till elevers kunskapsutveckling av ett specifikt lärandeobjekt. Dessa modeller innebär att kollegor tillsammans planerar, genomför och utvärderar undervisning i en cyklisk process. Skillnaden dem emellan är att learning study är en metod för forskning där variationsteorin används som en lärandeteori vid planering samt analys av undervisning och elevers kunskapsutveckling. Dessutom utvärderas elevernas kunskap både före och efter undervisningen och det är vanligt att lektionerna videofilmas. Lärandeobjektet är begränsat så att det ryms inom en lektion (Wernberg, 2009). Ett exempel på lärandeobjekt inom bråk i förskolan är halv (Björklund, 2016) och i grundskolan täljare och nämnare (Kullberg & Runesson, 2013).

Sedan höstterminen 2013 fortbildar sig många matematiklärare i matematiklyftet (Skolverket, 2016c). Syftet är att undervisningen ska utvecklas tillsammans med kollegor med stöd av handledare. Matematiklyftet är organiserat i moduler uppdelade för lärare inom förskola, förskoleklass, årskurs 1-3, årskurs 4-6, årskurs 7-9, gymnasium, vuxenutbildning och särskola. Modulerna innebär att lärarna kollegialt diskuterar texter samt planerar, genomför och reflekterar över egen och andras genomförda aktiviteter. Till skillnad från lesson study och learning study, som utgår från ett avgränsat lärandeobjekt, är modulerna snarare uppbyggda på större matematiska innehåll som räkna i förskolan och taluppfattning och tals användning i grundskolan. Även om lärare diskuterar ett specifikt matematiskt lärandeobjekt inom learning study eller diskuterar ett matematiskt innehåll i matematiklyftet verkar upplägget inte ha gynnat samarbete över stadiegränserna (Häggström, 2012; Skolverket, 2016c).

Aktionsforskning är ytterligare ett sätt för lärare att kollegialt utveckla kunskap om den egna praktiken för att förändra den (Tyrén, 2013). I den nordiska traditionen är det vanligt att aktionsforskning sker i samarbete med en forskare. Ansatsen tar utgångspunkt i de specifika frågor lärarna ställer om praktiken. Centralt för aktionsforskningen är att iscensätta en handling och att observera och reflektera över vad som sker (Rönnerman, 2012). Forskaren och/eller läraren inhämtar systematiskt data genom till exempel loggbok, skuggning eller videoinspelning som grund för ny kunskap (Anderson, Herr & Nihlen, 1994; Folkesson, 2012).

Praktikgemenskap

För att studera progression i undervisning om bråk finns det olika vägar att välja. Ett sätt är att studera undervisning om bråk på olika stadier för att beskriva hur progressionen mellan stadierna ser ut. Ett annat sätt, vilket även är det arbetssätt jag valt för denna studie, är att samtidigt studera och förbättra arbetet med progression i undervisningen om bråk mellan stadierna. För denna aktionsforskande ansats bjöd jag in lärare från olika stadier, förskola, låg-, mellan- och högstadiet, till ett nytt tillfälligt arbetslag, en praktikgemenskap enligt Wengers (1998) terminologi.

Stigler och Hiebert (2009) förordar forskning som tar hänsyn till det dynamiska tänkandet i klassrumsmiljön och att elevers förståelse och utveckling är relaterat till oförutsedda händelser i klassrummet. Det behövs alltså studier som handlar om både undervisning och elevers lärande för att utveckla undervisning. Då Hattie (2009) framhåller läraren som central för elevers lärande kan även lärares professionella utveckling bli en viktig faktor för elevers framgång i skolan. Enligt Wenger (1998) ses teorin om socialt lärande som en vägledning för att angripa problem, som i detta fall undervisning om tal i bråkform. Om kunskapsutveckling främst handlar om aktivt deltagande i sociala gemenskaper behövs uppfinningsrika sätt att engagera lärare i en meningsfull praktik som förstärker deras deltagande. Lärare kan enligt Wennergren (2016) ta ett gemensamt ansvar, för gruppens lärande, för att utveckla undervisningen. Det handlar om att ta tillvara erfarenheter och kompetens som finns hos lärarna (Ohlsson, 2004c).

Lärare i en praktikgemenskap kan utifrån ett definierat problemområde, som i denna studie undervisning om bråk, arbeta för att finna lösningar (Scherp, 2002). Lärarna i denna studie fick tillsammans planera, genomföra och reflektera över videodokumenterad undervisning. Både Hattie (2009) och Ohlsson (2004b) framhåller att videoanalys och gemensam reflektion kan vara en framgångsfaktor för kollegialt lärande. Lärarnas olika erfarenheter och kompetenser av undervisning från olika stadier förväntas bli ett viktigt bidrag till den nya praktikgemenskapen. Praktikgemenskapen är i detta fall tänkt att fungera som en bas för att öka lärarnas gemensamma praktiska och didaktiska repertoar (Wenger, 1998) samtidigt som progression i undervisning mellan olika stadier kan synliggöras. Studien kan på det viset bidra med kunskap om undervisning i bråk från förskolan till högstadiet.

Syfte och forskningsfrågor

Studiens syfte är att bidra med kunskap om undervisning när lärare tar utgångspunkt i barns och elevers förståelse av bråk samt att synliggöra vad som kan påverka progression i undervisningen. Vidare avser jag att belysa arbetslagets betydelse för att förhandla fram gemensam förståelse om undervisning av tal i bråkform. Studiens övergripande forskningsfråga är:

> Vilka kvaliteter i undervisning om bråk förhandlas i en stadieövergripande praktikgemenskap?

Studien förväntas bidra med kunskap om hur lärare kan utveckla undervisning om bråk genom att ingå i en stadieövergripande praktikgemenskap. Genom studiens aktionsforskande ansats får lärarna möjlighet att tillsammans planera och reflektera över undervisning om bråk för elever i olika åldrar.

Studiens relevans för pedagogisk yrkesverksamhet och lärarprofessionen

Tal i bråkform behövs för att kunna uttrycka en division exakt och enkelt, då många divisioner ger upphov till en oändlig periodisk decimalutveckling. Även om vi inte använder oss av tal i bråkform i så stor utsträckning i vardagslivet (McIntosh, 2008) är de ändå viktiga för att förstå både procent och tal i decimalform (Ball, Ferrini-Mundy, Kilpatrick, Milgram, Schmid & Schaar, 2005). I dagens samhälle behöver alla behärska att skriva och läsa tal, proportioner, sannolikhet och förhållanden mellan olika tal i olika sammanhang (Clarke, Roche & Mitchell, 2011; Niss, 1994). Om lärare[4] undviker att undervisa om bråkräkning på förskolan och i grundskolan kan elever få problem med att förstå förhållande, proportionalitet och procent. Bråk är även en viktig förkunskap för algebra (Löwing, 2016). Enligt Kilborn (2013b) handlar det om elevers lika rätt till utbildning på såväl kort som lång sikt. Det är därför av stor vikt att lärare och lärarstudenter får kunskap om att utforma undervisning som kan bli en strukturerad resurs för elevers lärande i bråk. Studien förväntas ge resultat med relevans för såväl förskola, skola som för lärarutbildningen.

[4] I texten benämner jag både förskollärare och grundskollärare med lärare.

Kapitel 3 Teoretisk inramning

Studiens tar sin utgångspunkt i Wengers (1998) teori om praktikgemenskaper. Teorin är en vidareutveckling från Lave och Wengers (1991) teori om situerat lärande och har sina rötter i ett sociokulturellt perspektiv. Wengers teori har använts i tidigare studier, till exempel Dahl (2014) och Gustafsson (2010), för att studera relationer och förhandlingar av identiteter inom grundskolan. Det finns även studier där teorin använts för att beskriva lärande i praktiken utifrån lärares upplevelser av musikalproduktion (Törnquist, 2006). Ytterligare ett exempel, som ligger närmast denna studie, är Sterner (2015) som använde Wengers dimensioner (mutual engagement, joint enterprise, shared repertoire) för att analysera en lärargrupps samtal om elevers resonemang i matematik. I denna studie används teorin om praktikgemenskaper både som stöd för att utforma studien och för att analysera lärarnas reflektionssamtal om undervisning av tal i bråkform. Wenger (1998) beskriver att social meningsproduktion är en relevant analysnivå för att prata om en praktik, detta utifrån tre centrala begrepp – förhandling av mening, deltagande och förverkligande. I denna studie används förhandling för att undersöka hur lärarna tar utgångspunkt i elevernas förståelse. Förhandling används även för att synliggöra lärarnas gemensamma förståelse av undervisning om tal i bråkform.

I enlighet med Wenger (1998) framhålls i denna studie att teorier om lärande inte kan ses som ett recept som ska följas, det är snarare en vägledning kring vad man ska lägga märke till, vilka svårigheter man kan möta och hur man kan angripa problem.

Legitimt perifert deltagande

Lave och Wenger (1991) beskriver lärande som legitimt perifert deltagande. I relation till begreppet lärande betonar författarna att legitimt perifert deltagande inte handlar om att inta ett observationsperspektiv utan lärande handlar om deltagande, att integreras in i en praktikkultur. Den praktikgemenskap som matematiker ingår i kan skilja sig väsentligt från den praktikgemenskap där elever lär matematik i skolan. Enligt Boaler och Greeno (2000) betonar matematiker vikten av intuition och kreativitet i sitt arbete och att det finns en glädje i den ovisshet som det innebär att utforska matematiken och lösa ett problem. Procedurkunskaper nämns inte som en viktig del inom detta arbete. Elever som deltagit i en procedurinriktad undervisning, beskriver istället att det är just det faktum att det finns ett svar som är rätt eller fel som är positivt med matematik (Boaler & Greeno, 2000). Dessutom beskriver Boaler och Greeno att elever som mestadels får arbeta utifrån läroböcker finner det svårt att använda sina matematikkunskaper i nya och varierande situationer som kräver en annan uppsättning av metoder. Det kan ses som problematiskt om skolmatematiken och matematikpraktiken skiljer sig åt eftersom skolmatematik främjar kunskapsformer och sätt att arbeta med matematik som inte stämmer med ämnesdisciplinen. Utifrån detta resonemang, och att lärande beskrivs som legitimt perifert deltagande, är eleverna i skolan legitimt perifera, men deltar ändå inte i en matematikpraktik. Att bli en fullvärdig deltagare inom en praktikgemenskap stämmer alltså inte överens med den diskurs som ibland finns i skolan som fråga-svar-utvärdering formatet eller föreläsningar i matematik. Lave och Wenger (1991) skiljer dessutom på en läroplan för lärande och en läroplan för undervisning. En läroplan för lärande består av läranderesurser i den dagliga praktiken sett från den lärandes perspektiv. En läroplan för undervisning består av strukturerade lärresurser, där mening i det som lärs medieras genom deltagande och genom en explicit syn på kunskap och kunskapsutveckling. Utifrån att Lave och Wenger skiljer på en matematikpraktik och en skolpraktik kan man fundera över användningen av deras teori i en skolkontext. I denna studie är det dock lärarnas samtal om matematikundervisning som studeras.

Lärande

Wengers (1998) teori om praktikgemenskaper innefattar många begrepp, där några används som analysredskap i denna studie. För att ge en kort överblick över teorin som helhet fokuserar jag först och främst på lärande som socialt deltagande. Socialt deltagande beskrivs i sin tur som en omfattande process där det både handlar om att vara aktiva deltagare i sociala gemenskapers praktiker och att konstruera identiteter i relation till dessa gemenskaper. Deltagande i ett arbetslag, formar inte bara vad vi gör utan även vem vi är, vår identitet, och hur vi tolkar det vi gör. De delar som Wenger använder i sin teori om lärande illustras i figuren nedan (Wenger, 1998). I figuren har jag tagit utgångspunkt i Törnquists (2006) översättning av Wengers begrepp. Flera svenska forskare har översatt begreppen men på olika sätt.

Figur 1. Illustration över de delar som Wenger bygger sin sociala teori om lärande på. (Wenger, 1998, s. 5)

De delar som ingår i lärande är enligt Wenger (1998) mening, praktik, gemenskap och identitet. Även om meningsbegreppet endast används som analysinstrument i denna studie beskrivs alla delar för att ge en översikt. Min tolkning av begreppen beskrivs utifrån lärande genom procedurinriktad matematikundervisning. Till min hjälp av begreppsbeskrivningarna används Boaler och Greenos (2000) studie om kunskap, identitet och deltagande i matematikundervisning. De framhåller att *praktik* är en konkret handling, vilket innebär att det inte finns en teoretisk väg att lära sig matematik utan att det sker genom att elever är ömsesidigt engagerade i handlingar vars mening kan utvecklas såväl individuellt som kollektivt. Visserligen kan elever läsa in en del teori och öva på färdigheter men den matematiska aktiviteten baseras på lärande genom görande, som att lösa ett matematiskt problem. I en praktik som består av procedurinriktad undervisning finns det en risk att eleverna inte ser sig själva som producenter av mening utan upplever att kunskapen kommer från en auktoritär källa. *Gemenskap* innebär att elever, genom att delta i matematiska aktiviteter, lär sig tillhöra gruppen och erövra gemensamma sätt att samtala kring utsatta mål. I en procedurinriktad undervisning definieras elevers deltagande genom läroböcker, regler och procedurer. Vidare tolkar jag Wengers *identitetsbegrepp* som att elever utvecklar sin identitet, den förändras eller skapas i och genom tillhörighet. Det innebär att personerna anpassar sig efter de regler som gäller inom en social matematikpraktik. Enligt Boaler och Greeno (2000) kan en matematikundervisning som bygger på att eleverna tränar på procedurer som läraren förevisat, skapa en identitet av passiva mottagare av matematikkunskaper där lydnad, hörsamhet och uthållighet krävs för att lyckas med matematikstudierna. Avslutningsvis handlar *mening* om att elever får erfarenheter och upplevelser genom matematikuppgifter där de succesivt utvecklar sitt deltagande. I en procedurinriktad undervisning finns risken att eleverna erfar matematikämnet som oförhandlingsbart, strukturerat och bestämt, där det finns *ett* sätt att genomföra beräkningen och *ett* rätt svar. Det procedurinriktade lärandet, som beskrivits ovan, kan leda till att eleverna har svårt att omsätta sina kunskaper i nya situationer. Boaler och Greeno (2000) har i sina studier identifierat att elever som blir engagerade i en skolpraktik byggt på förhandling och tolkning, är mer kapabla att använda matematik i olika situationer som kräver specifika metoder. Utifrån ett situerat lärande får elever från olika praktikgemenskaper kvalitativt skilda former av kunskap, som är mer eller mindre användbara i nya situationer.

Wenger (1998) beskriver kunskap som förmågor som är nödvändiga inom en verksamhet. Inom en förskola eller skola kan dessa förmågor vara: förmåga att göra bedömningar, social förmåga, förmåga att tolka kursplaner eller förmågan att spela gitarr. Inom ett arbetslag skapas en praktik som handlar om att samarbeta kring ett innehåll. Lärares lärande finns inte i en bestämd aktivitet eller på ett bestämt möte. Men om lärare alltid agerar på samma sätt skapas inga nya erfarenheter och bidrar inte heller till förutsättningar för lärande. Det är först när en situation skakar om känslan av förtrogenhet och utmanar oss bortom vår förmåga att reagera som lärande intensifieras. Det sker även när vi engagerar oss i en ny praktik eller strävar efter att delta i en ny gemenskap. Utmaningarna får enligt Wenger (1998) varken vara för stora eller för små. I denna studie utmanas lärarnas förtrogenhet genom att ingå i en praktikgemenskap med nya kollegor genom att: planera undervisning för nya stadier, genomföra undervisning som praktikgemenskapen förhandlat fram samt analysera videofilmad undervisning från olika stadier. Lärarnas lärande kan uttryckas som en förändring eller som en ny idé. Att arbetet inte alltid uppfattas som lärande beror på att det som lärs är praktiken. Lärande inom en praktik kan ses som deltagande och engagemang i att förädla och förbättra praktiken (Wenger, 1998).

Praktikgemenskap

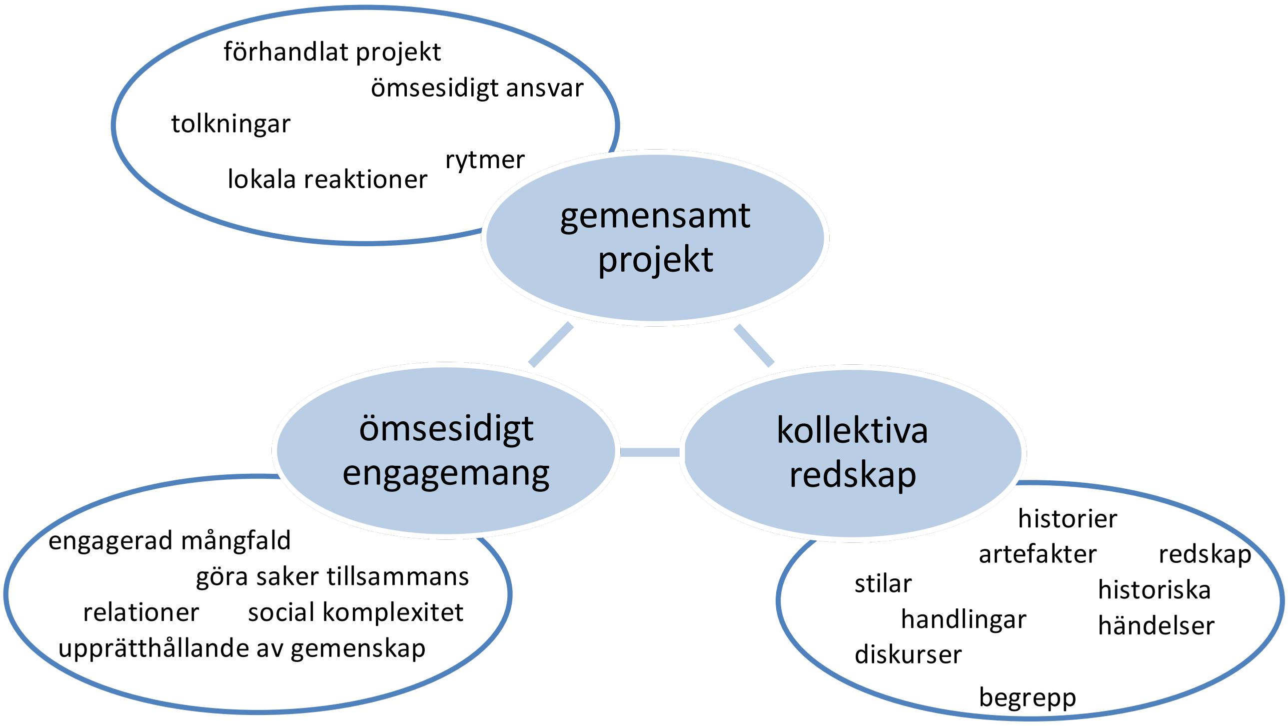
Wenger (1998) beskriver praktik som en process, varigenom vi kan uppleva världen och vårt engagemang som meningsfullt. Att engagera sig i en praktik involverar hela personen, både handling och kunskap på samma gång. Praktikgemenskaper finns överallt och vi ingår i många olika; hemma, på arbetet, i skolan och så vidare. I föreliggande studie ses det stadieövergripande arbetslaget som en praktikgemenskap.

Att dela samma villkor som de vi arbetar tillsammans med är en central faktor för att definiera den verksamhet som vi är engagerad i. Oavsett om lärare arbetar individuellt i ett klassrum eller gemensamt i förskolan så är lärare viktiga för varandra. De fungerar som resurser, utväxlar information, ger situationer mening och delar nya tips och idéer, som ett sätt att utveckla och förbättra praktiken.

En social praktik innefattar enligt Wenger (1998) både det explicita och det implicita, det som sägs och det som inte blir sagt. Det explicita inom ett arbetslag kan innefatta begrepp, laborativa material, planeringar, symboler, roller och så vidare, medan det implicita kan handla om relationer, tysta konventioner, subtila ledtrådar med mera. Både det explicita och det implicita är tecken på medlemskap i en praktikgemenskap och avgörande för att ett arbetslag och en skola ska lyckas.

Tre dimensioner som binder samman praktik med gemenskap

För att beskriva en praktikgemenskap integrerar Wenger (1998) begreppet praktik med gemenskap. Han beskriver att ett hyresområdes gemenskap eller en pianospelares praktik inte per automatik är en praktikgemenskap. De tre egenskaper som utmärker en praktikgemenskap är: ömsesidigt engagemang, gemensamt (innehålls)projekt och kollektiva redskap (engelska: mutual engagement, joint enterprise, shared repertoire). Översättningen av begreppen är hämtade från Wennergren och Blossing (2016, 2017).



Figur 2. En illustration över Wengers (1998, s. 73) praktikdimensioner som egenskaper i en gemenskap.

I figuren ovan illustreras att det första karaktärsdraget på en praktikgemenskap handlar om ömsesidigt engagemang. Karaktärsdraget innebär att lärare som ingår i ett arbetslag är engagerade i gemensamma aktiviteter. En gemenskap uppstår inte per automatik när lärare sätts samman i en grupp, utan det är lärarnas engagemang som skapar ömsesidiga relationer. Inom arbetslaget förhandlas om deltagande. Deltagande kan variera från perifert till centralt. En engagerad mångfald, det vill säga lärarnas olikheter, är en förutsättning för förhandling och för konstruerande av mening. Målet är inte att för-handlingarna inom gemenskapen ska leda till ömsesidig förståelse, utan arbetet tillsammans skapar såväl differentiering som integrering. En del specialiserar sig inom något område, som IKT eller utomhuspedagogik, samtidigt som de utvecklar gemensamma sätt att göra saker på. Inom praktikgemenskapen utvecklas därmed olika kompetenser, som kan stödja varandra vid olika behov, vilket gör att alla inte behöver kunna allt själv. Varje deltagare får på så sätt en unik plats och identitet i praktikgemenskapen. I ett kirurgiskt team bygger arbetet på att deltagarna har olika kompetenser som kompletterar varandra, medan lärare till stor del har liknande kompetenser, där relationerna bygger på att de stödjer varandra. Ömsesidigt engagemang involverar både egen och andras kompetens.

Det andra karaktärsdraget på en praktikgemenskap som Wenger (1998) beskriver handlar om gemensamt projekt. I denna studie är det gemensamma projektet progression i undervisning om bråk. När lärare samlas runt ett gemensamt projekt som de tar ett ömsesidigt ansvar för, håller det samman praktikgemenskapen. Ett ömsesidigt ansvar kan ge deltagarna energi till handlingar och nya idéer inom arbetslaget, samtidigt som olika regler och ramar har inflytande och påverkar arbetslaget. Dessa ramar kan bestå av nationella styrdokument som arbetslaget måste förhålla sig till eller kulturella mönster som behöver brytas.

> They [communities of practice] develop in larger contexts – historical, social, cultural, institutional – with specific resources and constraints. (Wenger, 1998, s. 79)

De olika reglerna och ramarna är alltså både en tillgång och en begränsning för arbetslaget. Även om ramarna har inflytande över det gemensamma projektet är det ändå deltagarna som genom ett ömsesidigt engagemang tar sig an det gemensamma innehållet. Då förskolans och skolans praktik har utvecklats utifrån olika historiska och kulturella kontexter finns det i denna studie förutsättningar att utmana det förgivettagna om undervisning.

Wenger (1998) anser att deltagarnas tolkning av vad det gemensamma projektet innebär inte behöver vara enhetlig. Oenigheten kan till och med vara produktiv för projektet. Det gemensamma projektet innefattar vad som har betydelse/inte har betydelse, vad som ska planeras/inte planeras, vad som är viktigt/inte viktigt, vad man ska vara uppmärksam på/se bort ifrån, vad man ska samtala om/låta vara osagt, eller vilka handlingar och redskap som är bra/behöver förbättras. Det gemensamma projektet är alltså en process, inte en statisk överenskommelse.

Det tredje karaktärsdraget för en praktikgemenskap är utvecklingen av kollektiva redskap. Kollektiva redskap inom en lärargemenskap kan utgöras av planeringsmallar, laborativt material, miniräknare, symboler, procedurer, testmaterial eller begrepp som verksamheten gemensamt producerat eller antagit och som används av alla inom praktiken. De kollektiva redskapen kombinerar både förverkligande och deltagande. I de kollektiva redskapen finns en inbyggd tvetydighet som är en resurs vid förhandling av ny mening inom en praktikgemenskap (Wenger, 1998). Om lärare tolkar ett matematiskt begrepp på olika sätt kan förhandlingar uppstå som leder till ny kunskap om det matematiska begreppet.

Förhandling av mening

Det stadieövergripande arbetslaget ses i denna studie som en praktikgemenskap där lärarna förhandlar mening. I en förhandling bygger lärarna vidare på det som gjorts eller sagts tidigare, det vill säga utifrån tidigare upplevelser och erfarenheter. Detta kan vara i form av motargument eller vidareutveckling av det som sagts. I begreppet förhandling ingår kontinuerlig interaktion i form av ett givande och tagande. Att endast bejaka och hålla med om det som sagts tidigare kan i Wengers mening inte kallas en förhandling. Det är när lärarna omtolkar, ändrar eller bekräftar som ny mening förhandlas. På så sätt skapas nya situationer, intryck och erfarenheter. Även rutinaktiviteter innefattar förhandling av mening, där intensiteten i processen ökar när lärarna involveras i aktiviteter som engagerar eller utmanar (Wenger, 1998).

I Wengers (1998) teori behöver förhandlingar inte leda till att lärarna uppnår enighet i samtalet utan det som diskuteras kan behöva fortsatt uppmärksamhet och justering. Att konstruera mening är en produktiv process som i denna studie kan innefatta samtal, deltagande i en aktivitet eller problemlösning. Dessutom innefattar förhandlingsprocessen ett engagemang i praktiken som upplevs meningsfullt. Ett ömsesidigt engagemang för ett gemensamt projekt är en förutsättning för förhandling av mening där deltagarna är intresserade av varandras erfarenheter och synpunkter.

Lärande handlar om förmågan att förhandla mening, det involverar hela personen i ett dynamiskt samspel i den skärningspunkt där deltagande och förverkligande förenas (Wenger, 1998).

Deltagande

Wenger (1998) beskriver deltagande som en social erfarenhet av att leva i världen som medlem i sociala gemenskaper och ett aktivt engagemang i sociala verksamheter. Deltagande är en aktiv process som kan ske genom handling, samtal, tänkande, känslor och tillhörighet där deltagarna har ömsesidig förmåga att förhandla. Denna ömsesidighet omfattar inte jämlikhet. En relation mellan en lärare och ett barn är ömsesidig i hänseende av att deltagarna formar varandras erfarenheter, men de är inte ömsesidiga i jämlikhetsaspekten.

Wennergren och Blossing (2016, 2017) beskriver deltagandet som motorn (drivkraften) i förhandlingen. Utan lärarnas deltagande sker inget samtal och därmed ingen förhandling. Förhandlingarna leder till nya erfarenheter som inte är begränsade till det specifika sammanhanget för deras engagemang utan kan tas med till nya sammanhang (Wenger, 1998). De erfarenheter lärarna gör kring undervisning om bråk inom både sitt eget och andras stadier kan alltså tas med till undervisning inom andra områden i matematik eller ämnen.

Wenger (1998) betonar att deltagande i sociala gemenskaper, så som ett arbetslag, formar våra erfarenheter som i sin tur formar arbetslaget, den transformativa potentialen går i båda riktningarna. Vår förmåga, eller brist på förmåga, att forma vårt arbetslag är en viktig aspekt för våra erfarenheter av deltagande. Deltagande är inte liktydigt med samarbete utan alla sorters relationer kan ingå, både konfliktrika och harmoniska.

Även om detta teoretiska perspektiv beskriver deltagande som en process med både handling, samtal, tänkande och känslor har jag i studien valt att enbart analysera lärarnas aktiva engagemang i förhandlingarna på analysmötena.

Förverkligande

Wenger (1998) beskriver att ”reification”, här översatt till förverkligande, har en central roll inom praktiken. Begreppet förverkligande används för att beskriva den process som formar våra erfarenheter genom att skapa objekt. De objekt som skapas inom ett arbetslag kan vara pedagogiska planeringar, berättelser om undervisningssekvenser, material med matematikuppgifter, redskap i form av laborativt material eller representationer, matematiska symboler, termer och begrepp. Ett exempel på förverkligande är när lärare planerar lektioner som fastställs i form av ett dokument. Denna förverkligandeprocess i planeringen kan innefatta utformning av en uppstart, designa en lektion eller beskriva vilka redskap som ska användas. Planeringsdokumentet används sedan i förhandling där innehållet behöver uppfattas, tolkas, användas i undervisning och kanske därefter omarbetas. Förverkligande används alltså för att både beskriva processen och produkten, då de alltid förutsätter varandra.

Förverkligande formar enligt Wenger (1998) våra upplevelser. Att använda olika redskap för att genomföra en aktivitet kan förändra karaktären på aktiviteten. Ett redskap i form av ett laborativt material kan förverkliga en aktivitet så att resultatet förstärks samtidigt som aktiviteten förenklas. Ett redskap kan även låsa fast en aktivitet på ett bestämt sätt. I denna studie används videofilmad undervisning som redskap för att skapa förhandlingar om undervisning kring området bråk.

Dualitet mellan deltagande och förverkligande

Wenger (1998) förtydligar att även om deltagande och förverkligande har sina distinkta skillnader så kan de inte ses som isolerade från varandra, de bildar ett par som är komplementära. Deltagande- och förverkligandeprocessen kan bli så tätt sammanvävda att skillnaden mellan dem nästan raderas ut. Mer konkret innebär det att förhandling av mening väver samman deltagande och förverkligande så att meningsfullhet blir en självklar ingrediens. Ett laborativt material i form av pizzor indelade i olika delar är endast ett laborativt material. Materialet i sig innehåller ingen matematik utan det krävs deltagande för att använda materialet och tolka bråkdelarna (Rystedt & Trygg, 2010). Deltagande är nödvändigt för att producera, tolka och använda förverkligande. Förverkligande sker inte utan ett deltagande (Wenger, 1998).

Deltagande och förverkligande måste finnas i sådana proportioner att de kompenserar för varandras begränsningar. Om det läggs för mycket tillit på en del på bekostnad av den andra är det troligt att kontinuiteten i mening blir problematiskt i praktiken. Om nivån på förverkligande ökar behöver även deltagande öka (Wenger, 1998). Detta får pedagogiska implikationer för undervisning då mycket av det som lärs i skolan, som bråk, är förverkligad kunskap, det vill säga bråktalen tillkom en gång i tiden för att kunna beskriva rationella tal. Risken är att undervisningen stannar vid en kunskapsförmedlande process varvid förverkligande får ett för stort utrymme och deltagande ett för litet. När det sker hamnar elevernas möjligheter att skapa sin egen förståelse i bakgrunden.

Undervisning

Undervisning i skolan kan enligt Wenger (1998) ses som en investering för framtidens samhälle, där nya identiteter formas och historia om lärande förs framåt. Undervisning bör inte vara en reproduktion av det förflutna eller en sorts kulturell överföring.

Undervisningsämnena finns förverkligade i form av kursplaner och läroböcker som ett mellansteg mellan praktik och elever. Ett exempel är textuppgifter som knyter matematik till vardagliga situationer. Att reducera kunskap till förverkligade objekt kan skapa en illusion av att det finns en enkel, direkt och oproblematisk relation mellan delar av ett undervisningsämne och individuella elever. Ett förverkligande kan innebära att kunskap lyfts ut från praktiken och sålunda leda till att behovet av deltagande undviks. Utifrån ett sådant perspektiv kan förverkligande vara problematiskt. Vad ett undervisningsämne kommer att betyda för elevers liv beror bland annat på vilka former för deltagande som möjliggörs. Om kunskapen är förverkligad, dekontextualiserad och procedurinriktad kan lärande leda till en spröd förståelse av ämnet och en snäv tillämpbarhet, där eleverna inte blir ägare av dess mening. Det gäller att balansera producerandet av förverkligat material med former för deltagande för att erbjuda en ingång till praktiken. I denna balansakt ligger fokus på förhandling av mening på mekanisk informationsöverföring och förvärvande. Dock finns det mekaniska involverat i lärande som utveckling av automatiserande. Enligt Wenger bör det mekaniska inte hamna i fokus i undervisning då han framhåller att undervisning inte är likställt med lärande. Det som lärs behöver heller inte vara det som var avsett för undervisningen. Undervisning kan däremot skapa ett sammanhang där lärande sker.

I undervisningen behöver det enligt Wenger (1998) finnas en växelverkan mellan det planerade och det spontana som eleverna bidrar med. Undervisningen måste kunna vara anpassningsbar. Detta får dock inte tolkas som en låt-gå-mentalitet. En växelverkan mellan det planerade och det spontana handlar om förmågan att få en växelverkan mellan undervisning och lärande så att de blir strukturerade resurser för varandra. Det som spontant kommer upp i undervisningen kan vara elevernas olika förståelse av innehållet, i denna studie bråk, och att lärare tar hänsyn till detta i sin undervisning. I föreliggande studie får lärarna möjlighet att studera egen och andras undervisning samt reflektera över elevernas förståelse och hur undervisningen kan anpassas baserat på deras förståelse.

Studiens utformning utifrån praktikgemenskap

Den inledande aktionen som genomfördes i denna studie var att lärare från olika stadier erbjöds att delta i ett nytt tillfälligt arbetslag, en ny praktikgemenskap. Tanken var att skapa en lärandesituation kring ett gemensamt projekt, undervisning om tal i bråkform, för att synliggöra undervisningens innehåll och kvalitet från förskola till högstadiet. Lärare från olika stadier med ett gemensamt intresse för undervisning om bråk fick ingå i ett gemensamt ansvarstagande för elevernas lärande för att synliggöra progression av undervisning mellan stadierna.

Förskolläraren ingick i ett arbetslag med sina närmaste medarbetare på förskolan och lärarna i olika arbetslag på skolan, det vill säga de ingick även i andra praktikgemenskaper. Lärarna i det nybildade arbetslaget var inte en homogen grupp, även om alla är lärare, och hade erfarenheter av undervisning från olika stadier. De har alla olika kompetens inom såväl matematik som inom matematikdidaktik. När lärare får planera och reflektera över undervisning i andra åldrar än vad de i vardagliga fall gör, kan de utmanas på nya sätt, vilket kan leda till att lärande om undervisning i bråk intensifieras. Lärarnas olika kompetenser och erfarenheter kan vara förutsättningar för att ny gemensam förståelse om undervisningen i ett 1-16-års perspektiv förhandlas fram.

I studien används två centrala redskap som utgångspunkt för förhandling. Det ena redskapet är en sammanställd kartläggning av elevernas förståelse som utgångspunkt för att förhandla fram planeringar för undervisning om bråk. Det andra redskapet är videofilmad undervisning där lärarna på analysmöten får tolka elevernas förståelse av bråk. Lärarnas analys blir en utgångspunkt för att skapa nya förverkligande idéer om undervisningen. Dessa förverkligande idéer om undervisning kan bilda en kollektiv redskapsbank för undervisning.

En annan viktig aspekt vid utformningen av studien var att finna en balans mellan förverkligande och deltagande. Lärarnas deltagande i ett nytt arbetslag kan forma deras erfarenheter och den praktik som de ingår i. I denna studie är tanken att lärarna i hög grad får interagera, som med till exempel kartläggning av elevernas förståelse, tidigare egna erfarenheter av läraryrket, lärare från andra stadier, matematikdidaktiska texter och nya upplevelser och erfarenheter genom videofilmad matematikundervisning, detta för att upprätthålla en balans mellan förverkligande och deltagande. Genom att skapa premisser för lärarnas aktiva engagemang, skapas förutsättningar för att ny kunskap om undervisning i bråk kan förhandlas fram.

Analysbegrepp i studien

Nedan sammanfattas de begrepp som används vid analysen av data, för att tolka och förstå arbetslagets lärande om undervisning i bråk. Wenger lyfter fram fyra komponenter som förutsättningar för lärande, varav en används vid denna analys; mening – lärande som upplevelse och erfarenhet. Dessutom används Wengers tre dimensioner av en praktik.

Förhandling används för att synliggöra de förhandlingar och samtal som sker inom praktikgemenskapen för att uppnå en gemensam mening om kvaliteter i undervisningen från förskola till årskurs 9. Lärarnas deltagande och förverkligande ämnar synliggöra arbetslagets betydelse för progression i undervisning. Deltagande och förverkligande ska i denna studie skapa möjlighet att förstå de erfarenheter som lärarna gör om undervisning inom praktikgemenskapen. Förverkligande innebär att lärarna konkretiserar och sätter ord på sina erfarenheter av undervisning.

Gemensamt projekt, ömsesidigt engagemang och utveckling av kollektiva redskap används som analysbegrepp för att studera kvaliteter inom arbetslaget. Eftersom lärande påverkar dessa tre praktikdimensioner är de av intresse att studera i det nybildade arbetslaget. Lärandet handlar om att utveckla förmågan att förhandla mening och att komma med nya idéer som kan utveckla praktiken.

Förståelse för det gemensamma projektet handlar om vad lärarna definierar som projekt. Det innefattar vad lärarna väljer att prata om och vad de är uppmärksamma på, vilken undervisning som uttrycks som framgångsrik, respektive behöver förbättras eller utvecklas.

Ömsesidigt engagemang används för att synliggöra lärarnas intresse för det gemensamma projektet och för varandras erfarenheter och synpunkter. Begreppet används även för att synliggöra hur alla kommer till tals och uttrycker sina synpunkter. Ömsesidigt engagemang handlar även om att upptäcka vem som är vem, vad de är bra på och vem som kan vad.

Utveckling av kollektiva redskap används för att synliggöra omförhandlad mening, det vill säga utveckling och införande av nya redskap, omarbetning eller förkastande. Olika redskap används i undervisning som ett stöd i elevernas förverkligandeprocess kring ett specifikt innehåll. Redskapen kan bli en utgångspunkt för lärarna att förhandla fram ny mening om en undervisning som ställer stegvis ökande krav. Förhandlingarna kan leda till ny förståelse alternativt att tidigare förståelse förstärks. Inom praktikgemenskapen utvecklas därigenom rutiner, redskap, symboler, vanor och historier som en integrerad del av lärares professionsutveckling.

Kapitel 4 Tidigare forskning

I detta kapitel beskrivs forskning om: progression i undervisning, elevers förståelse av bråk och undervisning om bråk.

Progression och stadieövergångar

I denna uppsats handlar progression om att svårighetsgraden i undervisningens innehåll ökar. Säfström (2017) definierar progression med att det ställs successivt ökande krav inom en utbildning, i en serie av lektioner, eller i ett läromedel, som är möjliga att uppnå med hjälp av tidigare förväntade kunskaper. Då ordet progression används både för att beskriva progression i undervisning och progression i elevers lärande är det inte alltid enkelt att avgöra vilken typ av progression som avses i texter. I de flesta studier används progression för att beskriva elevers lärande.

Stigler och Hiebert (2009) har studerat hur undervisningskulturen mellan länder som USA och Japan skiljer sig åt. För lärarna i USA var målet med matematikundervisningen att eleverna ska bli skickliga utförare av procedurer. Synen på lärande var att ju mer träning eleverna får, desto lättare flyter utvecklingen på. Lärarna förevisade en procedur och eleverna tränade på den, tills de behärskade den. Därefter gick lärarna igenom en något svårare procedur. Genom att stegvis öka svårighetsgraden på innehållet undvek lärarna att eleverna gjorde misstag. För undervisning om addition av bråk innebar sättet att undervisa att eleverna först introducerades för addition av bråk med samma nämnare och sedan för addition av bråk med olika nämnare. De första uppgifterna med olika nämnare innehöll enklare bråktal som $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ där eleverna uppmärksammades på vad som händer om man adderar nämnarna. När eleverna hade tränat på liknande uppgifter infördes stegvis mer komplexa uppgifter i undervisningen. Lärarna i Japan hade en annan strategi för elevernas lärande i sin matematikundervisning. Eleverna löste utmanande problem för att sedan delta i helklassdiskussioner kring hur uppgiften kunde lösas på olika sätt. Målet med undervisningen var att eleverna ska bli medvetna om olika lösningsmetoders fördelar och nackdelar och relationen mellan dem. Frustration och förvirring var en naturlig del i lärandeprocessen. Att göra misstag för att sedan inse varför det var ett misstag sågs som en viktig del av lärandeprocessen. Förutom att länderna hade olika undervisningskulturer låg undervisningsinnehållet på en högre nivå i Japan än i USA (Stigler & Hiebert, 2009). Resultaten kan tolkas som att progressionen i den japanska undervisningen var större än i den amerikanska och att de två olika praktikerna bidrog till olika former av progression.

I Sverige arbetar eleverna ofta enskilt med uppgifter i läroböcker. Genom böckernas exempel löser eleverna uppgifter genom imitativa resonemang (Larson, 2014). Detta sätt att undervisa ligger närmre det amerikanska sättet att undervisa, än det japanska.

Schoenfeld (2014) nämner inte begreppet progression, men lyfter fram att utmaningar är betydelsefulla för elevers lärande i matematik. Om elever mestadels tillämpar memorerade procedurer och/eller arbetar med rutinuppgifter får de inte tillräckliga utmaningar. Istället förespråkar Schoenfeld att lärare stödjer elever i produktiv kamp (översatt från productive struggling) för att bygga upp förståelse och engageras i en matematisk praktik. Stigler och Hiebert (2009) uttrycker likt Schoenfeld att det inte räcker att försvåra det matematiska innehållet. Istället behöver undervisningen bygga på förståelse och inte att mekaniskt lösa uppgifter.

Studierna och nationella utvärderingarna som jag presenterar nedan kring stadieövergångar har samlat in data genom intervjuer med elever och pedagoger samt genom att granska undervisning. Studierna belyser att progressionen mellan olika skolformer och stadier inte är tillfredsställande. Ackesjö (2014) beskriver att barn möter samma aktiviteter både i förskola och förskoleklass. Skolinspektionens (2015) granskning visar att undervisningsinnehåll och arbetsmoment tenderar att vara likartade i både förskoleklass och årskurs 1. Femåringar riskerar därmed att möta samma aktiviteter både i förskola, förskoleklass och årskurs 1 (Utbildningsdepartementet, 2016).

En grekisk studie följde undervisning i geometri med elever från 10 till 13 år, vilket innefattar en stadieövergång. Studien visar att lärarna på det högre stadiet inte byggde vidare på elevernas tidigare kunskaper (Sdrolias & Trianafillidis, 2008).

Utifrån tidigare studier, som visat att studenter upplevde uppgifter på högskolan mer komplexa och utmanande jämfört med på gymnasiet, valde Larson (2014) att studera stadieövergången mellan högstadiet och gymnasiet. Larson fann inte någon större skillnad i komplexitet på matematikinnehållet. Båda stadierna fokuserade dessutom på att producera lösningar, till skillnad från att motivera och ge förklaringar på lösningar.

Tal i bråkform från förskolan upp till årskurs 9

Bråk har historiskt uppkommit utifrån ett behov att uttrycka stora enheter som mil och timme i mindre delar, till exempel en halvmil ($\frac{1}{2}$ mil) och en kvart ($\frac{1}{4}$ timme) (jfr. Skott, Hansen, Jess & Schou, 2010). Tal i bråkform används för att uttrycka resultatet av vissa divisioner exakt, vilket vårt decimalsystem inte klarar av. Ett så enkelt bråk som en tredjedel kan vara svårt att hantera då det har en oändlig periodisk decimalutveckling (McIntosh, 2008).

Forskare är inte eniga om det är bättre att introducera bråk för barn när de har förståelse för både heltal och kvantiteter eller om det är bättre att barn introduceras för dessa parallellt. Utifrån Piagets teori, att barn förstår rationella tal först i tonåren, är det önskvärt att undervisningen om bråk startar först i mellanstadiet och framåt (Lamon, 2007). Andra forskare som uppmärksammat att barn i 4-årsåldern klarar av att utföra enklare additioner av bråk förordar att bråk undervisas i alla åldrar (Lamon, 2007; Mix, Levin & Huttenlocher, 1999). Bråk nämns inte i förskolans läroplan (Skolverket, 2016a) utan nämns först i förskoleklassen som ett centralt innehåll (Skolverket, 2017c). Förskolans läroplan skriver däremot fram att barn ska utveckla förståelse för talbegrepp. Detta inbegriper tals uppdelning i lika stora delar och kan ses som en förkunskap till bråk (Baroody, Lai & Mix, 2006).

Schoenfeld (2007) lyfter fram att bråk är ett komplext innehåll för elever att förstå. Komplexiteten beror på att bråk består av flera delar som till exempel: täljarens och nämnarens betydelse för att bestämma storlek på bråk, bråk som del av helhet (och att delarna måste vara lika stora), ekvivalenta bråk, jämföra storlek på bråk, bråk större än 1, areamodeller för bråk, bråk på tallinje, förkorta och förlänga bråk, bråk översatt till decimaltal och procent samt addition, subtraktion, multiplikation och division av bråk. Forskning visar att elever har olika förståelse kring de olika delarna inom bråk. Dessa delar har dessutom samband mellan varandra och elever lyckas i varierande grad utveckla förståelse för dem. Elever kan ha förståelse för en del inom bråk på både mer eller mindre framgångsrika sätt samtidigt. Dessutom kan en elev som visat förståelse för del/helhet på flera uppgifter helt plötsligt i en liknande uppgift använda sig av en felaktig strategi. En förklaring visar på komplexiteten att få alla pusselbitar på plats, och att en undervisning inriktad på procedurer kan förbise denna typ av problematik. Då hamnar fokus i stor utsträckning på det mekaniska genomförandet (Schoenfeld, 2007). Undervisning som bygger på procedurer kan dessutom leda till att elever inte klarar av att förklara sina lösningsmetoder även om de gjort en korrekt uträkning (Mix, Levin & Huttenlocher, 1999).

Elevers förståelse av bråk

Det finns flera studier genomförda kring elevers förståelse av bråk som pekar på återkommande svårigheter. Alla visar på vikten av att känna till elevernas förståelse och ta utgångspunkt i dem för att få progression i undervisningen (Ball, 2007; Schoenfeld, 2014; Säfström, 2017). De studier som valts för litteraturbakgrunden kring elevers förståelse av bråk omfattar nästan enbart barn och elever i förskolan upp till årskurs 6, trots att denna studie riktar sig hela vägen upp till årskurs 9. De internationella studier som jag funnit mot högstadiet tar mestadels upp mer avancerade matematiska uppgifter, till exempel addition av bråk i algebraisk form (Dhlamini & Kibirige, 2014). Dessutom visar studierna att elever i årskurs 6 har liknande svårigheter som de yngre eleverna. Då progression är av intresse skrivs elevers ålder i olika studier fram.

Att skriva och uttrycka bråktal

Studier visar att det kan vara en svårighet för elever att det är samma symboler som används för att både skriva heltal och tal i bråkform. Elever har ofta flera års erfarenhet av heltal innan de startar med tal i bråkform varför det finns en risk att dessa erfarenheter tar överhand när de tolkar bråk (Mix, Levin & Huttenlocher, 1999).

Forskare är inte eniga om barn ska introduceras för skrivna symboler efter att de har utvecklat förståelse för bråk eller om det kan ske genom en växelverkan mellan förståelsen och skriftliga uppgifter. För att ta reda på detta intervjuade Brizuela (2005) tjugofyra 5- och 6-åringar för att synliggöra om deras skrivna symboler har samband med den begreppsliga förståelsen. 6-åringarna hade fått en direkt undervisning om bråk till skillnad från 5-åringarna. När barnen fick i uppgift att skriva ett bråk använde sjutton av barnen siffror. Tolv svar var dock icke-konventionella sätt att skriva bråk på. Bland 6-åringar var det fler som såg halvor som ”små bitar”, något som är mindre än ett, än bland 5-åringar. Detta fick till följd att 6-åringarna uppfattade sju och en halv som mindre än sju, då en halv är mindre än ett. Dock var det fler 6-åringar som skrev några av bråktalen korrekt. Brizuelas (2005) slutsats utifrån studien är att barn behöver skriva bråk med symboler för att utveckla en komplett förståelse.

Andra forskare har tvärtom studerat hur elever muntligt uttrycker skrivna bråk. Vid en intervju med elever i årskurs 3 till 6 uttryckte eleverna $\frac{1}{2}$ som ”en och en halv” eller som ”en halv av två”. Detta sätt att uttrycka bråk fick konsekvenser när eleverna skulle placerar talen på en tallinje (Wong, 2013).

Bråk som del av helhet

När elever ska dela en helhet i bråkdelar behöver de utgå från helhetens storlek och dela den i lika stora delar. I en äldre studie från 1993 fick elever i årskurs 2, 3 och 6 i uppgift att dela snören i andredelar respektive tredjedelar och fjärdedelar. Eleverna i årskurs 2 och 3, men även en av de elva i årskurs 6, klippte snörena på måfå för att sedan jämföra bitarna. När de upptäckte att bitarna var olika långa klippte de bort överskottet så att de fick samma längd. Även om eleverna visade förståelse för att delarna ska vara lika stora missade de att ta hänsyn till helheten. Eleverna fick även i uppgift att markera $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ och $\frac{1}{4}$ av olika figurer. Eleverna var noga med att delarna blev lika stora när de markerade $\frac{1}{2}$ men inte alls lika noga när det gällde tredjedelar och fjärdedelar (Neuman, 1993). I en nyare studie fick ett par tusen elever i grundskolan genomföra diagnoser[5]. Lösningsfrekvensen på uppgifter som testar att helheter ska delas upp i lika stora delar låg på 36 % i årskurs 4 och 61 % i årskurs 5 (Löwing, 2016).

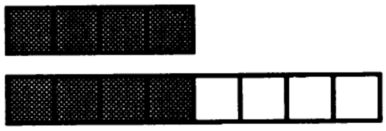
Ekvivalenta bråk

Elevers svårigheter kring ekvivalenta bråk är att de felaktigt fokuserar på antalet delar eller delarnas storlek. När elever i årskurs 3 jämförde två bråk av samma storlek, $\frac{3}{3}$ och $\frac{5}{5}$, uttryckte några elever att $\frac{3}{3}$ var störst eftersom varje del $(\frac{1}{3})$ är större. Andra elever beskrev att $\frac{5}{5}$ var störst för den innehåller fler delar (Ball, 1993). Elever i årskurs 1 använde liknande argument när de jämförde $\frac{1}{3}$ och $\frac{2}{6}$. Några elever uttryckte att $\frac{1}{3}$ var störst för den har störst delar, medan andra uttryckte att $\frac{2}{6}$ var störst eftersom den har flest delar (Empson, 1999). För att skapa förståelse för ekvivalenta bråk behöver elever känna till vad begreppen fler och större betyder eftersom det handlar om att utgå från hela kvantiteten, inte antalet delar eller storleken på delarna (Ball, 1993).

[5] Löwing (2016) benämner diagnoserna för diamantdiagnoser.

Jämföra storlek på bråk

När elever ska jämföra storleken på bråk behöver de utgå från att helheterna har samma storlek. En elev i årskurs 3 som jämförde $\frac{4}{4}$ och $\frac{4}{8}$ valde att rita bilden på följande sätt:



Figur 4.1. Helheterna måste vara lika stora när två bråk ska jämföras (Ball, 1993, s. 6).

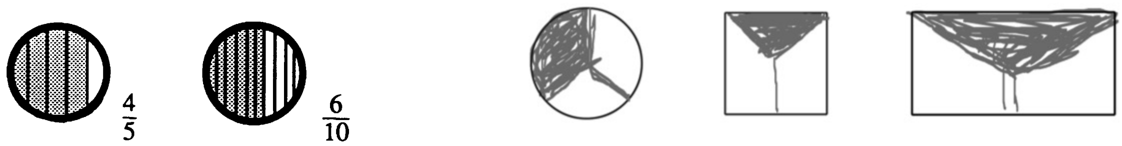
Bilden ledde till att eleven tolkade $\frac{4}{4}$ och $\frac{4}{8}$ som lika stora tal (Ball, 1993). Andra svårigheter som uppstår när elever jämför två bråktal är att de felaktigt fokuserar på antal delar som helheten delas upp i eller storleken på varje del. En elev i årskurs 6 som jämförde $\frac{1}{4}$ och $\frac{7}{8}$ ritade korrekta cirkelmodeller på de båda bråktalen men uttryckte att $\frac{1}{4}$ var ett större tal för det har större delar (Ball, 2007). När elever fokuserar på antalet delar kan det bero på att de använder sina kunskaper om hela tal, även på bråk (Empson, 1999; Mack, 1990). I en annan studie gav alla elever i årskurs 6 korrekt svar när de jämförde bråk utifrån en vardagskontext; från vilken pizza får du mest, en pizza uppdelad i 6 lika stora delar eller en pizza uppdelad i 8 lika stora delar. När eleverna sedan fick avgöra om $\frac{1}{6}$ eller $\frac{1}{8}$ var störst utan ett vardagligt sammanhang, svarade majoriteten av eleverna $\frac{1}{8}$ med motiveringen att 8 är ett större tal än 6. När eleverna jämförde $\frac{4}{5}$ och $\frac{5}{6}$ uttryckte de att talen är lika stora eftersom det fattas en bit i varje (Mack, 1990). Eleverna i Empsons (1999) studie hade liknande svar när de jämförde två stambråk, $\frac{1}{3}$ och $\frac{1}{4}$. De uttryckte att $\frac{1}{4}$ är störst eftersom den innehåller flest delar. Även Siegler och Pyke (2013) fann att en tredjedel av eleverna i årskurs 6 och 8 antingen fokuserar enbart på täljaren eller på nämnaren för att avgöra storleken på bråk.

Även när elever jämför bråktal som del av antal använder de sina kunskaper om de hela talen. Elever på lågstadiet tolkade nämnaren som antalet i varje del, att det är 3 föremål i $\frac{1}{3}$ och 4 föremål i $\frac{1}{4}$, det vill säga 3 i varje grupp respektive 4 i varje grupp. Detta ledde till att eleverna tolkade $\frac{1}{4}$ som ett större tal än $\frac{1}{3}$ (Empson, 1999; Neuman, 1993).

Studier genomförda på låg- och mellanstadiet visar att även täljaren tolkades som antal objekt i varje grupp, det vill säga att $\frac{2}{3}$ av 6 kakor innebär 2 kakor (Ball, 1993; Kullberg & Runesson, 2013). När täljaren tolkas som ett antal får det konsekvenser när elever storleksordnar bråk. Eleverna ser $\frac{2}{5}$ som ett större tal än $\frac{1}{2}$ eftersom $\frac{2}{5}$ innehåller fler bitar (Empson, 1999).

Areamodeller för bråk

En viktig aspekt kring areamodeller för bråk är att delarna ska vara lika stora. Flera studier visar att elever på låg- och mellanstadiet inte tar hänsyn till delarnas storlek varken när de tolkar areamodeller på bråk eller illustrerar bråk genom areamodeller (Ball, 1993; Neuman, 1993). Några elever i Balls (1993) studie valde att illustrera bråk genom att rita in vertikala linjer i en cirkel, vilket fick till följd att delarna blev olika stora. En tolkning av detta är att eleverna ser till antalet och inte till storleken av delarna. En annan tolkning är att eleverna är vana vid att representera bråk med hjälp av rektanglar där det fungerar att rita vertikala linjer. Dock är det svårare att dela in en cirkel i lika stora delar i jämförelse med en rektangel. Ball (1993) liksom Löwing (2016) uppmärksammade att elever i årskurs 2 använde sina kunskaper om att markera $\frac{1}{3}$ av en cirkel även på andra figurer, vilket ledde till att delarna blev olika stora. Båda forskarna drar slutsatsen att elever behöver möta olika former på helheter för att få erfarenheter av att det inte finns ett sätt att markera bråk som gäller för alla former.



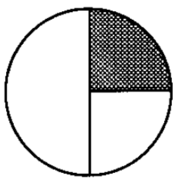
Figur 4.2. Elever uppfattar inte att delarna ska vara lika stora (Ball, 1993, s. 28; Löwing, 2016, s. 201).

Eleverna i både Balls (1999) och Empsons (1999) studie fick tolka olika areamodeller på bråk och räknade då antalet skuggade delar. Den vänstra bilden i figur 4.3, uttrycktes som två fjärdedelar i Balls (2007) studie, medan den högra bilden, uttrycktes som en tredjedel i Empsons (1999) studie.

Figur 4.3. Areamodeller som används i studier av Ball (2007, s 249) och Empson (1999, s. 302).

Det förefaller som eleverna har gått till väga på olika sätt för att få fram nämnaren. I Balls (2007) studie verkar det som att eleverna har räknat alla delarna, medan eleverna i Empsons (1999) studie enbart räknat de som inte är skuggade.

En annan problematik kring delarnas storlek visade sig när eleverna i Empsons (1999) studie tolkade bilden som $\frac{1}{4}$ (figur 4.4). De uttryckte att bilden inte representerar $\frac{1}{4}$ eftersom delarna är olika stora och består av 3 delar. Eleverna höll fast vid att det saknas en linje i den vänstra halvan för att färdigställa uppdelningen. Om linjen ritas dit förändras storleken på bråket.



Figur 4.4. Areamodeller som används i Empsons studie (1999, s. 328).

Ball (1993) fann att elever i 9-årsåldern har en visuell bild av till exempel $\frac{1}{4}$, att den har en bestämd form (figur 4.5).

Bild 4.5. Formen har betydelse för hur elever tolkar bråk (Ball, 1993, s. 17).

Elevernas svar kan bero på att de i skol-bråksuppgifter möter $\frac{1}{4}$ i form av en cirkel skuggad likt figur 4.5, vilket leder till att förståelsen av bråk baseras på ihågkomna bilder.

Bråk som del av antal

Elever behöver utveckla förståelse för att varje delmängd innehåller samma antal. För att urskilja likadelning som egenskap behöver barn även bli medvetna om kontrasten, i detta fall att dela olika (Lo, 2014). I Doverborgs (1985) och Pramling Samuelssons (1994) intervjustudie med 5- och 6-åringar fick barnen i uppgift att fördela nio enkronor respektive nio knappar i två askar. Fler än hälften av barnen valde att fördela det ojämna antalet jämnt, det vill säga de la fyra i varje ask och en åt sidan. Att *dela* betyder i detta sammanhang att *dela lika*. Doverborg (1985) kom fram till att förskolebarn som får i uppgift att dela frukt eller leksaker delar efter en rättviseprincip.

När elever på lågstadiet delade upp kvantiteter i andredelar, tredjedelar och fjärdedelar hade eleverna lättare för att dela i andredelar och i fjärdedelar, då de kunde använda sig av strategin halvera halvan. Strategin att dela halvan i halvor användes av någon elev för tredjedelar. Några elever uttryckte att det var omöjligt eller otillåtet att dela i tredjedelar (Empson, 1999; Neuman, 1993).

Elever i årskurs 4 fick i uppgift att lägga ägg (kuber) i en äggkartong för att demonstrera bråk som del av antal. Några elever visade $\frac{1}{3}$ och $\frac{2}{6}$ genom att multiplicera täljaren med nämnaren, det vill säga $\frac{2}{6}$ innebar att de 2 gånger la 6 kuber i äggkartongen och $\frac{1}{3}$ att de 1 gång la i 3 kuber. Några elever visade $\frac{3}{4}$ genom att addera täljaren med nämnaren. Eleven la först dit 3 kuber och sedan 4 kuber till. Ytterligare ett sätt som blev synligt var att några elever la 2 kuber i översta raden och 6 kuber i nedersta raden för att demonstrera $\frac{2}{6}$ (Behr, Wachsmuth & Post, 1988).

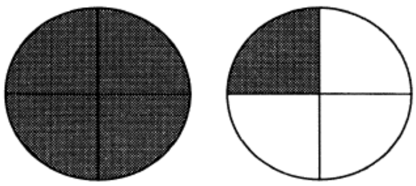
Bråk på en tallinje

En svårighet som uppmärksammats när det handlar om bråk på en tallinje är att barn i 5- och 6-årsåldern utgår från sina tidigare erfarenheter av heltal. I studien av Mix, Levin och Huttenlocher (1999) fick barn se en tallinje där en cirkel var placerad där talet 1 skulle stå, två cirklar där talet 2 skulle stå och tre cirklar där talet 3 skulle stå. Barnen fick bilder i form av cirklar på $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $1\frac{1}{2}$, med flera och fick i uppgift att placera ut bilderna där ”de hör hemma” på tallinjen. De flesta av barnen placerade sina bilder ovanpå de utplacerade heltalscirklarna. Istället för att placera $1\frac{1}{2}$ mellan 1 och 2 cirklar på tallinjen placerade barnen $1\frac{1}{2}$ ovanpå de två cirklarna och motiverade det med att båda talen innehåller två delar. Detta resultat stämmer även överens med Balls (1993) studie där eleverna uttryckte att det inte finns några tal mellan heltalen på tallinjen.

En annan problematik som framkom i Wongs (2013) studie med elever i årkurs 3 till 6, var när eleverna fick i uppgift att placera talet $\frac{1}{2}$ på tallinjer som stäckte sig från 0 till 3 alternativt från 0 till 4. Av 350 elever var det endast 50 elever som placerade $\frac{1}{2}$ korrekt. De vanligaste misstagen var att eleverna placerade $\frac{1}{2}$ mitt på tallinjen alternativt mitt emellan talet 1 och 2. När eleverna i årskurs 5 och 6 fick i uppgift att placera ut talet $\frac{3}{2}$ på en tallinje som sträckte sig från 0 till 3 var det färre som svarade rätt. De flesta placerade $\frac{3}{2}$ någonstans mellan talet 2 och 3. Genom djupintervjuer med några av eleverna upptäckte Wong att de uppfattade uppgiften "placera ett kryss vid $\frac{1}{2}$" som något som ska "göras". Det innebar att eleverna delade tallinjen i två delar till skillnad från att talet har en bestämd plats på tallinjen. En annan problematik var att eleverna använde täljaren och nämnaren som ledtrådar på ett felaktigt sätt, att $\frac{2}{3}$ ska placeras mellan talet 2 och 3.

Bråk större än 1

En del elever i Macks (1990) studie beskrev att bråk är mindre än 1 vilket ledde till att bilden nedan tolkades som $\frac{5}{8}$.



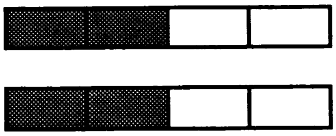
Figur 4.6. Elever ser bråk som något som är mindre än 1. Bilden tolkas som $\frac{5}{8}$ (Mack, 1990, s. 22).

När eleverna fick höra att det handlade om pizza ändrade de sitt svar till $1\frac{1}{4}$ men när uppgiften presenterades i en konkret kontext kunde de bestämma nämnaren korrekt (Mack, 1990).

Addition och subtraktion av bråk

I en studie kring addition och subtraktion av bråk uppmärksammade Ball (1993) hur elever använde olika representationer för att lösa uppgifterna. När eleverna använde tallinjen för att beräkna $\frac{2}{4} + \frac{2}{4}$ kom de fram till svaret $\frac{4}{4}$ eller

1. När de istället ritade rektanglar för att lösa samma uppgift kom de fram till svaret $\frac{4}{8}$ (figur 4.7).



Figur 4.7. När $\frac{2}{4}$ adderas med $\frac{2}{4}$ tolkas areamodellen som att både täljare och nämnare ska adderas. Då synliggjordes en brist i hur representationen ska användas (Ball, 1993, s. 8).

Areamodellen fick eleverna att tro att både täljare och nämnare ska adderas. Det innebär inte att det är fel att använda areamodellen utan det finns en brist på överenskommelse i hur den ska användas. Elever behöver enligt Ball (1993) kunna använda sig av olika representationer för att lösa uppgifter.

Ett annat bekymmer, som även lyfts fram tidigare, är att elever får lära sig addition och subtraktion som en procedur genom utantillinlärning. En studie som genomfördes i USA på 1970-talet visade att många 13- och 17-åringar klarade av att lösa addition av bråk med samma nämnare. Däremot hade båda åldersgrupperna problem att lösa addition av bråk med olika nämnare. Utifrån den studien ansåg forskarna att eleverna saknade tillräcklig förståelse för de underliggande begreppen och processerna (Behr & Post, 1992; Carpenter, Kepner, Corbitt, Lindquist & Reys, 1980). Även i svenska studier med elever i årskurs 8 framkommer att 70-80 % av eleverna klarar av att lösa additions-uppgifter med samma nämnare medan endast 30-40 % klarar av att lösa additionsuppgifter med olika nämnare (Löwing, 2016). Den procedurella aspekten i förståelsen lyfter även Ball (2007), Erlwanger (1973) och Mack (1990) upp som alla intervjuat elever i årskurs 6. Benny, en elev som Erlwanger intervjuade, undervisades efter ett särskilt program (IPI[6]) som innebär att elever arbetade individuellt med uppgifter. Enligt lärarens bedömning var Benny en av de bästa i klassen i matematik, då han hade kommit långt inom programmet. Bennys syn på addition av bråk var att det fanns hundra olika uppfunna regler. Beroende på bråkets nämnare kunde Erlwanger tolka fyra olika regler för addition av bråk (figur 4.8).

$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$ ex. $\frac{3}{10}+\frac{4}{10}=\frac{7}{10}$

$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$ ex. $\frac{2}{1}+\frac{1}{2}=1$

[6] IPI: Individually Prescribed Instruction

$\frac{a}{b}+\frac{c}{c}=1\frac{a}{b}$ ex. $\frac{2}{3}+\frac{4}{4}=1\frac{2}{3}$

$\frac{a}{10}+\frac{b}{100}=\frac{a+c}{110}$ ex. $\frac{6}{10}+\frac{20}{100}=\frac{26}{110}$ (Erlwanger, 1973, s. 51)

Figur 4.8. Fyra olika regler för bråkräkning (Erlwanger, 1973, s. 51).

I den översta additionsuppgiften med samma tal i nämnaren adderade Benny täljarna. I den andra uppgiften $\frac{2}{1}+\frac{1}{2}$ adderade han både täljare och nämnare. Trots att Benny var medveten om att 2 dividerat med 1 är lika med 2 valde han ändå att addera de båda täljarna respektive nämnarna och dividerade slutligen 3 i täljaren med 3 i nämnaren och fick svaret 1 (Erlwanger, 1973). Denna regel förekom även i Balls (2007) och Macks (1990) intervjuer.

I Macks (1990) studie fanns ytterligare en regel för addition av bråk med olika nämnare (figur 4.9).

$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\times c}{b\times d}+\frac{a\times c}{b\times d}$ ex. $\frac{7}{8}+\frac{5}{6}=\frac{35}{48}+\frac{35}{48}$

Figur 4.9. Ytterligare en strategi fångad i Macks studie (1990) för bråkräkning med olika nämnare.

Erlwanger (1973) uppfattade att Benny följde regler snarare än resonemang. Inom IPI-programmet är svaret viktigare än vägen fram då det går ut på att fylla i rätt svar eller välja rätt svarsalternativ. Detta ledde till att Benny såg matematik som uppfunna regler som ska följas och inte som ett logiskt ämne där man kan resonera, analysera, göra generaliseringar, se samband och så vidare. Dessutom såg inte Benny att varje problem kan lösas på olika sätt, utan det fanns en regel för varje problem.

Några reflektioner kring studierna

En skillnad som jag ser mellan de svenska studierna och de internationella studierna är att vissa (miss)uppfattningar finns längre upp i åldrarna i de svenska än i de internationella. Ett exempel är Löwings (2016) studie med svenska elever där 39 % av eleverna i årskurs 5 inte hade kännedom om att delarna i en helhet ska vara lika stora. Internationella studier (Ball, 1993; Empson, 1999) lyfter fram dessa missuppfattningar på lågstadiet. Detta indikerar att svenska elever inte når samma nivå i matematik som elever från andra länder eller att undervisningen inte håller tydlig progression.

Undervisning om tal i bråkform

Erlwanger (1973) lyfter fram att alla elever inte gynnas av instruktioner, ensamarbete i egen takt eller tester. Även om en elev kan hantera innehållet och färdigheterna så betyder det inte att förståelsen finns. Studien visar begränsningarna med att undervisa med fokus på räkneprocedurer utan underliggande begreppslig förståelse. Även om studien genomfördes på 1970-talet är den fortfarande aktuell då Lithner (2008) skriver fram att läroböcker har en press på sig att designas så att elever blir självgående och klarar sig utan lärarens hjälp. Detta uppnås genom att eleverna löser uppgifterna genom att kopiera bokens färdiga exempel.

För att uppnå en undervisning som kan utmana och fördjupa elevernas begreppsförståelse förespråkar Stein, Engle, Hughes och Smith (2008) att lärare använder kognitivt utmanande problemlösningsuppgifter. Detta i sig är inte tillräckligt, utan det är kvaliteten i helkassdiskussionerna utifrån elevernas lösningar som är avgörande. Det centrala är att matematiska idéer lyfts fram för att utveckla och stärka förståelsen. Forskarna har utifrån sina studier tagit fram fem steg, eller som de kallar det fem praktiker, som ett stöd för lärare att bedriva helklassdiskussioner. Som första steg förutser läraren vilka olika strategier eleverna kommer att använda utifrån det valda problemet. Detta steg är en förberedelse inför lektionens genomförande. Under lektionen överblickar läraren elevernas lösningar, för att besluta vilka som ska presenteras och diskuteras i helklass. Därefter placerar läraren lösningarna i en ordning som möjliggör att elevernas förståelse fördjupas. Som sista steg kopplar läraren samman olika strategier och idéer för att eleverna ska nå en fördjupad begreppsförståelse.

Studier som är inriktade på bråk lyfter fram att undervisningen behöver ta utgångspunkt i barns och elevers informella kunskaper. Barn lär sig bråk genom att förändra och omorganisera sin kunskap utifrån tidigare erfarenheter (Empson, 1999; Mack, 1990; Pikethly & Hunting, 1996). En konsekvens blir dock att elever uppfinner alternativa algoritmer för till exempel subtraktionsberäkningar i bråk, varav en del är ineffektiva. Dessa används inte under en längre period utan ersätts med effektivare strategier så fort nya upptäcks (Mack, 1990). Matematik kan på detta sätt bli ett ämne där regler generaliseras utifrån matematiska begrepp och principer samtidigt som elever upptäcker att ett problem kan lösas på flera olika sätt (Erlwanger, 1973).

Empson (1999) liksom Pikethly och Hunting (1996) förordar att elever får arbeta med uppgifter kring likadelning. Barn behöver möta likadelning av helhet till delar, delning av delarna till mindre delar samt återkonstruktion till helheten. Det är viktigt att barn får flexibla begrepp av ental för att senare kunna tolka rationella tal. Barn utvecklar förståelse för bråk genom att bildligt och i handling utveckla språk och symboler. Brizuela (2005) lyfter fram att barns utveckling i att skriva bråktal och begreppsförståelse är en gradvis konstruerande process där relationen mellan den begreppsliga förståelsen och att skriva bråktal är komplex. Bråk finns med inom olika matematiska vardagliga kontexter, som att dela upp helheter och mängder och för att mäta tid. Dessa olika kontexter belyser olika aspekter av bråk och behöver utforskas tillsammans med barn i tidig ålder för att skapa hållbara begrepp kring bråk. Samtidigt som kontexten utforskas behöver den skriftliga delen uppmärksammas, även om den till en början är informell.

Lärares kunskap om elever och hur de förstår innehållet är centralt för att utforma undervisning. För att ta beslut om vilka laborativa material eller bilder som kan hjälpa elever att förstå bråk behöver lärare både ta hänsyn till vad eleverna ska lära sig och vad de redan vet. Ett exempel från Balls (1993) studie var när eleverna använde areamodellen för att jämföra två tal i bråkform (figur 4.1). Elevernas sätt att använda areamodellen ledde till uppfattningen att $\frac{4}{4}$ och $\frac{4}{8}$ är lika stora tal. Efter diskussion kom eleverna fram till att rektanglarna måste vara lika stora när talen jämförs. Om eleverna hade använt färdigstrukturerat material hade de inte fått tillfälle att möta och brottas med den komplexa begreppsapparaten och komma till matematiska antaganden (Ball, 1993). För att nå förståelse behöver undervisningen bygga på deltagande och en variation av resurser (Empson, 1999).

Forskning lyfter fram att division kan användas som metafor för att beskriva bråk (Clarke, 2006; Sveider, 2016). Elever som förstår bråk som en division kan lättare avgöra om $\frac{2}{3}$ eller $\frac{3}{5}$ är störst genom att tolka bråken som 2 kakor som delas mellan 3 personer respektive 3 kakor som delas mellan 5 personer (Clarke, 2006). Division kan även användas för att åskådliggöra täljarens och nämnarens funktion i ett bråkuttryck. Sveider (2016), som studerade laborativt material i bråkundervisning, beskriver att $\frac{1}{2}$ kan illustreras med 1 äpple som delas på 2 personer, för att visa vad täljaren och nämnaren står för.

Ett sätt att stötta elevernas begreppsförståelse är att de får arbeta med bråk på flera sätt; genom skrivna symboler, talade symboler, omvärldssituationer, laborativa modeller samt bilder (McIntosh, 2008).

Kapitel 5 Studiens genomförande

Utgångspunkten för denna studie är både att bidra med vetenskaplig kunskap och att förändra praktiken för deltagande lärare. För att uppnå båda dessa delar har studien en aktionsforskande ansats. De yttre ramarna utformades av mig som forskare och presenterades för intresserade lärare på den skola där studien skulle genomföras. Därefter har deltagarna varit med och påverkat processen, både före och under studiens gång.

Aktionsforskning som ansats

Aktionsforskning användes i denna studie för att utveckla lärarnas undervisning om bråk i ett 1-16-års perspektiv. Intentionen var att utveckla kunskap om progression i undervisning, särskilt riktat mot tal i bråkform, som är relevant för lärarkåren och som kan vara viktig för läraryrkets utveckling. Det långsiktiga målet var att utvecklingsarbetet ska gagna elevernas kunskapsutveckling. Studiens långsiktiga mål ligger i linje med internationell forskning om skolutveckling där Timperley (2011) riktar skarp kritik mot studier som enbart studerar lärares kompetensutveckling, man behöver även studera dess inverkan på elevers lärande.

Hela ansatsen är inspirerad av den nordiska aktionsforskningstraditionen där forskaren har en tydlig roll att leda processen (Rönnerman, 2012; Salo & Rönnerman, 2014; Somekh, 2006). Själva genomförandet kan beskrivas som praktisk aktionsforskning. Även om studien initierades av mig, som utomstående, var tanken att ge deltagarna inflytande över processen (jfr. Carr & Kemmis, 1986). Det innebar att jag forskade tillsammans *med* lärarna för att få tillgång till kunskap som annars inte är tillgänglig för forskare som kommer utifrån. Genom att inkludera och engagera lärarna i processen skulle det vara möjligt att uppnå den emancipatoriska intentionen i praktisk aktionsforskning (jfr. Hargreaves, 2004).

Det kollegiala lärandet är centralt för studien, där lärarna tillsammans delade och utvecklade ny förståelse för praktiken. Detta skedde bland annat genom att lärarna planerade och genomförde nya undervisningsidéer. Lärarna tog utgångspunkt i det kända från den egna praktiken för att sedan ge sig ut i det okända (jfr. Rönnerman & Salo, 2014). Genom att testa nya sätt att undervisa kan deltagarna även bli mer osäkra på vad som kommer att ske under lektionens gång. Denna osäkerhet gör att deltagarna blir mer känsliga för olika händelser i undervisningen (jfr. Loughran, 2006). Men det handlade inte enbart om att förändra praktiken, dokumentation och reflektion över undervisning var också centralt för att generera ny kunskap. Genom att konfronteras med undervisning på andra stadier möjliggjordes reflektion över det förgivettagna i den egna undervisningen. Nya insikter lades till redan etablerad förståelse och erfarenhet, vilket togs med in i nya aktioner (Rönnerman & Salo, 2014). De centrala grundtankarna i aktionsforskning är nära relaterat till Wengers teori (1998) där lärande sker genom deltagande inom arbetslaget.

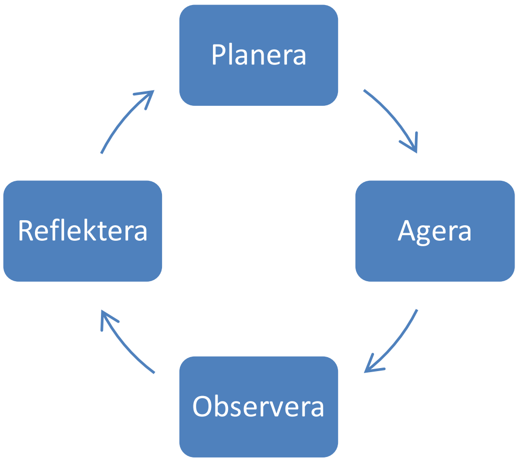
Min roll som handledare var komplex då jag dels stödde det nybildade arbetslaget genom hela processen, dels försökte vara deltagare i gemenskapen. En viktig uppgift var att upprätthålla ett demokratiskt samtal där alla kom till tals och där allas synpunkter räknades (jfr. Rönnerman & Salo, 2014; Salo & Rönnerman, 2014). Dessutom strävade jag mot att lärarna skulle få inflytande över både innehåll och process så att gruppen inte blev beroende av mig som forskare för att utvecklas vidare.

Förutom att aktionsforskning har potential att utveckla undervisning på vetenskaplig grund var intentionen att öka förståelse för praktiken och få kunskap om hur denna förändring går till (McNiff & Whitehead, 2006). Ett sociokulturellt perspektiv, som Wengers teori om lärande, kan ge betydelsefull information om samarbete och kollegial kunskapsutveckling inom aktionsforskning.

Studiens design

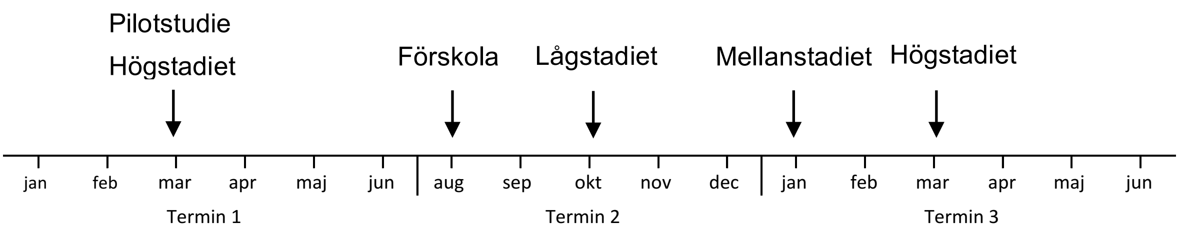
Utformningen av studien bygger på aktionsforskningsspiralens fyra faser: planera, agera, observera och reflektera (Carr & Kemmis, 1986; Kemmis & McTaggart 1988; Kemmis, McTaggart & Nixon 2014). Mina och lärarnas aktioner löpte parallellt. Min aktion innebar inledningsvis att ett nytt arbetslag skapades med lärare från olika stadier. Lärarnas aktioner innebar att de tillsammans planerade ny undervisning. Faserna följdes inte strikt utan användes som en riktlinje (jfr. McNiff & Whitehead, 2001). Designen anpassades till studiens syfte. Somekh (2006) förespråkar att aktionsforskaren arbetar flexibelt och undersöker nya möjligheter att utforma projektet istället för att utveckla och förfina traditionella sätt.

Inom ramen för studien genomfördes totalt fem cykler i arbetslaget (figur 5.1) varav en som en pilotstudie i årskurs 7 på högstadiet. Hela studien genomfördes under totalt tre terminer.



Figur 5.1. En schematisk bild över de olika aktionsforskningsstegen.

Första terminen genomfördes pilotstudien. Andra terminen genomfördes två cykler i huvudstudien, en i förskolan med 5-åringar och en på lågstadiet med årskurs 3. Tredje terminen genomfördes ytterligare två cykler, en på mellanstadiet med årskurs 5 och avslutningsvis en på högstadiet med årskurs 9 (figur 5.2). Varje cykel pågick under cirka två månader. Studien genomfördes i samarbete med fyra lärare: förskola, lågstadiet, mellanstadiet och högstadiet.



Figur 5.2. Schema över studien. Pilarna pekar på den månad då respektive cykel startade.

Urval

Det planerade forskningsarbetet låg inom ramen för ett pågående FoU-projekt där två Högskolor och tre kommuner var involverade. Högskolan i Halmstad hade kontrakt om samarbete med en kommun under 5 år där kommunledningen valt en skola med särskild låg måluppfyllelse. Den bakomliggande tanken var att lärarna skulle utveckla sin kompetens om undervisning i samarbete med en Högskola (Kroksmark, 2010; Wennergren, 2014). Samarbetet innebar även att lärarna prövade vetenskapliga förmågor för att kunna studera och förbättra undervisning.

Rektorn på skolan kontaktades tidigt under våren och informerades kort om studien. Rektorn pratade i sin tur med lärare på skolan och förskolan för att hitta några som var intresserade av att medverka i studien. Detta var ett ändamålsenligt urval (Cohen, Manion & Morrison, 2011), ett icke slumpmässigt urval av lärare från varje stadie som valdes för att passa studiens syfte.

Deltagare

Deltagande lärares namn är fingerade. Namnen börjar på samma bokstav som det stadium de arbetar på. Efter pilotstudien valde Lotta som arbetar på lågstadiet att hoppa av samarbetet och ersattes med Lisa. Eftersom Lotta inte deltog i de delar av studien som analyserades beskrivs hon inte i tabellen.

Tabell 5.1 Lärare som deltar i studien.

Fingerade namn	**Utbildning**	**Antal hp i matematik**	**Nuvarande arbete**	**Erfarenhet som lärare**
Fanny	Förskollärarutbildning	Ingen ren matematikkurs	Förskola	13 år
Lisa	Samhällsorienterande ämnen och barns lärande, F-klass-6	30 hp	Lågstadiet	5 år i förskola 3 år i åk 1-3
Martina	Ma/NO 1-7, samt idrott	15 hp	Mellanstadiet	11 år, även i åk 1-3 och 7-9
Hanna	Ma/NOTk, 4-9	45 hp	Åk 6-9	14 år

Planeringsfas

Design och datainsamlingsmetoder övervägdes noga för att säkerställa att tillvägagångssättet skulle generera svar på forskningsfrågan (Vetenskapsrådet, 2011). Samma vår som studien startade träffade jag de fyra tilltänkta lärarna tillsammans med rektor och informerade noggrant om studiens syfte, progression i undervisning om bråk och aktionsforskningsstegen; planeringsmöte, undervisning och analysmöte. Lärarna var positiva till att ingå i studien och rektorn såg värdet av ett samarbete mellan förskola och skola. Lärarna uttryckte att de inte hade tillräcklig kännedom om undervisning på andra stadier än sitt egna. Några uttryckte att bråk är svårt att undervisa om. Vid mötet planerades även praktiska detaljer som mötesplatser med mera.

I planeringsfasen genomfördes en pilotstudie i årskurs 7 för att testa genomförande, metoder och analysredskap, något som också kan påverka studiens trovärdighet. Pilotstudiens erfarenheter medförde inte några större förändringar för huvudstudien. Högstadieläraren var den som direkt tog initiativet på planeringsmötet och var den som skrev ner planeringen. Det resulterade i att högstadieläraren till viss del blev styrande i planeringen och därmed blev det svårt att säkerställa att innehållet i planeringen blev nytt för henne. Detta ledde till att jag blev tydligare med att fördela ordet mellan lärarna. Lärarna påmindes vid nästkommande möte om vikten att allas röster blir hörda och att allas tankar är lika värda. Det poängterades att tankar inte behöver vara färdigtänkta för att lyftas (jfr. Rönnerman & Salo, 2014).

Planeringsmötena inleddes med att litteraturen diskuterade. De två timmarna för mötet visade sig gå oerhört snabbt och det blev ont om tid att färdigställa planeringen. Diskussionen av litteratur fick därmed strykas. Detta ledde till att lärarna inte läste litteratur inför varje planeringsmöte.

Kartläggning

Inför varje cykel genomfördes en kartläggning för att få syn på elevernas förståelse av begreppet bråk. Kartläggningen var en viktig informationskälla då enbart klassläraren kände till elevernas kunskapsnivå. Kartläggningen genomfördes dels för att lärarna skulle ha möjlighet att ta utgångspunkt i elevernas kunskap och dels för att inte låta läromedlet bli styrande.

Kartläggningarna (bilaga 5, 7, 10 & 13) tog utgångspunkt i läroplan, kursplan, nationella prov, TIMSS-test och forskning kring bråk. Svårighetsgraden på testet gjordes utifrån vad som var lämpligt för denna studie, det vill säga det handlade inte om att rangordna elever utan om att få syn på deras förståelse. Oavsett stadie i grundskolan innehöll testen vissa frågor som var gemensamma.

I förskolan genomfördes kartläggningen som kortare samtal med två barn i taget, totalt 10 barn. Samtalen videofilmades. På låg-, mellan- och högstadiet var testen skriftliga och genomfördes i klassrummet utan tidsbegränsning. På låg- och mellanstadiet var jag närvarande i klassrummet när testen genomfördes medan högstadieläraren genomförde testen utan min medverkan. Kartläggningarna sammanställdes av mig för att synliggöra vilka områden inom bråk som eventuellt kunde visa sig vara problematiska och som planeringen därmed borde rikta in sig mot. Inför planeringsmötet fick lärarna ta del av sammanställningen.

Agerafas

Planeringsmöte

Ett planeringsmöte innehöll följande moment: laget runt med reflektioner från förra mötet, litteraturdiskussion, analys av kartläggning samt planering av två lektioner.

Lärarna träffades för att gemensamt planera en undervisningssekvens av två lektioner i bråk. Planeringsmötet startade med att lärarna läste upp sina sammanfattade reflektioner från förra cykeln ur sina loggböcker. Till dessa tillfällen hade lärarna läst litteratur som diskuterades (t.ex. Björklund, 2009; McIntosh, 2008; Solem, Alseth & Nordberg, 2011). Kartläggningen analyserades och utifrån den valdes vilket eller vilka områden inom bråk som skulle prioriteras. Lärarna skrev ner förslag på undervisning i loggboken och läste sedan i tur och ordning upp dem. Därefter var ordet fritt. Det var avsatt två timmar för lärarna att delta på mötet.

Undervisning

Läraren genomförde den planerade undervisningen, det vill säga två lektioner inom arbetsområdet bråk. Undervisningen videofilmades och jag valde ut kortare sekvenser inför analysmötet.

Analysmöte

Ett analysmöte innehöll följande moment: Övergripande beskrivning av sammanhanget, videoklipp studerades, loggboksskrivning om elevernas förståelse, laget runt med kommentarer, loggboksskrivning om nya undervisningsidéer, laget runt med kommentarer samt laget runt med sammanfattande reflektioner.

I samtalen med lärarna fungerade jag som handledare (jfr. Rönnerman, 2012) med intentionen att alla skulle ta rollen som kritisk vän (jfr. Wennergren, 2016). Den bakomliggande idén var att lärarna från de olika stadierna skulle granska egen och andras undervisning om bråk samt elevers förståelse och kunskapsutveckling.

För att påminna lärarna om innehållet och sätta in deltagarna i videosekvensen startade analysmötet med att klassläraren och jag övergripande beskrev undervisningens sammanhang. Lärarna fick i uppgift att anteckna elevernas förståelse i loggboken medan de studerade videofilmen. När filmen stoppades läste lärarna i tur och ordning upp den förståelse de uppfattat att eleverna visade. Lärarna fick därefter individuellt skriva ner sina idéer på hur undervisningen kunde utformas utifrån elevernas förståelse. Lärarna läste upp sina reflektioner och ordet var fritt för att komma till dialog och reflektion. Sedan visades nästa videosekvens och samma procedur följdes. Mötet avslutades med att lärarna skrev ner en sammanfattande reflektion av vad de tog med sig från mötet som även lästes upp för gruppen. Reflektionerna låg till grund för att starta nästa cykel. Det sista analysmötet avslutades med en utvärdering av studien. Analysmötena tog två timmar.

Tabell 5.2. Tabellen anger vilka lärare som närvarade på de olika analysmötena genom studien.

Pilotstudien, årskurs 7	Fanny, Lotta, Martina, Hanna och Caroline
Förskolan	Fanny, Lisa, Martina, Hanna och Caroline
Årskurs 3	Lisa, Martina, Hanna och Caroline
Årskurs 5	Fanny, Martina, Hanna och Caroline
Årskurs 9	Lisa, Martina, Hanna och Caroline

Dokumentationsfas

Alla delar av aktionsforskningsprocessen dokumenterades. Kartläggningarna samlades in skriftligt eller dokumenterades genom video och sammanställdes slutligen uppgift för uppgift. Planeringsmötena dokumenterades med ljud. Diktafoninspelningen gjorde det möjligt för mig att delta i planeringen och fokusera på min roll som handledare och inte samtidigt behöva anteckna (Bjørndal, 2005). Dokumentationen bestod även av den skriftliga planeringen. De två lektionerna videofilmades. Videokameran placerades mitt i klassrummet intill en vägg för att kunna dokumentera lärarens genomgång, instruktion, diskussion, sammanställning eller annat. När eleverna arbetade enskilt eller i grupp riktades videokameran mot en eller två grupper av elever. Målet var framför allt att fånga elevernas lösningar, diskussioner och tankar om bråk. Redan under lektionen skedde en första analys av vilka sekvenser som eventuellt skulle visas på analysmötet. Därefter studerades filmerna noga och jag som forskare avgjorde vilka delar lärarna skulle studera och reflektera över. Några gånger transkriberades dessa delar, dels för att jag skulle bli mer insatt i materialet och dels för att lärarna skulle kunna läsa de uttalanden som var svåra att uppfatta. Analysmötena, videodokumenterades och kameran placerades så att både lärarna och videofilmen fanns med på bild. Videofilmerna från analysmötena utgör studiens huvuddata.

Jag antecknade mina reflektioner i en loggbok, både under och efter varje möte. Även mailkonversationer och andra händelser mellan träffar tillsammans med etiska överväganden skrevs ner. Dessa anteckningar ligger till grund för reflektionerna.

Reflektionsfas

I detta avsnitt problematiserar jag några dilemman kring aktionsforskningsprocessen.

Kollegiala reflektioner ses som centrala i aktionsforskningsprocessen (McNiff & Whitehead, 2006). Frågeställningarna som lärarna fick på analysmötena var tänkta att rikta reflektionerna mot ämnesdidaktiska frågor. Gemensamma reflektioner i arbetslag har potential att öka ändamålsenligheten i handlandet (Granberg & Ohlsson, 2005). Enligt Granberg och Ohlsson (2005) är det särskilt två aspekter av dessa samtal som leder till lärande. Först en tillbakablick och meningsskapande över det som skett, vilket videofilmad undervisning bidrog med i vårt fall. Därefter reflektion över möjliga handlingsalternativ vilket kan generera gemensam förståelse, vilket frågeställningarna bidrog med. Den gemensamma reflektionen möjliggjorde därmed en analys över hur läraren i undervisningen skapar, eller inte skapar, förutsättningar för elevers lärande, så kallad 'reflection on action' (Schön, 1983, 1987). När lärare har insikter om hur elever tänker kan de ta utgångspunkt i elevers styrkor men även utgå från deras behov i sin undervisning (jfr. Schoenfeld, 2007).

I aktionsforskning är det viktigt att lärarna känner sig bekväma både med varandra och med mig så att allas synpunkter kan beaktas (Somekh, 2006). Trots att lärarna inte arbetade i samma arbetslag, är min bedömning att de ställde kritiska frågor om varandras undervisning.

Lärarna i studien hade olika erfarenheter. De hade olika utbildningar, arbetade på olika stadier och hade olika antal års erfarenhet av undervisning. Differentieringen över avdelningsgränserna skapade ett dynamiskt arbetslag (jfr. Somekh, 2006) med potential för förhandling enligt Wengers (1998) terminologi. I samtalen framkom att de hade olika matematiska och didaktiska kunskaper vilket oftast var en tillgång. Dessa skillnader märktes särskilt vid planeringsmötet för årkurs 9 då mellanstadieläraren inte var närvarande och högstadieläraren ombads komma med sina kommentarer sist. Resterande lärare kommenterade form, att det skulle vara problemlösning och att kontexten skulle handla om elevernas skolavslutning, utan att först ha ett bråkinnehåll att utgå från. Först när alla inklusive högstadieläraren deltog diskuterades både innehåll och form där lärarna byggde vidare på varandras uttalanden.

Antalet lärare i arbetslaget var en styrka men också en begränsning. Genom att begränsa antalet deltagare fanns det utrymme för reflektion och större möjlighet att komma till dialog (jfr. Lauvås m.fl., 2016). Samtidigt blev det märkbart när någon deltagare inte var närvarande vid analysmötena, att deras perspektiv inte kom med. Det kan vara anledningen till att förskolans perspektiv på undervisning inte blev framträdande.

Läraren med de mest formella kunskaperna inom ämnet tog ofta ordet först. Då strävan efter att allas röster kommer till tals är centralt inom aktionsforskning (Somekh, 2006), blev min strategi att fördela ordet genom att gå ”laget runt”. Detta reducerade samtidigt att förhandlingar uppstod, vilket var problematiskt utifrån den valda teorin.

Skolledningens stöd var viktig för studiens genomförande (jfr. Tyrén, 2013). Alla möten kunde hållas i en och samma lokal och skolledningen prioriterade lärarnas närvaro på våra möten framför andra. Samtidigt uttryckte lärarna oro över att de missade innehållet på andra möten genom att delta i studien.

Forskningsetiska överväganden

Genom hela forskningsprocessen förhöll jag mig till Vetenskapsrådets (2002) forskningsetiska principer och rekommendationer. De beskrivs som fyra huvudkrav: informationskrav, samtyckeskrav, konfidentialitetskrav och nyttjandekrav. Rektor, lärare och vårdnadshavare fick information om studiens syfte och hur den skulle genomföras, samt villkor för deltagande och rätten att avstå. De informerades om att det producerade materialet skulle användas inom skolan och för forskningsändamål. Rektor och lärare fick både muntlig och skriftlig information en månad före studiens start (bilaga 3). Vårdnadshavarna fick skriftlig information som skickades ut genom lärarna (bilaga 4). Detta skedde efterhand som studierna i de olika klasserna skulle genomföras. Vårdnadshavarna i förskolan fick även muntlig information av läraren.

Ett etiskt dilemma uppstod när några elever inte fick medgivande av sina vårdnadshavare att ingå i studien. Då det varken är etiskt försvarbart att de ska missa undervisning eller komma med på film, deltog de i undervisningen men satt bakom videokamerans placering. När eleverna arbetade i grupp satt de i grupprum för att undvika att deras röster och uttalanden fångades på film.

Konfidentialitetskravet innebär att deltagare ska förbli anonyma. Då aktionsforskning ibland får kritik för att den kunskap som produceras inte är generaliserbar menar Somekh (2006) att forskaren behöver göra rika beskrivningar av kontexten för att göra den överförbar. Det är de potentiella användarna av resultatet, forskare eller lärare, som själv måste avgöra om deras kontext stämmer överens med den kontext där forskningen bedrevs och sedan avgöra om en överföring av resultatet är möjligt (Folkesson, 2012). Därmed uppstod ett dilemma, att beskriva kontexten noggrant utan att avslöja skola och lärare. För att elevgrupperna inte ska identifieras anges inte årtal för genomförande samt att namn och kön på eleverna är avidentifierade. Å andra sidan informerades skolans övriga personal om studien eftersom utveckling av undervisning behöver vara hela skolans angelägenhet. Det innebär att deltagarna inte är anonyma för personalen trots att jag avidentifierat deras namn och skola i texten.

I studien ses barn och elever som indirekta deltagare. För de yngsta barnen räcker inte informerat samtycke och avidentifiering för att uppnå ett etiskt förhållningssätt. Kartläggningen genomfördes som ett informellt samtal, kombinerat med laborativt material för att bredda barnens möjlighet att delta på sina villkor (jfr. Quennerstedt, Harcourt & Sergeant, 2014). I samtalet intog jag rollen som en nyfiken vuxen, där frågorna inte handlade om att svara rätt eller fel, utan att barnen skulle känna tillit till sin egen förmåga (jfr. Cohen m.fl., 2011).

Analys

För att analysera förhandlingar om undervisningen valdes tematisk analys. Tematisk analys är en kvalitativ metod som används för att identifiera, analysera och rapportera teman utifrån empirin. En fördel med tematisk analys är att forskaren kan beskriva sin empiri med stor detaljrikedom samtidigt som olika aspekter av forskningsämnet tolkas (Braun & Clarke, 2006).

En induktiv metod, så kallad ”bottom up” tillämpades, vilken innebär att de teman som identifierades hade utkristalliserat sig i empirin (Altrichter, Feldman, Posch & Somekh 2008). Metoden är datadriven eftersom data kodas utan att forskaren försöker passa in den i redan existerande kodscheman eller utifrån sin förförståelse (Braun & Clarke, 2006). De förespråkar att forskaren inte fördjupar sig i tidigare forskning vid ett för tidigt stadium av analysen, vilket till viss del skedde i denna studie. Det finns dock skilda meningar om forskaren genom läsning av tidigare forskning kan bli mer medveten och därmed upptäcka mer subtila egenskaper ur empirin. Dessutom skriver Altrichter m.fl. (2008) att när aktionsforskning används som ansats finns det en poäng att forskaren har en fot i både induktiv och deduktiv metod för att dra fördel av den kunskap forskaren redan har samtidigt som forskaren är öppen för överraskningar i empirin. Även om jag till viss del hade tidigare forskning i åtanke vid analysen väljer jag ändå att kalla analysen induktiv då det bäst beskriver processen.

För att analysera materialet användes Wengers (1998) begrepp om praktikgemenskaper för att synliggöra lärarnas förhandlingar om kvaliteter i undervisningen.

Analysens genomförande

Braun och Clarke (2006) beskriver tematisk analys i faser, vilka till stor del följts i mitt analysarbete. Nedan presenteras analysförfarandet vid de olika faserna som genomfördes.

Fas 1 Att bli familjär med materialet

I denna första fas låg stor tonvikt på att bli bekant med materialet. Under studien fanns jag närvarande vid aktionsforskningsprocessens alla delar för att få en övergripande bild av hela studien. Det empiriska materialet bestod av kartläggning, ljudinspelad planering och videofilmad undervisning och analysmöte. För att besvara forskningsfrågan användes gruppens analysmöten som huvuddata.

Redan under videodokumentation av undervisningen tog jag ett inledande beslut om vilka delar som skulle väljas ut för gemensam analys. Beslutet baserades på att filmerna granskades flera gånger samt transkriberades till stora delar. Urvalet behövdes eftersom videodokumentationen var för omfattande för att analyseras i arbetslag inom befintlig tidsram. Samtidigt fanns det en risk att jag påverkade studien genom urvalet.

Analysmötena, inklusive pilotstudien genererade totalt 10 timmar film. Videofilmerna transkriberades näst intill ordagrant. Osammanhängande och repetitiva uttalanden ändrades till viss del till en mer flytande skriftlig form (Kvale & Brinkmann, 2009). Transkriberingsprocessen var en viktig del i att bli bekant med materialet. Braun och Clarke (2006) poängterar att forskaren bör transkribera materialet själv då det är en nyckelfas i dataanalysen, vilket jag också gjorde. Transkriberingen var inte enbart en mekanisk del där ord sattes på papper utan processen var tolkande för mig som forskare. Transkripten lästes även igenom ett flertal gånger innan kodningsprocessen. Vid denna inledande läsning uppmärksammades att samtalen under analysmötena hade olika karaktär trots att lärarna fick liknande frågor att samtala om på mötena. Detta kan bero på att innehållet på videofilmerna var olika, vilket ledde till att förhandlingarnas innehåll berörde olika kvaliteter.

Fas 2 En inledande induktiv kodning

Denna fas startade med att datamaterialet lästes igenom med fokus på vad lärarna förhandlade om som skulle kunna vara en kvalitet i undervisning om bråk. I marginalen markerades delar av texten där undervisning förhandlades och gavs initiala koder. Markeringarna handlade om allt ifrån några få meningar, till hela samtal som kunde sträcka sig över en hel sida. I denna del av kodningen blev empirin organiserad i meningsfulla grupper, även om koderna initialt var många och låg på olika abstraktionsnivåer.

Fas 3 Sammanslagning av koder

All empiri från de olika analysmötena klipptes sönder så att varje textavsnitt som tillhörde en kod kunde läggas i en hög. Varje textavsnitt markerades med analysmöte 1-5 så att jag lätt kunde gå tillbaka och titta på helheten. För att få en bra överblick över materialet kodades varje hög med hjälp av post-it-lappar. Därefter söktes efter koder med liknande namn och innehåll som kunde grupperas. När vissa koder slogs samman fick de ibland ett nytt namn, medan vissa koders namn passade in under andra redan existerande namn. Detta innebar att antalet koder reducerades.

Fas 4 Sökande efter teman

I denna fas lästes åter all empiri utifrån koderna för att se att varje dataavsnitt passade under rätt kod. Läsningen av empirin underlättade vid sökandet av potentiella teman. Vid läsningen identifierades att lärarna förhandlade om elevernas förståelse utifrån undervisningen, det vill säga vilka kvaliteter eller brist på kvaliteter i undervisningen som påverkade elevernas förståelse. Dessutom identifierades att lärarna förhandlade om kvaliteter i undervisning med utgångspunkt i elevernas förståelse. Detta ledde till att två teman identifierades och gavs namnen:

- att tolka elevernas förståelse
- att utgå från elevernas förståelse

Därefter granskades de kvarvarande koderna och ytterligare två teman identifierades:

- att konkretisera bråk
- att säkerställa elevernas lärande

Fas 5 Genomgång av teman

Empirin under respektive tema lästes igenom för att säkerställa att varje tema var väl avgränsade från varandra. Vid läsningen upptäcktes att så inte alltid var fallet. Detta ledde till att varje temas innebörd och avgränsning återigen begrundades. ”Att konkretisera bråk” kan även handla om att ”ta utgångspunkt i elevernas förståelse”. Avgränsningen blev att när lärarnas fokus i förhandlingen handlade om konkretiserande material hamnade datamaterialet under ”att konkretisera bråk”. När fokus i förhandlingen handlade om det matematiska innehållet och hur det skulle struktureras för elevernas lärande placerades materialet under ”att utgå från elevernas förståelse”. Genom detta arbetssätt klargjordes likheterna mellan de olika temana men framför allt vad som karaktäriserade var och en av dem.

I denna fas uppmärksammades även att alla årskurser inte fanns med under varje tema. Det berodde på att samtalen på de olika analysmötena hade fokus på skilda kvaliteter i undervisningen.

Fas 6 Underteman

Varje undertema delades in efter årskurs och bråkinnehåll. Detta gjordes dels för att empirin bestod av analyssamtal av undervisning från fyra olika stadier, dels för att innehållet inte var det samma på de olika stadierna. Det fanns ingen strävan att reducera materialet utan målet var att beskriva kvaliteter i undervisning på alla stadier och olika bråkinnehåll. I denna fas valdes även vilka excerpt som skulle verifiera mina tolkningar i resultatet.

Fas 7 Att skriva resultatet

För att som läsare förstå excerpten utifrån dess sammanhang beskrevs både undervisningen och elevernas förståelse som lärarna fick studera på analysmötena. Vidare valdes ett flertal excerpter i resultatet för att ge läsare en tydlig inblick i samtalens karaktär. Därefter skrevs resultatet under varje tema och en mer detaljerad analys av excerpten genomfördes.

Metoddiskussion

I metoddiskussionen diskuteras två datainsamlingsmetoder för studiens genomförande samt analysmetod.

Kartläggning som metod

Kartläggningen valdes för att möjliggöra att lärarna tog utgångspunkt i elevernas förståelse, för att utmana dem på den nivå de befinner sig och inte i läroböcker eller annat förutbestämt material (jfr. Schoenfeld, 2014). Tillsammans med läsning av litteratur var tanken att det skulle stimulera utveckling av undervisning. Intentionen var inte att bedöma enskilda barn, utan istället dokumentera deras förståelse för att synliggöra vilka delar i undervisningen som behövde utvecklas för att bidra till varje barns utveckling och lärande (Skolverket, 2016a).

För att säkerställa att varje kartläggning höll en lagom nivå genomfördes en mindre pilotstudie för varje åldersgrupp. Pilotstudierna medförde inte några större förändringar i varken de skriftliga testen eller i samtalsfrågorna. Däremot var det en värdefull erfarenhet att öva samtal med en 5-åring.

I förskolan genomfördes kartläggningen som samtal med två barn i taget i ett enskilt rum. Barnen fick uppgifter och laborativt material att utgå ifrån. Detta sätt möjliggör att barnen känner sig bekväma med en okänd vuxen. Å andra sidan var min bedömning att barnen kopierade varandras svar (Punch, 2002). Videokameran placerades på stativ på avstånd för att minska dess inverkan i samtalet (Bjørndal, 2005).

Kartläggningen i skolan var ett målrelaterat test, där intentionen var att ta reda på elevernas samlade kunskapsnivå. Jakobsson (2013) kritiserar enskilda skriftliga provtillfällen för att inte ta utgångspunkt i ett sociokulturellt perspektiv, att människor har kunskaper som kan avtäckas eller avslöjas och att dessa situationer är avskilda från hur kunskap normalt används. Samtidigt menar Pramling Samuelsson (1994) att all kunskap om barns tänkande är en tillgång för undervisningen. Av tidsmässiga skäl valdes skriftliga kartläggningar.

Högstadieläraren fick en noggrann beskrivning på hur kartläggningstillfället skulle genomföras. Genomförandet var inte tidsbegränsat och jag fanns inte på plats. Detta för att inte stressa eleverna med en okänd person. Efter piloten valde vi dock en annan strategi. Då genomförde jag testen och var därmed inte en okänd person när filmningen skulle starta.

Den skriftliga kartläggningen poängsattes inte elev för elev utan dokumenterades på ett formativt sätt, det vill säga klassens styrkor och svagheter diagnostiserades. Förskolebarnens lösningar sammanställdes i ett dokument. Kartläggningen bidrog till att lärarna identifierade områden inom bråk som undervisningen behövde riktas in mot. Lärarna nämnde inte läroböcker under planeringsmötena. Å andra sidan hade lärarna förmodligen enbart kännedom om läroböcker i den egna årskursen.

Videdokumentation

Alla lärarna godkände att undervisningen dokumenterades med video. De uttryckte att de alla var ansvariga för utfallet av lektionen och att det var undervisningen och inte den undervisande läraren som var i fokus för analysen. Dokumentation genom video valdes eftersom elevernas förståelse och undervisning inte var möjliga att fånga genom andra datainsamlingsmetoder (Vetenskapsrådet, 2011). Dock var videofilmens innehåll selektiv då jag valde ut vad som skulle filmas och vilka delar av filmen som skulle analyseras på mötet (Cohen m.fl., 2011). Lärarna fick enbart se ett urval av filmen eftersom materialet var för omfattande att analysera inom tidsramen för mötet. Det innebar att endast några få elevers uttryck för förståelse fångades på film och att lärarna enbart fick se ett litet urval av elevernas uttryck för förståelse från lektionen. Videon var ett viktigt redskap för lärarna att tillsammans analysera undervisning och titta på videon flera gånger (jfr. Lindgren, 2012).

Analysmetod

Videoinspelningen av analysmötena möjliggjorde en noggrann registrering av det observerade, både lärarnas konversation och det visuella, vilket underlättade transkriberingen (Bjørndal, 2005). Även om transkriberingen var tidskrävande var den en förutsättning för att genomföra tematisk analys. Braun och Clarks (2006) riktlinjer följdes för att undvika vanliga fallgropar som att temana överlappar varandra. Även om riktlinjerna är tydliga var processen inte okomplicerad då transkripten var på nästan 90 sidor. Dessutom var varje excerpt kopplat till en specifik undervisningssituation.

Antal lärare, antal lektioner liksom urvalet av video som lärarna analyserade kan ses som en begränsning för resultatets användbarhet och överförbarhet (Anderson, Herr & Nihlen, 1994). Även om studien bygger på ett begränsat urval kan resultatet ändå vara överförbart till andra ämnen, skolor eller kommuner. Studien kan dessutom ligga till grund för fortsatt forskning inom området progression.

Studiens trovärdighet och giltighet

I min roll som aktionsforskare forskade jag tillsammans *med* lärarna. Jag fungerade både som inspiratör och kritisk vän för att förbättra progression. I analysen försökte jag distansera mig från upplevelserna då ansatsen krävde omedelbar närhet. Ett sätt att få distans är att försöka förstå praktiken genom utvald teori (Wennergren, 2007). Vetenskapsrådet (2011) skriver fram att forskare bör förhålla sig objektiv och inte påverka varken försökspersoner eller skeende, vilket är problematiskt inom aktionsforskning. I denna studie diskuteras trovärdighet och giltighet utifrån demokratisk validitet, katalytisk validitet, processvaliditet, resultatvaliditet och dialogisk validitet. Dessa kriterier är anpassade för aktionsforskning där ett av målen är att förändra praktiken (Anderson m.fl., 1994).

Den demokratiska validiteten uppnås först när alla som berörs av undersökningen involveras och allas perspektiv tas i beaktande. I denna studie involverades lärarna från planeringsfasen till läsning av det jag som forskare skrivit i resultatdelen av denna uppsats. Dock var inte alla lärare närvarande på alla möten vilket kan ses som problematiskt. Lärarna hade genomgående elevernas kunskapsutveckling i ett 1-16-års perspektiv i fokus. På både planerings- och analysmötena fick lärarna skriva ner sina tankar i loggboken, innan de lyftes genom laget runt, för att säkerställa att alla lärare kom till tals. Även när resultatdelen skrevs fram fanns en strävan att alla lärares röster skulle synliggöras. När inledning och resultat var skrivna fick lärarna läsa igenom texten. Vid ett möte fick de ge sina synpunkter på texten i resultatet, detta för att säkerställa att de kände igen sig och att jag inte i skrift förvanskat deras ståndpunkter.

Katalytisk validitet svarar på frågan om aktionsforskningen gett upphov till förändringar för både deltagarna och den praktik de deltar i. När studien startade beskrev några lärare att de endast hade kännedom om undervisning från sitt eget stadium. Studiens design bidrog därmed till att lärarna fick kännedom om undervisning i bråk på andra stadier och om progression i undervisning. Efter studien uttryckte lärarna att den problematik de uppmärksammat kring progression i undervisning om bråk även kunde gälla inom andra områden i matematik eller andra skolämnen (överförbarhet). Lärarna framförde detta till rektorn vilket tyder på att de hade förändring av verksamheten i åtanke.

Processvaliditet handlar om möjligheten för utomstående att bedöma betydelsen av processen som aktionsforskningen startade. Det är viktigt att utomstående har möjlighet att bedöma värdet av processen och att forskaren väljer relevanta metoder för forskning och utveckling inom studien. Om processen är bristfällig kommer resultatet att spegla detta. I denna studie har olika datainsamlingar för studiens genomförande använts (kartläggning, ljudinspelning, videofilmning och loggbok), vilket även påverkar processvaliditeten. Dessutom har studien presenterats i forskargrupper och för handledare. En lärare deltog tillsammans med mig i ett seminarium kring aktionsforskning där vi fick kommentarer på processen.

För att uppnå resultatvaliditet räcker det inte att deltagarna fullföljt en aktionsforskningscykel och funnit lösningen på problemet. Det handlar om att vara öppen för att nya frågor dyker upp. Eftersom varje cykel genomfördes i nya årskurser var den ena cykeln inte lik den andra. Erfarenheter från analysmöten användes tillsammans med nya kartläggningar i nästa planeringsmöte.

Dialogisk validitet uppnås genom att låta studien bli granskad av andra forskare eller kritiska vänner. Eftersom studien ingick i ett större projekt, ett samarbete mellan skola och högskola, var andra forskare väl insatta i både studien och i skolan. Handledarna granskade kontinuerligt delar av texten.

Kapitel 6 Resultat

I detta kapitel presenteras resultatet från analysarbetet av lärarnas förhandlingar om undervisning i bråk utifrån fyra analysmöten. Analysen presenteras i fyra teman; *att tolka elevernas förståelse*, *att utgå från elevernas förståelse*, *att konkretisera bråk* och *att säkerställa elevernas lärande*. Varje undertema beskriver en innehållsaspekt av bråk som är strukturerat med exempel från förskolan till högstadiet. I underteman används ordet barn för att beskriva barn i förskolan och ordet elever för att beskriva barn och ungdomar i grundskolan. I texten indikerar första bokstaven i lärarnas namn vilket stadie de arbetar på, det vill säga Fanny arbetar på förskolan, Lisa på lågstadiet, Martina på mellanstadiet och Hanna på högstadiet. Varje resultatdel avslutas med en kort sammanfattning av temat där analysbegreppen gemensamt projekt, ömsesidigt engagemang och kollektiva redskap appliceras.

Tabell 6.1 ger en övergripande bild över hur det matematiska innehållet fördelar sig på både tema och årskurs. Då samtalen på lärarnas analysmöten hade olika karaktär återfinns inte samtal kring ett och samma bråkområde under alla fyra teman.

Tabell 6.1 Hur det matematiska innehållet fördelar sig på både tema och årskurs.

	Att tolka elevernas förståelse	**Att utgå från elevernas förståelse**	**Att konkretisera bråk**	**Att säkerställa elevernas lärande**
Förskola	Delning Helhet och delar	Helhet och delar	Delning Helhet och delar	
Årskurs 3	Tallinjen Täljaren	Tallinjen Täljaren		
Årskurs 5		Delarnas egenskaper	Delarnas egenskaper Helhet och delar	Delarnas egenskaper Helhet och delar
Årskurs 9	Tallinjen Täljaren och nämnaren Addition			Täljaren och nämnaren Addition Multiplikation

I resultatet beskrivs först ett utdrag från undervisningen (i en ruta), för att ge en bild av videoklippen som lärarna visades och diskuterade på analysmötet. Därefter presenteras min analys av lärarnas analysmöten. Jag har valt att ta med längre utdrag från samtalen för att visa deltagarnas röst i ett sammanhang. Aktionsforskning får ibland kritik för att det är forskaren röst som hörs och inte deltagarnas (McNiff & Whitehead, 2006).

Att tolka elevernas förståelse

I analysen framkom att lärarna förhandlade om elevernas visade förståelse[7]. Undertemat, rubriken, indikerar lärarnas gemensamma bild av elevernas förståelse.

En strävan mot att dela lika – förskola

I förskolan blev det tydligt att barnen strävade efter att dela lika i sin uppgift kring delning. Första undervisningstillfället i förskolan handlade om att barnen skulle förstå både ”dela lika” och ”dela olika” (bilaga 6).

Under en skattjakt fick en barngrupp i uppdrag att dela upp olika antal i 2 eller 3 delar. När alla uppdragen var genomförda fick barnen en uppgift där de skulle dela 9 vindruvor i två högar. Barnen fick använda laborativt material och skulle sen rita lösningarna på papper. Ett barn la direkt 4 vindruvor i 2 olika högar och sa att en inte kunde vara med. Ett annat barn började lägga 2 vindruvor i varje hög. Fanny gav tipset att de kunde tänka på hur de delar med sitt syskon. Ett tredje barn la 4 vindruvor i en hög och 5 vindruvor i den andra högen. När Fanny poängterade att det blev olika många vindruvor i högarna plockade barnet bort en vindruva och la den sidan om. Fanny uttryckte då att det blev tre högar.

Lärarna hade en hypotes om att barn behöver möta både dela lika liksom dess motsats dela olika för att utveckla förståelse för dela lika och begreppet hälften. På analysmötet studerar lärarna filmsekvensen där barnen delar upp 9 vindruvor i 2 högar. I citaten nedan beskriver lärarna hur barnen genomför uppgiften. Martina lyfter fram att barnen inte verkar nöjda när det blir olika många vindruvor i högarna.

> Martina: Ja. Det är väl inte mer med det än att de inte är nöjda med att det är olika. Han satt där med sin vindruva, den var i vägen. Den skulle inte vara med. /…/ Men han som satt där, han gillade inte att ha med den där vindruvan. Jag bara väntade på att han skulle stoppa den i munnen.

---

[7] Jag kommer i den fortsatta texten inte använda mig av visad förståelse utan istället enbart skriva förståelse för att underlätta läsningen av texten.

> Lisa: Jag tycker att man kan se rollerna redan nu. Vad jag kan se i klassrummet, de som drar iväg i matte. Jag kan peka ut de ungarna där också, vilka som kommer att tycka att sådant här är kul och intressant. Att som femåring rita hur du tänker, det är en rätt så häftig utmaning.
>
> Hanna: När du [Fanny] pratar med flickan, så säger du att hon ska dela med sin syster. Jag tänker direkt att när man säger att man ska dela dem med någon så strävar man mot lika.
>
> Fanny: Precis.
>
> Hanna: Jag såg på dig [Fanny] direkt [i videofilmen], att nej vad säger jag. Men det är där vi hamnar, det är därför man hela tiden tänker lika (förskola).

I citatet ovan uttrycker lärarna olika förståelse utifrån filmen. Samtalet kan ses som en förhandling då lärarna följer upp delar av samtalet som de uppfattar som sitt gemensamma projekt. Den ena aspekten som framträder handlar om barnens olika sätt att delta, att barnens deltagande och engagemang redan verkar förutbestämda och att undervisningen inte kan påverka detta. Den andra aspekten handlar om barnens förståelse av delning som likadelning och vad i undervisningen som kan ha påverkat detta. När delning exemplifieras som delning med sin syster kan det leda till att barnen i detta fall utgår från sina tidigare upplevelser och erfarenheter av att dela med sin syster. Dessa upplevelser och erfarenheter kan ha bestått i att dela lika, varför barnen då väljer att dela vindruvorna så att det blir lika många i varje hög.

Även om lärarna till en början visar engagemang för olika händelser i filmen har den fortsatta förhandlingen fokus på barnens förståelse av delning. Lärarna kommer fram till en mer sammanhållen mening; att dela i detta fall innebär att dela lika för barnen. Lärarna uttrycker att barnen verkar ha fler erfarenheter av att dela lika till skillnad från att dela olika.

Ett specifikt utseende på helhet och delar – förskola

I förskolan gav barnen uttryck för att en helhet har ett bestämt utseende utifrån hur en del ser ut och att delarna har samma utseende. Det var alltså inte delarnas storlek som var av betydelse.

Det andra undervisningstillfället handlade till stor del om att gå från helhet till delar, att dela ett äpple och ett papper i halvor och fjärdedelar. Undervisningstillfället handlade även om att tänka tvärtom, om en triangel är en halv, hur ser den andra halvan ut och hur kan den hela se ut? (bilaga 6). I samtal med barnen delade Fanny rektangelformade papper i olika halvor och beskrev att två halvor blir en hel. När Fanny visade en figur, till exempel en triangel, beskrev hon den som halv och frågade hur den andra halvan ska se ut för att det ska bli en hel. Några av barnen verkade noga med att den andra halvan ska se likadan ut och att helheten ska ha en specifik form, till exempel om den ena halvan är en triangel ska den andra halvan se exakt likadan ut. När de båda trianglarna sätts ihop uttryckte några av barnen att det är rätt när helhetens utseende är en rektangel. När Fanny satte ihop trianglarna på något annat sätt uttryckte barnen att det inte är rätt.

På analysmötet samtalar lärarna kring barnens förståelse av helhet och delar. Varken Martina eller Lisa lyfter fram någon specifik förståelse och Lisa uttrycker att barnen ”har full koll på läget”. Hanna beskriver utifrån videosekvensen att barnens svar inte behöver bero på att de inte förstått innehållet än. Svaret kan bero på hur frågan har ställts.

> Hanna: När du [Fanny] delar pappret på mitten. Den första där. Då frågar du, vad får vi då? Då är det någon [i barngruppen] som lite klokt säger, att då får vi två små papper/…/Det är lite lurigt just med pappret. För det som man kanske måste vara tydlig med där är, vad är min helhet? För jag kan förstå den som säger det, vi får två papper. Han har säkert fattat att det var ett halvt papper, eller halva det vi hade från början. Men nu blev det ett mindre papper. Jag tyckte det var spännande att han valde att se det som två andra papper istället (förskola).

Analysen visar att lärarna, förutom att diskutera barnens förståelse, ställer sig frågande till om de utifrån denna situation kan uttala sig om barnen har förståelse för helhet och delar. Utifrån frågeställningen ”vad får vi då?” går det inte att avgöra om barnen känner till att ett helt papper som delas på mitten blir till halva papper. Om helheten inte är i fokus under samtalet finns en risk att barnen fokuserar på andra aspekter av innehållet än det som är syftet med uppgiften. Detta ger signaler om att lärarens frågeställning har betydelse för vad barnen uppmärksammar.

Senare under mötet fördjupar lärarna sig i situationen där barnen ansåg att delarna i en helhet måste ha samma utseende. Hanna uttrycker att även om hon har förståelse för att förskolans undervisning håller sig till att delarna ser likadana ut, behöver delarna egentligen inte ha samma utseende, utan endast samma area. Hon problematiserar att en undervisning som fokuserar på att delarna ska se likadana ut omedvetet kan leda in barnen att tänka i likadelning. Lärarna reflekterar vidare kring att barnen var låsta vid att en helhet har ett specifikt utseende och att två halvcirklar endast kan sättas samman till en cirkel. I citatet nedan beskriver Hanna att en förändrad frågeställning kan möjliggöra fler svar.

> Hanna: Istället för att fråga, hur ser helheten ut? fråga, hur kan helheten se ut? Bara vända på det, så öppnar man den lite grann så att man får andra svar. Måste den då ha sett ut så? Nä, det måste den kanske inte. För med en cirkel känns det naturligt att de ligger mitt emot, men det kan vara lite förskjutet (förskola).

Citatet ovan visar att lärarna fortsätter att förhandla om barnens förståelse av helhet och delar och att lärarens frågeställning kan ha betydelse för att barnen ska uppmärksamma att det finns mer än en lösning, att helheten kan se ut på fler än ett sätt. I detta fall handlar det om att ändra frågeställningen från ”hur ser” till ”hur kan”. Den första frågan antyder att det enbart finns en lösning medan den andra frågan öppnar upp för att det kan finnas fler korrekta lösningar. Samtidigt visar utdraget att det utifrån frågeställningen ”Hur ser helheten ut?” inte går att avgöra om barnen känner till att det finns flera lösningar på hur en helhet kan se ut. I detta citat, liksom i det förra, blir det tydligt att frågeställningen har betydelse för vad barnen uppmärksammar och vilken mening de uttrycker. Analysen visar, i båda fallen, att när lärarna förhandlar om barnens förståelse fördjupas samtalen till att även beskriva varför barnen förstår det matematiska innehållet som de gör och vilka förändringar som behöver ske.

I det fortsatta samtalet, om att en helhet kan ha olika utseende, reflekterar Fanny över vilka svar som hade kommit fram i samtalet med barnen om någon person med en annan matematisk bakgrund hade genomfört undervisningen. Fanny beskriver att den matematik hon har mött under sin egen uppväxt har lett till att hon själv har ett statiskt tänkande på matematik och undrar vad som hade hänt om barnen hade blivit utmanade att tänka på fler sätt.

> Fanny: Men där tror jag vi får hoppa en generation. Jag känner själv att jag är uppväxt i det statiska, att det bara finns ett svar som är rätt. Och innan vi kommer ifrån det här med rätt och fel, så tror jag att det tar ett tag till, för jag kan bara se en helhet som en cirkel. Jag kan inte se den på något annat sätt för där är jag jätte… (förskola).

Fanny uttrycker i citatet ovan ett personligt engagemang för det gemensamma projektets innehåll där hon ser matematiken som en praktik där det bara finns ”ett svar som är rätt”. Detta kan vara en förklaring till att Fanny ser att helheten endast kan ha ett utseende, i detta fall en cirkel, till skillnad från inställningen att det finns många olika lösningar. Matematik verkar vara ett ämne som är oförhandlingsbart och bestämt. Dessa upplevelser och erfarenheter av ämnet som rätt och fel verkar inte heller kunna förhandlas till ny mening i lärargruppen. Samtidigt framkommer att läraren behöver ställa frågor som hjälper barnen att upptäcka att helheten kan ha olika utseende.

Behandlar $\frac{1}{4}$ som division – årskurs 3

I årskurs 3 behandlade eleverna täljaren som en helhet och nämnaren som hur många delar helheten ska delas upp i. Eleverna tolkade därmed bråket som en division.

Under den första lektionen fick eleverna tre uppgifter som alla handlade om andredelar med fokus på $\frac{1}{2}$ (bilaga 8). Eleverna fick arbeta med $\frac{1}{2}$ både som del av helhet, del av antal och som ett tal på en tallinje. Den andra lektionen hade samma arbetsgång men där var innehållet fjärdedelar med fokus på $\frac{1}{4}$. I början på den andra lektionen ritade en elev $\frac{1}{4}$ på tavlan som en kvadrat uppdelad i 4 mindre kvadrater av samma storlek, men färglade ingen del. När Lisa bad eleven att visa hur $\frac{1}{4}$ ser ut tvekade eleven och fick hjälp av en annan elev som färglade en del. Lisa poängterade att det är 1 del av 4 delar. Simon uttryckte att han inte ser $\frac{1}{4}$ på detta sätt utan det är att man delar upp ettan i fyra delar. Simon pekade sedan på ettan i $\frac{1}{4}$, vilket redan stod på tavlan, och beskrev att det här är ettan som ska splittras upp på 4 delar. Simon ritade sedan en bild där han visade hur han delade upp den, men färglade ingen del (bild 6.1).

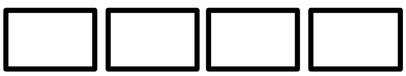


Bild 6.1. Simon visar hur han tänker sig $\frac{1}{4}$.

På analysmötet får lärarna se en sekvens där några elever ritar en fjärdedel på tavlan. Lärarna ombeds sedan att beskriva elevernas förståelse. Hanna noterar att eleverna uttrycker att delarna ska vara lika stora, men att i just denna situation verkar eleverna se det som att $\frac{1}{4}$ är det samma som att dela upp en hel i fyra delar då Lisa måste uppmana eleverna att markera $\frac{1}{4}$. I följande utdrag talar lärarna vidare om elevernas förståelse. Istället för att beskriva elevernas förståelse uttrycker Lisa vilka elever som är aktiva.

> Lisa: Jag undrar om jag hade fått mer av det om jag… För jag har den här som är framme hela tiden, Simon i blå tröja, som driver på mycket. Vad hade hänt om jag inte hade gått efter vem som gör så här [viftar med handen] utan jag bara hade plockat någon? Jag blir så ledsen när jag ser Ester. Hon vill inte. Jag har aldrig blivit arg på någon som gör det. Jag har alltid tyckt att vi har ett tillåtande klimat. Jag blir ledsen när jag ser att det är samma personer som är framme hela tiden. Igen när det gäller matten, var är tjejerna? Det sitter jag och tänker. Nu kom jag av banan lite. Man ser när jag borde gjort så här och så här. Men det jag känner är att en fjärdedel av klassen är med på tåget. Kan man säga så ungefär, hade jag trott?
>
> Caroline: Martina, har du?
>
> Martina: Jag hakade upp mig på samma sak som Hanna. De ritar fjärdedelar, alltså de delar upp en hel i fjärdedelar, men de markerar inte en fjärdedel (årskurs 3).

Samtalet kan ses som en förhandling där lärarna följer upp de delar av samtalet som de uppfattar som sitt projekt. Den ena delen av samtalet handlar om elevernas deltagande, att några elever är aktiva och drivande medan flickorna är perifera deltagare. Ett sätt att öka elevernas engagemang är att läraren är mer aktiv i att välja ut vilka elever som får visa sin förståelse. När endast en fjärdedel är ”med på tåget” kan det vara ett tecken på att få elever har förståelse för det matematiska innehållet. Den andra delen av samtalet berör elevernas förståelse av bråk som del av helhet, att delarna ska vara lika stora, men att täljaren i detta fall står för en hel istället för en del.

Även om lärarna till en början lyfter fram olika händelser i filmen väljer de i det fortsatta samtalet att fördjupa sig i elevernas förståelse av täljarens betydelse. Lärarna problematiserar att den planerade undervisningen inte förtydligade det som eleverna ännu inte förstod. Detta trots att kartläggningen visade att eleverna inte hade förståelse för täljaren och att de var fem lärare som tillsammans planerade en undervisning vars syfte var att förtydliga innebörden av både täljaren och nämnaren. Genom att analysera elevernas förståelse på film blev det uppenbart för lärarna vad som var problematiken och att användning av samma täljare genom hela lektionen inte gagnade elevernas kunskapsutveckling.

Tolkar tallinjen som en helhet – årskurs 3

När eleverna i årskurs 3 fick i uppgift att markera $\frac{1}{4}$ på tallinjen, behandlade eleverna tallinjen som en sträcka, en helhet, som de delade in i lika stora delar oavsett om de hade en tallinje från 0 till 1 eller från 0 till 2. De visade ännu inte tecken på att känna till att varje tal har en punkt och placering på tallinjen.

På lektionen fick eleverna i par markera tal på en tallinje. Några par fick en tallinje som sträckte sig från 0 till 1 medan andra fick en tallinje som sträckte sig från 0 till 2. På tallinjen som var från 0 till 2 var även talet 1 utsatt. Eleverna placerade in $\frac{1}{4}$ på samma tallinje som de lektionen innan markerat $\frac{1}{2}$ på. Elevparen hade olika sätt att lösa uppgiften på (bilaga 9). Ett exempel var ifrån ett par som hade en tallinje från 0 till 1 som skrev 6+ både vid en fjärdedel, en andredel, tre fjärdedelar och vid ett (bild 6.2).

Bild 6.2. Eleverna mäter tallinjen.

Eleverna mätte tallinjen med en linjal och fick den till 24 cm och delade sedan in den i fyra lika långa sträckor. Varje fjärdedel av sträckan mellan 0 och 1 var således 6 cm lång. En annan grupp satte enbart streck vid en fjärdedel, en andredel och tre fjärdedelar utan att namnge dem. En tredje grupp som hade en tallinje från 0 till 2 placerade in $\frac{1}{4}$ på två ställen på tallinjen, dels vid en andredel och dels vid en och en andredel. I detta exempel strök eleverna 1:an och skrev istället dit $\frac{1}{2}$.

På mötet reflekterar lärarna över elevernas förståelse för att placera ut bråktal på en tallinje. I följande utdrag talar lärarna om den tallinje där eleverna satte ut 6+. Det som framträder är att lärarna inte är eniga om elevernas förståelse.

> Lisa: Det känns inte som de rör ihop det. Men, när de då börjar prata centimetrar så hör jag: sex plus sex plus sex plus sex, sex fyra gånger. Det blir tjugofyra. De är på rätt väg för de hittade det på det sättet istället. Man

> borde lyft det. De hade den säkerheten i sig. Jag vet inte riktigt vad jag ska säga om jag ska vara ärlig. Jag blir för hemmablind.
>
> Martina: Det var dels gruppen som mätte ut alla de här sex plus sex plus sex plus sex. De mäter ut halvor och fjärdedelar, men de sätter inte ut det. Det är även andra grupper som dragit ett streck på hälften och på fjärdedelen men utan att sätta ut någonting. En bit på vägen har de kommit, många kanske. Nu hörde vi i och för sig inte hur de tolkar det eller så, men sen hann jag inte se det här 0,3, 0,5 och 0,7…
>
> Caroline: …0,7 och sen var det ett.
>
> Hanna: Det blir väldigt uppenbart att de inte vet hur de ska markera det här för de är kvar i del av helhet, istället för en punkt på en tallinje. Så tänker jag när jag ser det i alla fall. Det visas lite av att de delar upp den i fyra lika delar. Det gör de flesta ganska bra, men sen att gå därifrån till att förstå värdet på en punkt. Det finns ju inte riktigt. Tror inte att nån av dem egentligen… (årskurs 3).

Efter detta utdrag samtalar lärarna vidare om att det inte spelar någon roll vilka tal som står på tallinjen, eleverna placerar ändå ut $\frac{1}{2}$ på mitten av tallinjen. De tolkar mitten av tallinjen som hälften. Även om lärarna inte fick se film på hur Lisa introducerade uppgiften om tallinjen för eleverna lyfter Hanna fram att introduktionen av uppgiften kan vara av betydelse för hur eleverna tar sig an uppgiften. Om eleverna får i uppgift att markera hälften på tallinjen så kan det leda till att eleverna uppfattar att det är mitten på tallinjen som ska markeras, oavsett vilka tal som står på tallinjen, till skillnad från om eleverna får i uppgift att markera talet $\frac{1}{2}$ på tallinjen.

I analysen framkommer att lärarna deltar i samtalet kring elevernas förståelse av bråk som tal på en tallinje. De verkar eniga om att elevernas strategi för att placera ut bråktal på tallinjen bygger på att eleverna mäter tallinjen. Däremot har lärarna till en början inte en gemensam syn på om denna strategi visar att eleverna har förståelse för bråk som tal på en tallinje eller inte. Att eleverna mäter tallinjen innebär att eleverna tar utgångspunkt i sin förståelse av del av helhet istället för punktens värde på en tallinje. Lärarens ordval när uppgiften introduceras verkar ha en avgörande betydelse för hur eleverna löser uppgiften och i förlängningen deras förståelse av bråk som tal på en tallinje. Det är en tydlig skillnad mellan att be eleverna markera hälften på en tallinje och att placera ut talet $\frac{1}{2}$. Elevernas förståelse bygger på upplevelser och erfarenheter de har med sig när de löser uppgiften. Vidare visar analysen att lärarna bygger vidare på varandras uttalanden och hittar kvaliteter i undervisningen som kan göra skillnad för elevernas kunskapsutveckling.

Tolkar tallinjen som en helhet – årskurs 9

På analysmötet beskriver Fanny ett dilemma som hon stött på. När två bråktal ska jämföras behöver man ta hänsyn till storleken på helheten. Hanna lyfter upp att bråk på en tallinje visar att talet har en bestämd punkt på tallinjen, vilken inte kan ändras. Vid del av helhet eller del av antal varierar storleken beroende på hur stor helheten är. Då kan talen inte rangordnas utan att man känner till helheten.

Hanna berättar sedan om en elev i hennes klass som, i samband med kartläggningen, undrade om hon ska använda hela tallinjen från 0 till 2 när hon ska placera ut $\frac{1}{2}$ eller bara från 0 till 1. Eleven hade uttryckt att det blir olika svar beroende på hur hon ska göra. På analysmötet lyfter lärarna fram, att när eleven ska placera $\frac{1}{2}$ på mitten så står där redan talet 1. Eleven tänker inte bråket som ett tal som ska markeras, utan ser tallinjen som en helhet.

> Hanna: Jag förstår den här förvirringen, så det är inte det, men det är ruskigt intressant. Varför benämner vi det så lika när det är två helt skilda saker? Det är väldigt stor skillnad att prata om bråk som en andel av någonting eller som en punkt på en tallinje.
>
> Martina: Det är jättestor skillnad ja.
>
> Hanna: Om man nu har pratat så himla mycket om att bråket står i relation till en helhet, hur ska vi plötsligt ta bort det när vi kommer till tallinjen? Då måste vi från början prata om att bråket står i förhållande till ett. Det är vi kanske lite dåliga på. Vi pratar om helheten men vi pratar inte om att den benämns som en hel. Detta är ju lurigt (årskurs 9).

I samtalet ovan visar lärarna ett gemensamt intresse för svårigheter att placera ut bråktal på en tallinje. De problematiserar att svårigheterna kan bero på att lärarna inte i tillräckligt hög grad poängterar de skillnader som finns mellan de olika representationsformerna; del av helhet, del av antal och bråktal på en tallinje. För att få en bättre övergång från del av helhet till bråktal på en tallinje föreslår lärarna att man mer noggrant poängterar helheten som 1 eller en hel istället för att endast benämna det som helheten. På så sätt kan eleverna få andra upplevelser och erfarenheter med sig, vilket kan underlätta inför undervisning om tal på en tallinje.

Flera begrepp testas när täljare och nämnare beskrivs – årskurs 9

I årskurs 9 fick eleverna i uppgift att i grupp beskriva täljarens och nämnarens innebörd (bilaga 15). Till sin hjälp fick eleverna flera förslag på definitioner av täljare och nämnare som de kunde utgå ifrån i sina diskussioner. Definitionsförslagen var hämtade från kartläggningarna som genomfördes i årskurs 5 och i årskurs 9 inför planeringarna. Förslagen var alltså elevernas egna. På lektionen provade en grupp med två flickor och en pojke sig fram med olika begrepp för att definiera nämnaren. De beskrev nämnaren bland annat som det fasta talet, den totala mängden av vad som kan användas och den totala summan.

På analysmötet studerar lärarna filmen där en grupp elever diskuterar nämnarens innebörd. Martina beskriver att eleverna tar med begrepp som finns med i definitionsförslagen. Uppgiften riktas mer mot ämnet svenska eftersom eleverna letar efter de rätta orden istället för att utveckla förståelse för själva begreppen. Hon beskriver att det är flickorna som är mest aktiva i elevgruppen. Lisa uttrycker att eleverna beskriver att definitioner inte kan sägas i en mening. Eleverna vill formulera nämnaren med de rätta termerna, att det ska låta bra och att eleverna gör uppgiften större än vad den egentligen är.

> Hanna: När de diskuterar slänger de in ord som variabler, som man märker att de egentligen inte vet vad det betyder. De struntar ganska snabbt i det, så det vara bra gjort i och för sig. Sen väljer de mellan olika ord som summa och mängd, betyder, står för, visar. De letar ord som faktiskt passar in på det de ska... Jag vet inte om jag håller med om att det blir en svenskauppgift, för de bearbetar hela bråkbegreppet. Ja, det är många begrepp och uttryck som involveras, men det är för att de ska få en definition på ett matematiskt begrepp. Det här vändandet och vridandet gör att man får syn på att de funderar mycket kring vad nämnaren och täljaren egentligen står för. De ger sig inte riktigt. När de har läst upp den, så [uttalar eleverna] nej det går inte, vi får nog fixa till här, det stämmer inte (årskurs 9).

I citatet ovan framträder lärarnas resonemang om både elevernas förståelse av täljaren och nämnaren och om uppgiftens kvalitet. Lärarna lyfter fram olika begrepp som eleverna använder för att beskriva täljaren och nämnaren. De visar inte en samsyn om uppgiften gagnar elevernas förståelse för bråk eller om eleverna mest tränar språkfärdigheter. Eleverna verkar enbart leta begrepp som redan finns med i definitionsförslagen. Samtidigt framkommer att elevernas egna förhandlingar om vilka begrepp som ska användas, kan leda till förståelse för täljarens och nämnarens innebörd.

När lärarna reflekterar kring några situationer där eleverna i grupp fick lösa additions- och multiplikationsuppgifter diskuteras återigen definitionsuppgiftens kvalitet.

På lektionen i årskurs 9 hade Hanna varken någon genomgång om addition eller om multiplikation av tal i bråkform inför att de skulle lösa additions- och multiplikationsuppgifter av tal i bråkform. Däremot hade eleverna fått uppskatta svaret på en additionsuppgift och fundera över om svaret verkade rimligt. Eleverna fick inför varje additions- och multiplikationsuppgift en påminnelse att ha både definitioner och rimlighet i åtanke. Även om det var få elever som löste additions- och multiplikationsuppgifter korrekt under kartläggningen kom alla grupperna fram till rätt svar på lektionen.

På analysmötet lyfter Martina fram att additions- och multiplikationsuppgifterna verkade vara enkla för eleverna. Det är just diskussionerna kring täljarens och nämnarens betydelse och rimlighetsuppgiften som haft betydelse för elevernas framgångar. Lärarna beskriver vikten av att eleverna får diskutera begreppen och att det finns tid för detta.

Utdraget kan tolkas som att definitions- och rimlighetsuppgiften gett eleverna upplevelser och erfarenheter som hjälpt dem att lösa både additions- och multiplikationsuppgifterna. Lärarna verkar ha formulerat en gemensam mening om definitionsuppgiftens kvalitet.

Summering

Det gemensamma projektet handlade om elevernas förståelse samt sambandet mellan undervisning och elevernas förståelse. Lärarnas ömsesidiga engagemang för elevernas förståelse framkom särskilt i den gemensamma förhandlingen när lärarna hade olika bilder av elevernas förståelse. Deras individuella uttalanden visade inte alltid samstämmighet, men i flera fall byggde lärarna vidare på varandras uttalanden och erövrade då en gemensam mening kring elevernas förståelse. Genom att videofilma och analysera elevernas förståelse i ett sammanhang uppmärksammade lärarna, förutom elevernas förståelse, vad i undervisningen som möjliggjorde kunskapsutveckling. De uppmärksammade även upplevelser och erfarenheter som eleverna hade utifrån tidigare undervisning eller vardagshändelser som kan ha påverkat deras förståelse. Resultatet ger signaler om att små didaktiska förändringar kan öka undervisningens kvalitet och få avgörande betydelse för elevernas lärande. Dessa didaktiska skillnader kan handla om små förändringar i ordval när läraren introducerar en uppgift, ställer en fråga eller poängterar ett begrepp.

Resultatet visar att flera aspekter är viktiga för progression i undervisningen. En handlar om att lärarna i vissa fall inte uppmärksammade elevernas förståelse i analysen. Lärare som inte lyckades identifiera mindre framgångsrika förståelser kunde inte heller påverka dessa. Dessutom verkar det viktigare att veta hur eleverna förstår bråk än att veta vilka områden inom bråk eleverna ännu inte behärskar för att planera en mer specifik undervisning. Analys utifrån olika redskap, kartläggning och videofilmad undervisning, gav olika information. Vissa delar av kartläggningen gav enbart information om vilket innehåll eleverna ännu inte förstod, inte hur de förstod det. Detta bidrog till att lärarna inte kunde förutse att delar av planeringen inte blev optimal för elevernas lärande, utan uppmärksammades först vid videoanalysen.

En annan aspekt som kan vara av betydelse för progression var att eleverna till viss del verkade ha liknande förståelse oavsett stadium. Ett exempel var att eleverna både i årskurs 3 och årkurs 9 tolkade tallinjen som en sträcka eller helhet som de delar in i lika stora delar. De ser därmed inte att varje tal i bråkform har en bestämd placering på tallinjen.

Att utgå från elevernas förståelse

Lärarna fick utifrån elevförståelsen som uppmärksammats i filmen reflektera kring hur en undervisning kan utformas som skulle kunna leda till att ytterligare öka förståelsen för innehållet. I analysen framkom att lärarna förhandlade om undervisning utifrån elevernas förståelse. Rubrikerna indikerar lärarnas gemensamma mening om en förändrad undervisning.

Variera både helheter och delar - förskola

I förskolan visade Fanny några olika exempel på hur en halv kan se ut, utifrån hur en helhet ser ut. Hon visade även hur helheten kan se ut, utifrån hur en halv ser ut. Därefter fick barnen en uppgift kring helhet och delar där barnen fick dokumentera sin lösning (bilaga 6). Barnen fick ett papper med olika figurer ritade. Bland annat fanns det en bild på en triangel som föreställde en halv och sedan ett antal andra ritade figurer. Barnens uppgift var att fundera över vilka av de ritade figurerna som motsvarade en hel utifrån triangeln som motsvarade en halv. Läraren gav barnen laborativt material som stöd, det vill säga trianglar i samma storlek som den ritade triangeln på pappret. En del barn la tre trianglar i en figur och benämnde den som hel. Några barn la en triangel utanför figuren för att försöka avgöra om den var en hel. Det fanns även barn som gav ett korrekt svar, nämligen att det var en hel när de fick plats med två halvor i en figur. Dessa barn fick sedan arbeta vidare med samma uppgift men där triangeln representerade $\frac{1}{4}$. En möjlig tolkning av barnens lösningar är att när trianglar kan passas in i den stora figuren så är det en hel, oavsett hur många figurer som får plats. Det kan också vara så att barnen har olika idéer om vad ordet hel innebär, att det är något som är helt. Lösningen där barnen la en halv utanför figuren kan tolkas som att de försökte göra figuren hel, att figuren skulle bli till en känd figur som en kvadrat eller rektangel (bild 6.3). När en triangel, som figuren längst till vänster nedan läggs till höger om den figur som är längst till höger nedan får den formen av en rektangel.

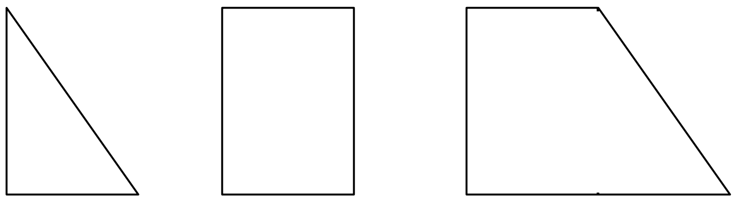


Bild 6.3. Exempel på bilder som fanns på dokumentationsuppgiften kring helhet och delar.

På analysmötet diskuterar lärarna, utifrån barnens förståelse av helhet och delar, hur undervisning om bråk kan utformas. Fanny beskriver att man kan använda olika former, både bekanta och obekanta, att börja i helheten och gå över till delar. Hon beskriver även att man kan dela helheten i sicksack. Följande citat visar att lärarna beskriver en tänkt undervisning på olika sätt.

> Lisa: Allt är sagt, individuellt med barnen, be dem beskriva, be dem visa. Laborera, lägga fram saxar och ark och be dem dela. Hur många gånger kan man dela och hur kan vi dela det? Ljusbordet igen, experimentera, digitalt, både smartboarden och iPad. Dels kanske man bara kan få börja med fingret. Allting är redan sagt.

> Hanna: Jag var också inne på att skapa sin egen helhet. Men jag var också inne på att de skulle få skapa sin egen del. Jag är inte färdig med tanken. För att kunna utmana sig själv så måste det inte vara halvor man har valt att dela den i. Man kan ha valt att dela sin i tre delar och då kan man säga att jag har gjort tre delar utav min. Sen kan man be en kompis, hur tror du att min helhet ser ut? Jag gör min egen helhet, jag gör min egen del. Sedan ber jag en kompis komma fram till vilken som kan vara min helhet.
>
> Martina: Som ett pussel?
>
> Hanna: Ja, det kan det vara. De får den där triangeln och ska fundera på, hur kan min helhet se ut? Fast det var kanske inte en triangel, utan jag hade gjort något helt annat. Så att man får en kompis feedback. Det blir lite kul att göra uppgiften till någon annan som ska lösa den. Att jag skapar uppgiften till min kompis (förskola).

Ovanstående citat visar att lärarna är eniga om att barnen behöver möta olika former av helheter som de sen får dela på olika sätt. Däremot har lärarna olika förslag på hur det ska genomföras. Lisa beskriver olika redskap som kan användas men nämner inte hur de ska användas för att bli en resurs för barnens lärande. Hanna poängterar istället att barnen kan utmanas genom att innehållet utökas och varieras. Det handlar om att använda både halvor och tredjedelar samtidigt som former på både delar och helheter kan variera. Detta utökade innehåll kan leda till att barn får andra upplevelser och erfarenheter. De får då ett utökat innehåll att förhandla mening kring vilket i sin tur möjliggör lärande. En kvalitet om undervisning som framträder är bråkinnehållets sammankoppling med materialet. En annan kvalitet som framträder är att när innehållet utökas möjliggörs fler upplevelser.

Variera täljaren – årskurs 3

Innehållet på den första lektionen i årskurs 3 var $\frac{1}{2}$ och innehållet på den andra lektionen var $\frac{1}{4}$. Båda lektionerna hade samma upplägg, nämligen att eleverna först fick arbeta med del av helhet, sedan del av antal och sist som ett tal på en tallinje.

På analysmötet uppmärksammar lärarna att eleverna uppfattar täljaren som en hel som ska delas med nämnaren. Lärarna beskriver att eleverna ser $\frac{1}{2}$ som andredelar och $\frac{1}{4}$ som fjärdedelar då eleverna korrekt ritar andredelar respektive fjärdedelar men inte markerar någon del. Dessutom uttrycker eleverna att det är en hel som ska delas i 2 respektive 4 delar. Lärarna beskriver att då eleverna enbart fick möta talet $\frac{1}{2}$ och $\frac{1}{4}$ på lektionerna är det inte säkert att eleverna ändrade sin förståelse av täljaren. Det var inte det matematiska innehållet som var för omfattande utan variationen av representationerna som var problematiskt.

> Hanna: Vi använde olika representationer, så vi gick inte på djupet med det första.
>
> Caroline: Nej.
>
> Hanna: Det är där kruxet är. Vi måste hålla kvar vid det där första och inte tänka att vi måste komma så långt [på de två lektionerna inom studien], utan faktiskt jobba med begreppet bättre. Vi inser ju att det är samma sak vi har gjort i förskolan i …
>
> Martina: … åttan, i sjuan.
>
> Hanna: Jaja. Det är samma överallt (årskurs 3).

Lärarnas uttalanden visar att redskap i form av olika representationer; del av helhet, del av antal och tal på en tallinje, inte hjälpte eleverna till förståelse för täljarens betydelse. För att öka förståelsen av täljarens betydelse föreslår lärarna att undervisningen istället förverkligas genom att arbeta mer på djupet inom en representation. Lärarna lyfter även fram att undervisningen som genomfördes i de första delarna av studien, i årskurs 7 (pilotstudien), i förskolan och i årskurs 3, förverkligades på samma sätt, i form av tre representationer. Detta kan tolkas som att lärarna kommit till insikt att det tidigare inte funnits en progression i det matematiska innehållet mellan olika stadier.

Då en variation av representationer inte verkar vara en framkomlig väg för att komma åt förståelsen av del av helhet, föreslår Martina på analysmötet att man behöver ”backa bandet” och markera $\frac{1}{4}$ och $\frac{1}{2}$ i många figurer tillsammans. Även Lisa beskriver att man behöver backa.

> Lisa: Backa har jag också skrivit. /…/ Varje par skulle fått chansen att lyfta sitt tankesätt. Jag kanske skulle parat ihop eleverna som hade trianglarna. Visa hur många olika sätt ni kom på att dela trianglar på. Att det skulle funnits tid för det. Jag tänker också att jag ska bli bättre på att våga säga, jag förstår hur ni tänker, men det blev kanske inte riktigt. Alltså, jag bekräftar att jag ser vad de har gjort, jag säger aldrig om det är rätt eller fel.
>
> Hanna: Det kanske du inte måste göra först. Men sen måste man komma till kärnan. Först vill man kanske bara ha alla uppfattningarna, så att man

> inte börjar gå in på det [rätt och fel], utan att man först lyssnar och sen kan man börja resonera. Hur tror man att de har tänkt och hur har dessa tänkt och hur tror ni att jag tänker? Det bästa är om du kunde hittat några frågeställningar som utmanar deras egen tanke. Om de hade en halv och de vet vad en halv är, då kan man till exempel jämföra det med en femtedel. Om du nu har det här sättet att resonera, funkar det då på en femtedel också och vad blir det av det. Då kan man sätta det i kontrast mot något annat som gör att nähä, men då funkar inte min tanke. De kan själv få upptäcka, nej det höll inte hela vägen. Det höll på en grej, men det höll inte på mer. Sen vet jag inte vad det skulle vara för frågor eller utmaningar än, men utmana tankegången, låta dem testa sin egen tanke. För jag tror att ska man komma dit så vinner de kunskapen istället för att vi försöker ge den till dem. Ibland lyckas vi inte ge den till dem uppenbarligen. Vi kämpar och kämpar (årskurs 3).

I samtalet framkommer begränsad samsyn kring hur en undervisning som kan öka förståelsen för täljaren kan förverkligas när det gäller genomförande och innehåll. De olika idéerna på genomförande handlar om; att göra flera liknande uppgifter tillsammans, att upprepa, att eleverna ska få visa sina olika lösningar, att eleverna ska få beskriva hur de tänker eller att läraren ställer fördjupande frågor där eleverna får resonera och själv komma fram till vad som gäller för tal i bråkform. Innehållet skiljer sig från att vara det samma som tidigare, $\frac{1}{4}$ och $\frac{1}{2}$, till ett utökat innehåll. Motiveringen till ett utökat innehåll är att eleverna ska få möjlighet att upptäcka om deras förståelse även stämmer in på andra tal i bråkform. En kvalitativ aspekt som framträder är att eleverna själv får resonera sig fram till vad som gäller kring ett matematiskt innehåll istället för att läraren informerar om det. Lärarna fortsätter att fördjupa samtalet kring undervisning om täljaren.

> Hanna: Jag tyckte att den här var svår att visa, att en halv och en fjärdedel motsvarar en del av en helhet. Hur kommer man åt det? Man kan fortsätta jobba med former och figurer. När man har delat upp dem, prata om att om man har fyra stycken och att nu har jag en fjärdedel. Men också visa vad två fjärdedelar är och tre fjärdedelar och fyra fjärdedelar. När jag har alla fyra då har jag en hel. Om vi bara pratar om en fjärdedel hela tiden, så har vi ettan där uppe och då är den en hel.
>
> Martina: Använda dem till exempel (håller upp en cirkel som är klippt i fjärdedelar och uppklistrad på ett papper) och visa om man tar… Mm.
>
> Hanna: Om vi börjar prata om två fjärdedelar så har vi en tvåa där uppe. Då är frågan om de tycker att det är två figurer som vi har delat i fyra bitar. Det hade varit en intressant fråga för dig [Lisa] att ställa. Visa två fjärdedelar en gång och fråga om de kan rita upp det. Vad händer då?

> Martina: Där är ju en utmanande fråga till dem som säger, här har jag en som jag delar upp i fyra bitar, men om du har två fjärdedelar då…
>
> Hanna: … hur ser det ut då? Så att man går vidare (årskurs 3).

I analysen framkommer att lärarna har olika roller i samtalet där någon är mer drivande. Samtidigt verkar de skapa en samsyn kring undervisning om täljaren. Då eleverna förstod täljaren som en hel och enbart mötte 1 i täljaren på lektionerna fick de inte möjlighet att förhandla fram ny förståelse. Utifrån detta förverkligar lärarna en undervisning där innehållet utökas. Från att enbart använda stambråk används istället 2, 3 och 4 i täljaren samtidigt som utmanande frågor ställs till eleverna. De elever som tidigare såg 1 i täljaren som en hel kanske upptäcker att det inte stämmer när de får i uppgift att beskriva ett bråktal med 2 i täljaren. Då lärarna lyfter fram att former och figurer ska användas kan det tolkas som att representationen del av helhet, i just detta sammanhang, ska användas. Till synes små kvalitativa förändringar i undervisningen, i form av ett utökat innehåll, kan ge eleverna nya erfarenheter av det matematiska innehållet.

Analysen visar att lärarna tar utgångspunkt i sina upplevelser av både elevernas förståelse av täljaren och av undervisningen i videofilmen för att förverkliga en ny undervisning. Lärarna skapar genom förhandling ny gemensam mening om undervisning av täljarens innebörd. Från att använda ett stambråk och förverkliga det genom tre representationer; del av helhet, del av antal och tal på en tallinje, till att innehållet utökas samtidigt som endast en representation används, i detta fall del av helhet. Vidare framkommer att lärarna är eniga om att eleverna behöver få uttrycka sina tankar genom utmanande frågeställningar.

Variera talen på tallinjen – årskurs 3

På analysmötet från årskurs 3 beskriver lärarna elevernas förståelse för tal på en tallinje (se tidigare tema). Lärarna reflekterar över hur de kan arbeta med bråktal på en tallinje utifrån den förståelse som diskuterats. Lisa uttalar att eleverna behöver lyfta sina tankar.

> Lisa: Tallinjen igen, också haft mer möjlighet att lyfta sina tankar eftersom de tänker på så olika sätt /…/
>
> Hanna: Man kan jobba med tallinjen i andra sammanhang, inte bråk, utan man pratar tallinjen. Därefter kan man markera bråk på tallinjen. Då kan det bli mer naturligt att det inte är en fjärdedel på många ställen. För vi har ald-

> rig tvåan på mer än ett ställe på tallinjen så varför ska vi plötsligt ha en fjärdedel på många ställen? Då kanske den kopplingen blir lättare. Men som ni säger, eleverna gick från att ha vikt och klippt till att därefter hitta en punkt. Det är en viss skillnad. Detta gör jag med mina elever på högstadiet, de tre representationerna, antal, helhet och tallinjen och det är fortfarande svårt (årskurs 3).

Utifrån samtalet framkommer att lärarna har olika förslag på en undervisning som kan förtydliga tal på en tallinje. Ett förslag handlar om att eleverna behöver ge uttryck för sina olika sätt att tänka. Läraren ger ingen information om hur det kan hjälpa eleverna att gå från del av helhet till att se bråktal som en punkt på en tallinje. Det andra förslaget handlar om att synliggöra att varje tal, både heltal och tal i bråkform, enbart har en placering på tallinjen. På så sätt synliggörs vad det är eleverna behöver få förståelse för. Istället för att variera representationerna så varieras innehållet kring en representation. Dessutom visar det sig att eleverna på högstadiet har arbetat med samma innehåll och att de har liknande svårigheter med de tre representationerna helhet, antal och tallinje som eleverna i årskurs 3.

Under analysmötet fortsätter lärarna att mer detaljerat beskriva hur undervisning om tal i bråkform på en tallinje kan utformas utifrån elevernas förståelse. Lärarna och eleverna kan tillsammans räkna högt och börja med tal som de är vana vid; 0, 1, 2, 3, 4, 5 och 6. Samtidigt visas hur dessa tal representeras på en tallinje. Därefter går läraren över till tal i bråkform och visar fjärdedelar på samma tallinje som man tidigare placerat in talen 0 till 6 på. Här behöver eleverna uppmärksammas på att talet $\frac{4}{4}$ har samma placering som talet 1. Vidare framhåller lärarna att inte sluta räkna vid $\frac{4}{4}$ utan fortsätta vidare med $\frac{5}{4}, \frac{6}{4}$ och så vidare. Även dessa tal placeras ut på tallinjen. Lärarna för fram att de behöver poängtera att detta är en talföljd och att det inte bara handlar om att dela upp en helhet i ett visst antal delar. Vidare kan eleverna få arbeta med andra tal i bråkform på samma tallinje och även här fortsätta talföljden och inte stanna vid 1. Då en del elever skrev en halv som 0,5 på tallinjen föreslår lärarna att det kan användas som utgångspunkt för att visa att 0,5 och $\frac{1}{2}$ är samma tal. Genom att utgå från det som är bekant för eleverna kan det underlätta för eleverna att förstå placeringen av $\frac{1}{2}$ på tallinjen.

Analysen av lärarnas samtal visar att det inte räcker att eleverna får placera ut talen $\frac{1}{2}$ och $\frac{1}{4}$ på en tallinje. Utifrån elevernas förståelse och analysen av undervisningen omformulerar lärarna en undervisning där det matematiska innehållet utökas. Det innebär att flera olika talföljder, både naturliga tal, decimaltal och tal i bråkform med olika nämnare och täljare används i undervisningen för att uppmärksamma tals placering på en tallinje. Samtidigt varieras inte representationen tallinjen. Bråktal som har värdet 1 behöver uppmärksammas och talföljderna fortsätta till bråktal över 1. Om lärare tar avstamp i den förståelse eleverna redan har kring decimaltal kan det hjälpa eleverna att förstå att även varje bråktal har en bestämd placering på tallinjen.

Variation av representationer vid storleksordning – årskurs 5

En grupp med elever som fick i uppgift att storleksordna bråktal med samma nämnare från det lägsta till det största, namngav bråken korrekt men storleksordnade talen tvärtom. Eleverna fick som stöd bilder på bråktalen och läraren poängterade att det var den färgade delen av bilden som skulle storleksordnas. När eleverna pekade på det minsta talet $\frac{1}{9}$ angav de att det var det största talet för att det bara är en person som ätit av tårtan och då är det fler bitar kvar på den.

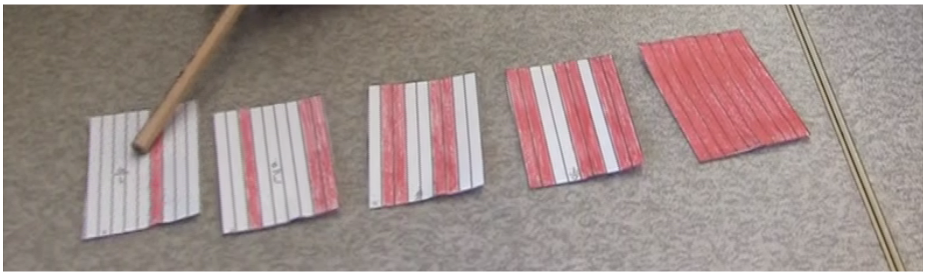


Bild 6.4. När eleverna fick i uppgift att storleksordna bråktal från minst till störst la gruppen talen tvärtom, sett från elevernas sida. Eleven pekar i bilden på talet $\frac{1}{9}$ och uttalar att det är det största talet.

På mötet reflekterar lärarna över hur undervisningen kan förändras så att eleverna kan lära sig storleksordna bråk från det minsta till det största. Martina lyfter fram att eleverna behöver prata och diskutera och att eleverna behöver göra flera uppgifter tillsammans.

> Martina: Vi behöver göra flera olika uppgifter med samma fokus. Det räcker inte att bara göra en storleksordning. Vi måste göra flera, många och på

> olika sätt, med olika fokus och med samma fokus. Vi kan inte bara stressa vidare. Det var det jag hann.
>
> Caroline: Mm. Vad säger du Hanna?
>
> Hanna: De elever som storleksordnade omvänt, hade det hjälpt dem att få jobba med del av antal samtidigt? Hade det kunnat bli ett sätt att få syn på… Det vet jag inte svaret på… Men det kanske kan hjälpa dem att förstå storleksordning bättre? Om man utnyttjar klassen, två av tjugotvå, två tjugoandra-delar gör så här och sju tjugoandra-delar gör så här, vilka är det? Det kanske blir lättare att se det då? Jag vet inte (årskurs 5).

I samtalet fokuserar lärarna på storleksordning av bråk. Lärarna har i de flesta diskussioner beskrivit att innehållet behöver utökas och representationen hållas konstant. I detta fall uttrycker lärarna istället att det kan vara en vits att byta representation, från del av helhet till del av antal. Detta kan hjälpa elevgruppen som fastnat i att titta på det icke färglagda området vid storleksordning, att istället fokusera på täljaren. Lärarna beskriver att en variation av representationer i undervisningen kan vara ett stöd för elevernas lärande av bråkens storlek.

Summering

Lärarnas gemensamma projekt handlade om undervisningens utformning utifrån elevernas förståelse. Genom att tillsammans granska elevernas förståelse och sin egen undervisning utvecklade lärarna gemensamt nya idéer om undervisning som kan påverka elevernas kunskapsutveckling. Användning av olika representationer som redskap i undervisningen var i fokus i lärarnas analys. Då lärarnas initiala idéer om undervisning inte var samstämmiga ledde det till förhandlingar som i slutänden resulterade i en förverkligad undervisning där innehållet utökades samtidigt som representationerna hölls konstant. Tanken bakom det utökade innehållet var att eleverna skulle få fler erfarenheter som de kunde resonera kring och användas som utgångspunkt i lärandet. Undervisningen baserades på ”lärande genom görande”, det vill säga eleverna blir producenter av mening. Även om resultatet visar att det i många fall verkar bättre att utöka innehållet genom att till exempel använda fler bråk än att variera representationerna kan det finnas tillfällen då representationen varieras för att eleverna ska upptäcka något specifikt inom bråk.

Även i detta tema framkom att barn och elever i olika åldrar har liknande svårigheter när det kommer till de tre olika representationerna; del av helhet, del av antal och tal på en tallinje.

Att konkretisera bråk

På lärarnas analysmöten kretsade samtalen kring redskap i form av konkretiserande material och betydelsen av att utgå från vardagliga föremål för elevernas lärande. Samtidigt problematiserades att det konkreta materialet också kan vara ett hinder för elevernas lärande.

Likadelning är normen – förskola

Ett sätt att konkretisera bråk i förskolan handlar om att dela upp helheter i delmängder.

Under första lektionen i förskolan fick barnen gå på en skattjakt. Vid varje skatt fick barnen ett uppdrag som gick ut på att dela upp saker. Ett exempel var att åtta kokosnötter hade trillat ner från två palmer. Barnens uppdrag var att placera de åtta kokosnötterna på de två palmerna. Barnen började med att placera 3 kokosnötter på den ena palmen och 5 kokosnötter på den andra palmen. Fanny frågade om det går att placera kokosnötterna på något annat sätt. Barnen ändrade då så att det blev 4 kokosnötter på respektive palm. När Fanny frågade om det finns fler sätt så svarade barnen att det inte finns fler. Fanny flyttade då kokosnötterna så att det blev 2 kokosnötter på den ena palmen och 6 på den andra. Barnen flyttade direkt tillbaka kokosnötterna så att det blev 4 på varje. Även på de andra uppgifterna på skattjakten strävade barnen åt att det skulle bli jämnt fördelat. Om det var ett antal som inte gick att fördela jämnt plockade barnen bort en så att det därefter gick att fördela jämnt.

På analysmötet lyfter Lisa upp att lärare ofta använder ord som lika, dela lika och att dela upp er lika tillsammans med barnen. Martina betonar att vuxna, både i skolan och hemma, påverkar barnen att tänka i likadelning, som till exempel att det kan vara viktigt att syskon får lika mycket. Vidare beskriver Fanny lärarnas roll i detta, att likadelning inte alltid behöver vara det rätta.

> Fanny: Jag tänker på vilken roll vi har i det här att det inte alltid är lika som är det rätta. Vi måste tänka oss för. För någonstans så präglar vi.

> Hanna: Det blir väldigt tydligt.
>
> Fanny: Det blir väldigt tydligt faktiskt. Då är frågan, hur tydliga är vi när vi ger dem olika uppdrag? Är det bara lika som gäller? Nu ska ni dela upp er i två lika stora grupper. Ja, det kanske behövs ibland, men inte alltid, nej (förskola).

Det förefaller som att lärarna har en samsyn om att aktiviteter som barnen möter kring delning till stor del handlar om att dela lika, som att dela in sig i två lika stora grupper. Detta tycks prägla barnens upplevelser och erfarenheter av delning till endast likadelning. Som kontrast mot situationer där det delas lika behöver barnen även upplevelser och erfarenheter där delningen inte alltid blir lika för att barnen ska kunna förhandla fram ny mening. Lärarna betonar vikten av sin egen roll i detta då de aktiviteter som de genomför tillsammans med barnen verkar påverka dem till att dela lika.

Lisa beskriver vidare att när barnen får i uppgift att dela upp 9 vindruvor i två högar är de inte vana vid detta, att fördela olika, och att barnen behöver möta fler sådana övningar för att få förståelse för både dela lika liksom dess motsats dela olika. Detta för att barnen ska kunna känna till när något är hälften och när något inte är hälften. Hanna föreslår att man ska hitta vardagssituationer där det är bättre att fördela olika och på så sätt visa att det inte alltid behöver vara lika. Lärarna försöker komma på situationer där det skulle kunna vara bättre att dela olika, men uttrycker att det är svårt. Ett exempel som dragkamp, att personer är olika starka leder till olika antal personer på varje sida av repet. Ett annat exempel är att koppla fördelning av antal med vikt, genom att få balans på en gungbräda.

> Fanny: Jag funderar på om man kan koppla ihop det med vikt. Det har vi jobbat med tidigare. Då sa barnen först att det ska vara lika många på båda sidor [på en gungbräda] för att det skulle väga jämnt. När vi då gjorde det, visade det sig att vi vuxna var större. Barnen sa då att det gick två barn på en vuxen. Då blir det fler barn där om det ska sitta en vuxen där. Då pratar vi olika många för att det ska väga lika.
>
> Hanna: Det var jag också lite inne på men då är vi tillbaks på lika med vikten, för att det ska bli balans (förskola).

Även om lärarna kommer fram till att barnen behöver möta vardagssituationer kring delning som inte leder till likadelning, visar det sig vara svårt att komma på tillfällen som i vardagen leder till detta. När lärarna kommer på händelser där det blir olikt, uppmärksammar de att andra företeelser i situationen gör att begreppet lika hamnar i fokus. Slutsatsen blir att vardagliga situationer som används för att förverkliga delning inte automatiskt behöver leda till att barnen får nya erfarenheter av begreppet.

Lärarna fortsätter att förhandla om vardagliga delningssituationer där det inte är lika tydligt att något annat blir lika som i vikt ovan. De beskriver att vid matsituationer vill barnen inte ha lika många köttbullar att äta och det sitter inte lika många barn vid varje bord. När det uppstår situationer i förskolan där det är olika behöver det poängteras. För att få en fullvärdig förståelse för hälften behöver barnen få möta både likadelning och aktiviteter som kontrasterar likadelning.

Äpple och cirklar som helhet har ett specifikt utseende – förskola

I förskolan hade barnen svårt att se att en helhet kan se ut på olika sätt utifrån hur en halv ser ut. Två halvcirklar måste enligt barnen sättas samman till en cirkel.

På analysmötet lyfter lärarna fram att ett äpple som konkretiseringsmaterial var begränsande när undervisningsinnehållet handlar om att gå från delen till helheten. Ett äpple har en ursprungsform och ett utseende. Lärarna uttrycker att om barnen får se ett halvt äpple och fundera över hur helheten ser ut så framstår det som naturligt att helheten är ett helt äpple och det förefaller svårt att det kan vara något annat. Lärarna påpekar att även geometriska figurer kan signalera att helheten har ett specifikt utseende, som exempelvis att två halvcirklar blir till en cirkel. Som ytterligare exempel beskriver Hanna att barnen behöver möta former där helhetens utseende inte är självklar utifrån delens utseende.

> Hanna: Precis som du [Fanny] sa, att inte alltid bara ha de här givna geometriska figurerna, utan hitta andra figurer. Med ett äpple vet man vad helheten ska vara… Får vi en halv cirkel, då förväntar vi oss att helheten är en hel cirkel. Vi behöver komma ifrån att helheten blir en given form. Det är inte helt enkelt, men där är vissa former som ger mer utrymme för den tolkningen än andra (förskola).

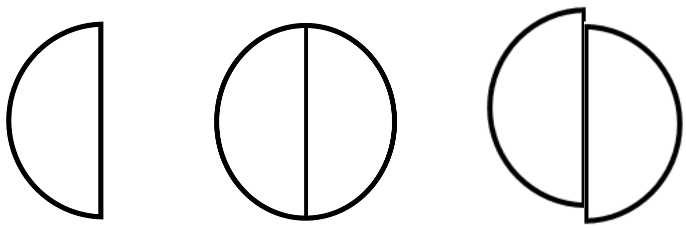


Bild 6.5. Två möjliga alternativ på hur helheten kan se ut utifrån en halvcirkel.

I samtalet tar lärarna utgångspunkt i redskap som cirklar och äpple och i barnens förståelse när de förhandlar om undervisningens kvalitet. Lärarna uppmärksammar att användning av redskap där helheten har ett bestämt utseende kan leda till att barnen får erfarenheter av att det enbart finns en lösning på hur helheten kan se ut utifrån hur halvan ser ut. Lärarna belyser bland annat det som illustreras i bild 6.5, att cirkeln som helhet kan kännas som en mer naturlig lösning utifrån halvcirkeln. Det finns i detta fall inte en automatisk korrespondens mellan redskapet, en cirkel, och det fenomen som barnen förhandlar mening kring, helheten. Lärarna föreslår att barnen ska få möta helheter som inte har ett på förhand givet utseende.

Tårtan stämmer inte alltid med delarna och helhetens egenskaper – årskurs 5 och 7

Eleverna använde vid några tillfällen en tårta som konkretisering för att argumentera kring täljarens och nämnarens betydelse.

Under den första lektionen i årskurs 5 fick eleverna arbeta med att definiera täljare och nämnare. På den efterföljande lektionen arbetade eleverna med $\frac{1}{4}$ med fokus på delarnas storlek och att delens placering inom helheten inte har någon betydelse. Därefter fick eleverna i grupp arbeta med att storleksordna bråk. Eleverna fick bilder som illustrerar bråk med samma nämnare. De fick i uppgift att skriva ut vilket bråk bilden representerar och sedan lägga bilderna i ordning från minsta till största tal (bilaga 11). En elevgrupp återkom vid flera tillfällen, under de båda lektionerna, till att beskriva bråk med hjälp av en tårta. När de skulle definiera täljaren diskuterade de om täljaren är det uppätna på tårtan eller det som ska ätas, om täljaren står för det ifyllda eller det som inte är ifyllt. När elevgruppen senare skulle storleksordna bråk fick de till sin hjälp bilder som illustrerar 0, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{4}$ och $\frac{4}{4}$ i form av cirklar. Eleverna namngav alla bråk korrekt, utom 0 där de skrev $\frac{0}{4}$, men storleksordnade dem i fel ordning. De uttryckte att bilden de skrivit $\frac{1}{4}$ på visar ett större tal än den bild de skrivit $\frac{2}{4}$ på (bild 6.6). Som motivering till storleksordningen jämförde de bilderna på bråk med en tårta. De uttryckte att bilden som illustrerar $\frac{1}{4}$ innebär att $\frac{1}{4}$ av tårtan är uppäten och då är det mer kvar av den tårtan jämfört med bilden som illustrerar $\frac{2}{4}$ där enbart halva tårtan är uppäten. Klassen diskuterade även vad $\frac{4}{4}$ står för. Innebär uppdelningen per automatik att tårtan ska delas mellan flera personer eller är det så att en och samma person ska äta alla bitarna?

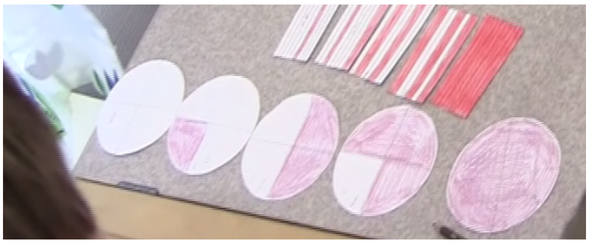


Bild 6.6. Eleverna hänvisar till en tårta för att motivera varför $\frac{1}{4}$ är ett större tal än $\frac{2}{4}$. Fotot är taget från motsatt håll än hur eleverna ser bilderna.

Under analysmötet håller Caroline upp bilden på en cirkel där $\frac{4}{4}$ är ifyllt. Lärarna diskuterar elevernas resonemang kring $\frac{4}{4}$, om det är en person som ska äta alla bitarna själv eller om det är flera personer som ska dela på tårtan. Caroline ställer frågan om det är de utritade linjerna på $\frac{4}{4}$ som får eleverna att fundera på att $\frac{4}{4}$ ska delas.

> Caroline: Varför tänker man då på fyra fjärdedelar, att man ska dela med andra? Är det för att man har de här linjerna?
>
> Hanna: Har det någon betydelse, om jag delar den med andra eller med mig själv? Hur ska man tänka på det? Handlar det bara om att man delar?
>
> Fanny: Man har erfarenheter av en tårta som är hel. Den delar man med andra.

> Hanna: Man pratar om att man delar med någon, men det måste man inte göra. Jag tror att det är något som vi hänger upp oss på. Bråk handlar om att dela. Det handlar inte bara om att se hur stor andel. Man ska dela med någon.
>
> Fanny: För det gör man ju oftast, för annars behöver man inte dela.
>
> Hanna: Man delar inte med sig själv.
>
> Fanny: Då kan jag ju ta allt på en gång.
>
> Caroline: Då behöver man inte rita i linjer heller.
>
> Hanna, Fanny och Martina: Nej.
>
> Hanna: De kan ta hur mycket de vill när de känner för det (årskurs 5).

I samtalet mellan lärarna speglas ett dilemma kring om linjerna som illustrerar $\frac{4}{4}$ av cirkeln har betydelse för elevernas förståelse. Dessutom noteras att det är elevernas egna tolkningar av cirkeln som en tårta som ställer till problem för förståelsen. Här blir det synligt att lärarna ställer sig frågande till om det har någon betydelse om $\frac{4}{4}$ tolkas som något som ska delas med någon annan eller som något som ska behållas själv. Elevernas tidigare erfarenheter och upplevelser av redskap i form av en tårta kan vara att den ska delas med andra. Om en person ska ha hela tårtan själv kan personen antingen ta allt på en gång eller bitar av den efter hand. Därför kan en bild på $\frac{4}{4}$ inte alltid beskrivas med hjälp av en tårta då det matematiska i detta fall inte stämmer helt med hur tårtan används i vardagliga sammanhang.

Lärarna fortsätter att reflektera kring elever som hänvisar till en tårta när de beskriver varför delarna i bråk ska vara lika stora. Eleverna uttalar att när en tårta delas vill alla ha lika mycket. I vardagliga sammanhang behöver det inte vara så, utan någon vill kanske ha en större tårtbit än någon annan. Senare under mötet lyfts åter tårtan upp som ett redskap för att knyta bråk till verkligheten. Även om det konkreta och laborativa är av vikt lyfter lärarna fram den problematik som de identifierat.

> Caroline: Ställer tårtan till det? Vi har pratat om det förut. Hur viktigt det än är med det här konkreta och laborativa, kan det ibland ställa till det i slutänden?
>
> Hanna: Det kan ställa till det när vi tar ett exempel där vi vet att verkligheten inte ser ut som det vi tänker i teorin. Om vi ställer fram en tårta på ett

> kalas så blir inte två bitar lika stora. Då får vi köpa den färdigdelad från konditoriet och det kanske man inte gör så där jätteofta. Vi ska noga tänka oss för vilka exempel vi hänvisar till. Det är inte trovärdigt att säga att alla ska ha exakt lika stor del av tårtan. För när de tänker dela en tårta, är de åtta personer, så ska den delas i åtta bitar. Ja, så noga som möjligt, men kanske inte så noga som vi tänker oss när vi pratar om en åttondel.
>
> Caroline: Det är just det här matematiska som är så…
>
> Martina: … skillnaden mot verkligheten.
>
> Caroline: Mot verkligheten ja. Men ändå hämtat från verkligheten.
>
> Hanna: Man kanske ska fundera just på vilka exempel man plockar in. Där är vi slarviga allihop, tänker jag spontant.
>
> Martina: Ja, ibland är det pizzor. Pizzor är precis likadant. Jag äter inte lika stor bit som [min man] gör.
>
> Hanna: Även om du delar en pizza och försöker göra den i fyra lika stora bitar, så kommer de inte att bli exakt lika stora. Då är chokladkakan med sina rutor tydligare för den är färdigindelad (årskurs 5).

I samtalet visar sig lärarnas gemensamma bild, att det finns en diskrepans mellan tårtan som konkretisering av delarnas egenskaper och tårtan i vardagliga sammanhang. Eleverna använder tårtan för att argumentera för att delarna ska vara lika stora. I vardagen behöver tårtbitarna inte vara lika stora då personer inte alltid vill ha lika mycket. Dessutom är det omöjligt att dela en tårta i exakt lika stora bitar. De redskap som hämtas från vardagen för att konkretisera bråk behöver tänkas igenom. En chokladkaka anses kunna vara ett bättre redskap, än en tårta och en pizza, för att illustrerar att delarna ska vara lika stora, då chokladkakan är indelad i rutor.

Under mötet reflekterar Hanna tillbaka till en lektion i årskurs 7 (pilotstudien) då eleverna i grupp storleksordnade tal i bråkform med samma nämnare och där tårtan åter kom i vägen för elevernas förståelse.

När eleverna i årskurs 7 skulle storleksordna bråk, fick de till skillnad från eleverna i årskurs 5, inga bilder utan enbart bråktal. Eleverna blev däremot uppmuntrade att rita egna bilder. Några elevgrupper fick även ett bråktal som var större än 1 som till exempel $\frac{9}{8}$. De tal som var större än 1 diskuterades sedan i helklass.

Hanna beskriver på analysmötet att eleverna i årskurs 7 inte ansåg att åttondelarna i $\frac{9}{8}$ behöver vara lika stora eftersom den första tårtan kunde vara större än den andra.

> Hanna: När de skulle ha mer än en hel… Om du skulle ha nio åttondelar, då behövde den andra tårtan troligtvis inte vara lika stor som den första, för det var inte samma typ av tårta. För eleverna spelade det ingen roll, så länge du tog en åttondel av den ena tårtan och åtta åttondelar av den andra.
>
> Martina: Ja just det.
>
> Hanna: Så blev det ändå nio åttondelar. Då behövde helheterna som man utgick från inte vara lika stora. Det är också jätteintressant. Det är jättesvårt att ibland konkret förklara varför det ska vara som det ska. Med tårtexemplet så faller det ju. Om du har en stor springform och en liten springform, så blir det inte två lika stora tårtor. Det är helt omöjligt nästan. Ibland gör vi det nog svårare för oss själva med våra exempel. Shit, man måste tänka på allt (årskurs 5).

Lärarna fördjupar sig kring elevernas val att använda tårtan som ett redskap för att beskriva och resonera kring bråk. Tårtan leder till att eleverna drar fel slutsats, eftersom användning av tårtan i vardagen och det som eleverna förhandlar mening om, delarnas storlek, inte överensstämmer. Eleverna anser att helheterna på bråk större än 1 inte behöver ha samma storlek då två tårtor inte behöver ha samma storlek. Det leder till att delarna i ett bråk får olika storlek.

Variera bildernas utseende på $\frac{1}{4}$ – årskurs 5

Ett sätt att konkretisera $\frac{1}{4}$ som del av helhet i årskurs 5 var genom bilder.

I årskurs 5 fick eleverna arbeta med talet $\frac{1}{4}$. Varje elev fick några olika kvadrater var (bilaga 12) och fick i uppgift att färglägga $\frac{1}{4}$ av varje kvadrat. Alla kvadrater samlades in, eleverna sattes i grupper och varje grupp fick en hög med ifyllda kvadrater tilldelade till sig. Elevgruppernas uppgift var att sortera kvadraterna efter hur de var ifyllda. De fick ta ställning till om bilden representerar $\frac{1}{4}$ eller inte. En kvadrat som var indelad i 16 lika stora rutor och där 4 rutor i hörnet var färglagda beskrevs av några elever som $\frac{1}{4}$. På en annan bild, där också 4 rutor var ifyllda men inte placerade i ett hörn, uttryckte samma elever att det inte är $\frac{1}{4}$, att det färglagda är på fel ställe (bild 6.7). Martina fyllde i en egen bild, där de färglagda rutorna var utspridda, och bad eleverna diskutera om den bilden representerar $\frac{1}{4}$ (bild 6.8).

Bild 6.7 till vänster och bild 6.8 till höger. Bilderna visar exempel på en fjärdedel som några elever tolkade som felaktiga.

Några elever uttryckte att det inte är en fjärdedel när rutorna är utspridda. Några ansåg att det är $\frac{1}{4}$ eftersom 4 rutor är ifyllda och det inte har någon betydelse vilka 4 rutor som är ifyllda. Några andra elever som också uttryckte att bilden är $\frac{1}{4}$, motiverade det med att om man sätter ihop de ifyllda rutorna till en kub så blir det $\frac{1}{4}$.

Några elever uttryckte att en bild på en kvadrat som är indelad i 4 olika stora delar med en del ifylld representerar $\frac{1}{4}$ (bild 6.9).

Bild 6.9. Ett exempel på en bild som några elever tolkade som $\frac{1}{4}$.

Gruppen uttryckte att storleken på delarna inte har någon betydelse och därför är bilden korrekt. Elevernas beskrivningar visar att placeringen av det färglagda området är av betydelse för elever när de tolkar bilder av $\frac{1}{4}$. De verkar utgå från att $\frac{1}{4}$ ska vara placerad i ett område i ett hörn. En del elever är ännu inte säkra på att delarna ska vara lika stora.

På analysmötet diskuterar lärarna de elever som motiverar att bilden representerar $\frac{1}{4}$ (bild 6.8) om man sätter ihop de utspridda färglagda delarna. Lärarna ställer sig tveksamma till om eleverna verkligen har förståelse för $\frac{1}{4}$ eftersom de verkar anse att det inte är korrekt när det färglagda är utspritt i figuren. De lyfter fram att läromedel brukar åskådliggöra $\frac{1}{4}$ med en bild på en kvadrat eller en cirkel där $\frac{1}{4}$ är placerat i ett hörn vilket förenklar bilden av $\frac{1}{4}$. Lärarna uttrycker att barnen redan på förskolan får möta bilden av $\frac{1}{4}$ på detta sätt, vilket kan få konsekvenser för deras lärande. Lärarna diskuterar att valet av bilder på bråk får betydelse för hur eleverna förstår $\frac{1}{4}$ och att eleverna tidigare behöver möta bilder där den färglagda delen av bråket är utspritt, än som här i årskurs 5.

Analysen visar att lärarna fördjupar sig i bilders betydelse för elevernas förståelse av bråk. Om barn och elever ensidigt möter bilder där $\frac{1}{4}$ är placerat i ett hörn ger det en förenklad bild av $\frac{1}{4}$. Därmed blir frågan om eleverna får tillräckliga erfarenheter som möjliggör förståelse för att det är den totala arean av det färglagda som är av betydelse och inte placeringen. För att undervisningen ska kunna möjliggöra ny förståelse föreslår lärarna att redskap i form av varierande bilder på $\frac{1}{4}$, där den färglagda delen är utspridd, används tidigt i undervisningen.

Samma uppgift som beskrivits ovan om fjärdedelar genomfördes även i årskurs 7, pilotstudien.

På analysmötet lyfter lärarna fram att det var fler elever i årskurs 5 än i årskurs 7 som valde att färglägga fjärdedelen utspridd i kvadraten (bild 6.10).

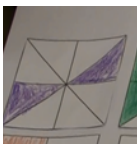


Bild 6.10. Exempel på en kvadrat där fjärdedelen inte är ifylld i ett hörn.

Lärarna beskriver att intentionen med en variation på bilder var att eleverna skulle identifiera vilka bilder som representerar $\frac{1}{4}$ respektive vilka som inte representerar $\frac{1}{4}$. De uttrycker att de måste visa egna färglagda bilder på bråk om många elever färglägger $\frac{1}{4}$ i ett hörn av kvadraten. På detta sätt får eleverna möta en variation på bilder, så att de kan diskutera vilka bilder som representerar en fjärdedel. Om elevernas bilder är ifyllda på liknande sätt får läraren inte syn på elevernas förståelse.

Analysen visar att lärarna identifierar att elevuppgiften, trots att den var öppen, ledde till att eleverna i årskurs 7 färglade $\frac{1}{4}$ på liknande sätt. När utfallet av undervisningen inte blir som det är tänkt kan läraren visa en variation på bilder av hur $\frac{1}{4}$ kan se ut. Om bilderna har liknande utseende skapas inte förutsättningar för diskussioner och därmed synliggörs inte elevernas förståelse av storlekens och placeringens betydelse. Redskap i form av variation på bilder på $\frac{1}{4}$ möjliggör ny förståelse.

Summering

Lärarna förhandlade fram mening om kvaliteterna i att använda olika redskap i undervisningen så som laborativt material, bilder och vardagshändelser. Lärarna engagerade sig för hur redskapen användes i undervisningen och dess betydelse för elevernas kunskapsutveckling oavsett stadium. Det fanns inte alltid en automatisk korrespondens mellan redskapen som användes i undervisning om bråk och konventionen för bråk, vilket fick betydelse för elevernas begreppsbildning. Ibland hamnade elevernas fokus istället på hur redskapen används i vardagliga sammanhang. För att undvika detta behöver eleverna möta en variation av redskap så att inte ett redskap eller ett utseende leder till att de fokuserar på fel aspekter. Att konkretiserande material inte alltid var ett stöd för begreppsutvecklingen gällde barn och elever oavsett ålder. Det gemensamma projektet handlade därigenom om sambandet mellan elevernas förståelse och hur redskap används i undervisningen. I detta tema, liksom i det förra, synliggjordes att ett förenklat innehåll, genom ensidiga bilder, kan leda till att eleverna drar fel slutsatser om bråk. En kvalitet som framträdde var att innehållet behövde utökas och varieras.

Att säkerställa elevernas lärande

På analysmötet förhandlade lärarna om vad i den förverkligade undervisningen som verkade ha positiv inverkan på elevernas lärande. Samtidigt visade det sig svårt att säkerställa alla elevers kunskapsutveckling.

Eleverna diskuterar fram ny förståelse om delarnas egenskaper – årskurs 5

På lektionen i årskurs 5 fick eleverna diskutera delarnas egenskaper utifrån olika bilder. Eleverna fick börja med att fylla i $\frac{1}{4}$ i olika kvadrater. De färdigifyllda kvadraterna samlades in. Eleverna fick sätta sig i grupper och varje grupp blev tilldelade några av de ifyllda kvadraterna. Eleverna fick i uppgift att resonera kring om bilderna illustrerade $\frac{1}{4}$ eller inte. Bilderna sattes sedan upp på större A3-papper, framme vid tavlan, där det stod *korrekta* respektive *felaktiga*. Därefter förde Martina en diskussion kring elevernas lösningar. Hon ställde frågor om där var någon kvadrat som var extra svår att avgöra om den var $\frac{1}{4}$ eller inte och fick på så sätt igång diskussionerna.

Utifrån videosekvensen beskriver lärarna elevernas olika förståelse, att eleverna var osäkra på placeringen av fjärdedelen och även osäkra på att den måste ha en bestämd storlek. Lärarna uttrycker att det var ”mycket lärande” i denna situation då de noterar att eleverna korrigerar sig själva, dels genom elevernas diskussioner mellan varandra och dels med hjälp av lärarens frågor. Martina lyfter fram att det var svårt att veta hur mycket hon skulle gå in och peta i elevernas diskussioner, vilket leder vidare till ett fördjupande samtal om kvaliteterna i undervisningssekvensen. Lärarna konstaterar att Martina släppte diskussionen ganska fri då hon inte hela tiden talade om vad i diskussionerna som är rätt och vad som är fel. Genom Martinas följdfrågor, på elevernas svar, som; hur kom du fram till det? eller hur kan du se det? skapades utrymme för eleverna att fortsätta diskutera utifrån sin förståelse. Dessutom beskriver lärarna att när Martina tog in en egen bild på $\frac{1}{4}$ (bild 6.8), kontrasteras saker mot varandra. När bråk visas på ett sätt till utmanar det elevernas tankar om placering och storlek av $\frac{1}{4}$. Lärarna betonar att det är eleverna som genom diskussioner i både grupp och helklass tillsammans med läraren kommer fram till vad som är rätt respektive fel. Martina flyttade bilderna på fjärdedelar som eleverna ansåg hade hamnat på fel A3-papper. Det var ett tecken till eleverna på vad som är rätt respektive fel, så att de inte behövde vara osäkra på vad som gäller. Lärarna lyfter även fram att Martina i undervisningssituationen vid några tillfällen uttryckte att ”den här bilden visar en fjärdedel”. På så sätt blir eleverna mer säkra på vad som är korrekt eller inte i diskussionen. Dessutom avslutades diskussionen i klassrummet med lärdomar där eleverna beskrev att delarna ska vara lika stora och att det inte spelar någon roll var delarna är placerade.

Analysen visar att lärarna diskuterar kvaliteterna i den förverkligade undervisningen. En kvalitet som lyfts fram är att eleverna får diskutera sig fram till vad som gäller för storlek och placering av $\frac{1}{4}$ i en kvadrat. Lärande kan i detta sammanhang tolkas som att eleverna själv förhandlar sin egen mening, från att $\frac{1}{4}$ ska vara placerad i ett hörn till att de själva uttrycker att placeringen inte har någon betydelse. En annan kvalitet som framträder ur lärarnas samtal är lärarens roll i att leda klassrumskommunikationen så att eleverna kan diskutera sig fram till vad som gäller för storlek och placering på täljaren i en kvadrat. Lärarna verkar eniga om att det är lärarens frågeställningar tillsammans med de bilder som visas på $\frac{1}{4}$ som utmanar elevernas förståelse och skapar utrymme för eleverna att resonera kring storlek och placering. En tredje kvalitet som framkommer är att läraren vid några tillfällen uttrycker vilka bilder som är rätt, så att eleverna i slutet på lektionen inte behöver tvivla på vad som gäller för storlek och placering av $\frac{1}{4}$ i en kvadrat. Dessutom kommer lärarna fram till att en sammanställning i slutet av lektionen bidrog till att beskriva vad som är korrekt.

Att använda förvärvad kunskap om delarnas egenskaper i nya sammanhang – årskurs 5

I årskurs 5 fick eleverna uppgifter där bland annat förståelsen av täljaren var av vikt för att lösa uppgifterna.

På första lektionen i årskurs 5 fick eleverna i grupp skriva definitioner av täljare och nämnare. En elevgrupp fastnade i ett samtal om täljaren var det ifyllda området eller det som inte var det ifyllda. Dessa elever hann inte göra sina definitioner klara under lektionen men fick lyssna på övriga gruppers resonemang. På den andra lektionen arbetade klassen först med $\frac{1}{4}$, placering och storlek i en kvadrat (se avsnitt: Eleverna diskuterar fram ny förståelse om delarnas egenskaper – årskurs 5). Eleverna diskuterade både i grupp och i helklass. Som avslutande uppgift fick eleverna storleksordna bråk med samma nämnare. Eleverna fick bilder som de fick namnge innan de placerade dem från minst till störst. Samma grupp som tidigare hade funderat på om täljaren stod för det ifyllda eller inte ifyllda, namngav nu alla bråken korrekt, men rangordnade bilderna från störst till minst. Eleverna motiverade sitt beslut utifrån att det finns mer kvar att fylla i, mer kvar att rita på, på $\frac{1}{4}$ än på $\frac{3}{4}$, där det enbart finns en liten yta kvar att färglägga.

På analysmötet fördjupar sig lärarna i elevgruppen som inte löste definitionsuppgiften. Lärarna uttrycker att gruppen nästan klarade alla bilder på $\frac{1}{4}$ och sedan var de med och diskuterade och lyssnade på helklassdiskussionen. Trots att gruppen verkade förstå undervisningsinnehållet var eleverna på den avslutande uppgiften fortfarande kvar i frågan om delen är det ifyllda området eller inte. Lärarna lyfter fram att elevgruppen behöll sin förståelse genom båda lektionerna och att andra elevers lösningar inte påverkat deras sätt att tänka om delens egenskaper. Det verkar som om eleverna för stunden accepterar nya lösningar men senare går tillbaka till sitt tidigare sätt att tänka och förstå.

Analysen av lärarnas samtal visar att lärarna har en gemensam bild av att elevgruppen i undervisningssituationen, trots arbete i grupp och helklass där korrekta påståenden lyfts fram, inte lyckas bli så förtrogna med innehållet att de kan ta med det till en ny förhandlingssituation. Elevernas individuella förståelse tycks svår att förändra då de inte använder sig av den i nya situationer.

Med hjälp av strategier från tidigare uppgifter löser eleverna addition av bråk – årskurs 9

I årskurs 9 arbetade eleverna i grupper där de fick diskutera sig fram till lösningar på olika uppgifter som byggde på varandra. Mellan uppgifterna diskuterades lösningarna i helklass. Som första uppgift fick eleverna diskutera täljarens och nämnarens betydelse. Därefter fick de i uppgift att uppskatta svaret på $\frac{12}{13} + \frac{7}{8}$ (bilaga 16). Uppgiften var hämtad från ett tidigare nationellt test som genomförts i USA med 13-åringar. Eleverna i klassen fick till sin hjälp fyra svarsalternativ. Inför uppgiften fick eleverna ingen genomgång varken kring addition av bråk eller kring uppskattning även om det i kartläggningen framkommit att endast cirka hälften av eleverna klarat av uppgiften $\frac{2}{5} + \frac{1}{3}$ (bilaga 13). Vid kartläggningstillfället fick eleverna fyra svarsalternativ. Även om det i gruppdiskussionerna kring $\frac{12}{13} + \frac{7}{8}$ framkom olika förståelse kom alla grupper till sist fram till korrekt svar, nämligen 2. Efter denna uppgift, samt helklassdiskussion, fick elevgrupperna en additionsuppgift $\frac{3}{5} + \frac{1}{4}$ (bilaga 16). Även här fick eleverna fyra svarsalternativ. Eleverna blev påminda att använda sig av rimlighet och definition av täljare och nämnare, som de arbetat med tidigare.

Lärarna diskuterar att de flesta eleverna i USA svarade 19 eller 21 på uppskattningsuppgiften. Samtidigt frågar sig lärarna vad som hade hänt om uppgiften genomförts individuellt. Hur många elever hade då svarat rätt? Hade eleverna även i denna klass svarat 19 eller 21? Lärarna uttrycker att det verkar vara samtalet i grupp som hjälpt eleverna att komma fram till ett korrekt svar. Under mötet uttrycks även att definitionsuppgiften av täljare och nämnare samt rimlighetsuppgiften var ett stöd för eleverna i gruppdiskussionerna och att eleverna därigenom klarade additionsuppgiften $\frac{3}{5}+\frac{1}{4}$. Detta trots att Hanna aldrig talade om för eleverna hur addition av bråk går till.

I samtalet identifierar lärarna vad i den förverkligade undervisningen som ledde till att eleverna kom fram till rätt svar på additionsuppgiften. Lärarna verkar eniga om att det är deltagandet. Eleverna fick tillsammans resonera sig fram till hur addition av bråk går till, vilket bidrog till att de kom fram till rätt svar. Detta sätt att förverkliga undervisning står i kontrast till att läraren förevisar. Dessutom verkar eleverna utifrån tidigare genomförda uppgifter, definitionsuppgiften av täljare och nämnare och rimlighetsuppgiften, ta med sig sina nya erfarenheter till nästa uppgift. Detta står i kontrast till förra exemplet där eleverna inte lyckades ta med sig nya erfarenheter till nästa uppgift.

Elevlösningar som utgångspunkt för elevernas diskussion av multiplikation i bråk – årskurs 9

I årskurs 9 användes elevernas egna lösningar på multiplikation av bråk från kartläggningen som utgångspunkt för elevernas diskussion i undervisningen. Kartläggningen visade att det enbart var tre elever i årskurs 9 som klarade multiplikation av ett heltal med ett bråktal, $4\times\frac{3}{4}$ (bilaga 13). På lektionen fick eleverna samma uppgift att diskutera i grupp men fick då se 5 olika elevlösningar från klassen (bilaga 17). Efter elevernas gruppdiskussion framkom inga felaktiga svar.

Lärarna beskriver att elevlösningarna, både korrekta och felaktiga, verkar vara ett stöd för eleverna i diskussionerna. De felaktiga lösningarna kan fungera som en kontrast mot de korrekta. Lärarna uttrycker att eleverna verkar klara av att lösa multiplikationsuppgiften när den genomförs tillsammans med andra. Samtidigt funderar lärarna på vad som händer med förståelsen två veckor senare. Lärarna lyfter också att eleverna signalerar tveksamheter mellan att förstå eller inte förstå uppgiften.

> Caroline: Och då har du inte haft någon genomgång av multiplikation alls.
>
> Hanna: Nej. Detta var det första vi gjorde. Det var en styrka att diskutera utifrån exempel och att man gör det tillsammans med dem. Sen är det ju det där, har alla tagit det till sig? Det vet man inte säkert.
>
> Martina: Inte säkert nej.
>
> Hanna: Jag [som elev] kanske fattar det i diskussionen, men fattar jag det två veckor senare när jag ska tänka själv? Det är inte heller säkert. Det är spännande i deras resonemang att de ändå kommer fram till att så här måste det vara.
>
> Martina: Lära i grupp.
>
> Caroline: Det är spännande när du [Hanna] kommer fram först en gång [till eleverna som uttrycker] jo, jo, vi kan detta. Sen så börjar de tvivla lite igen. Sen mitt i [uttrycker eleverna] vi är klara.
>
> Hanna: Ja precis när de är så här [visar en frustrerande gest] [uttrycker eleverna] Hanna vi är klara.
>
> Caroline: Plötsligt trillade det ner där (årskurs 9).

I ovanstående sekvens diskuteras elevernas lärande. Trots att få elever klarade $4 \times \frac{3}{4}$ vid kartläggningen och läraren inte hade någon genomgång av multiplikation kom alla grupper fram till korrekt svar på lektionen. En kvalitet som lärarna identifierar i undervisningen är att eleverna tillsammans diskuterar hur multiplikation av bråk går till. En annan kvalitet är att eleverna får diskutera både korrekta och felaktiga elevlösningar från kartläggningen. Trots detta ställer sig lärarna tveksamma till hur de ska tolka elevernas utsagor. Vad betyder det när eleverna uttrycker att ”vi är klara”? Har alla elever förstått? Lärarna är osäkra på vilken förståelse varje enskild elev verkligen har med sig om multiplikation efter gruppdiskussionen och om gruppens förståelse har erövrats av alla. Dessutom beskriver lärarna att även om eleverna har erövrat förståelse i situationen är det inte säkert att den förståelsen finns kvar några veckor senare.

Summering

Lärarna visade ett ömsesidigt engagemang för elevernas kunskapsutveckling. Deras förhandlingar framkom särskilt när de ställde sig tveksamma till huruvida undervisningen leder till lärande eller inte. Här blev det synligt hur lärarna identifierade vikten av att eleverna själva får diskutera sig fram till vad som gäller samtidigt som resultatet visar att alla elever inte lyckas ta med sig nya erfarenheter in i nya förhandlingssituationer. Om eleverna inte erövrar ny förståelse och tar med den ”felaktiga” förståelsen till kommande lektioner försvårar det progression i undervisningen.

För lärarna framträdde en svårighet att veta om alla elever i klassen erövrat förståelse även om de verkade eniga i situationen. Här synliggjordes vikten av att eleverna fick ett gemensamt fokus att diskutera utifrån, vilket kunde vara i form av elevlösningar från en kartläggning. Målet lärarna strävade mot var att alla elever ska kunna resonera sig fram till korrekta begrepp eller procedurer. För att skapa förutsättningar för elevernas resonemang, både i grupp och helklass, framstod lärarens frågor som avgörande.

Kapitel 7 Diskussion

I detta kapitel avser jag att utifrån uppsatsens syfte och problemställning diskutera studiens centrala bidrag: För att förbättra progression i undervisning om bråk är det av vikt att lärare identifierar elevers förståelse och att olika lärarkategorier tillsammans förhandlar om undervisningens kvalitet. Studien kommer att diskuteras i relation till Wengers tre dimensioner; gemensamt projekt, ömsesidigt engagemang och utveckling av kollektiva redskap. Diskussionen avslutas med implikationer för progression, video som analysredskap, kollegialt lärande samt idéer för fortsatt forskning.

Resultatet visar att lärares analysarbete som baseras på olika typer av data (dokumentation) varit en förutsättning för att genomföra undervisning som tar utgångspunkt i elevers förståelse. Att enbart fokusera kartläggningar med elever gav inte optimalt underlag för lärarna att planera undervisning med progression. Kartläggningarna visade vilket innehåll eleverna ännu inte förstod, men det saknades information om *hur* eleverna förstod. Genom att lärarna tillsammans i praktikgemenskapen även analyserade videoklipp där elevernas förståelse identifierades, kunde undervisningen skapa förutsättningar för en bättre kunskapsutveckling för eleverna. För en förbättrad progression i undervisningen krävs både analys av kartläggning och undervisning.

Resultatet visar även på vikten av samarbete inom ämnet och mellan stadier (förskola-åk 9) för att synliggöra progression och identifiera kvaliteter i undervisningen. Lärarna behövde använda sig av varandras specifika ämnesdidaktiska kunskaper för att kunna analysera elevernas förståelser av bråk vilket kan tolkas som att det inte räcker med generella kunskaper. De identifierade att eleverna hade liknande svårigheter kring bråk oavsett årskurs och att små didaktiska förändringar i undervisningen kan påverka elevernas kunskapsutveckling. De didaktiska skillnaderna handlade ofta om förändringar i ordval när läraren introducerade en uppgift som till exempel: sättet att ställa frågor, ett utökat innehåll eller en variation av konkretiserande material. Dessa kvalitativa förändringar verkar ha betydelse för att förbättra progression i undervisningen.

Resultatet visar att två moment varit särskilt viktiga för att förbättra progression i undervisningen, dels elevers förståelse som utgångpunkt för att diskutera undervisning och dels kollegialt samarbete mellan olika lärarkategorier.

I den diskussion som följer kommer jag därför att fokusera studiens två centrala bidrag som berör elevers, såväl som lärares lärande.

Elevers lärande

Att planera för progression innebär att utgå från elevernas förståelse och ställa ökade krav. Lärarna valde att förhandla om fyra didaktiska problemområden som särskilt kom att påverka undervisningens kvalitet och progression: Representationer, vardagsbilder, multiplikation av bråk samt tillämpning av egna erfarenheter i nya situationer. Nedan diskuteras ett problemområde i taget.

Representationer

Det första problemområdet handlar om hur lärarna erbjöd en variation av representationer; del av helhet, del av antal och tal på en tallinje för att öka elevernas förståelse för tal i bråkform.

Eleverna i årskurs 3 använde sin förståelse om de hela talen för att förstå del av helhet. Det innebar att de tolkade bråk som en division, det vill säga som en process och inte som ett tal. Till skillnad från tidigare studier som visat att division kan åskådliggöra täljarens och nämnarens betydelse (Sveider, 2016) visar denna studie tvärtom, att det uppstår svårigheter för eleverna när de tolkar bråk som en division. Denna förståelse verkade dessutom snarare förstärkas än utmanas och förändras när eleverna gick mellan de olika representationerna.

Eleverna i årskurserna 3, 7 och 9 använde sin förståelse av del av helhet på tallinjen. Detta medförde att eleverna delade upp tallinjen i lika stora delar för att sedan placera ut talen, vilket även Wong (2013) uppmärksammat i årskurserna 3 och 6. Utifrån det kollegiala samtalet framkom att lärarna inte uppmärksammat eleverna på de specifika skillnaderna mellan de två representationerna, att varje tal har en specifik punkt och placering på tallinjen, samt att bråktalen står i relation till talet 1, vilket är specifikt för tallinjen (Wong, 2013).

Jag kan konstatera att eleverna oavsett stadie, hade liknande svårigheter med de tre representationerna; del av helhet, del av antal och tal på en tallinje. Det ger även en samstämmig bild av att variation mellan representationer inte automatiskt leder till kunskapsutveckling. Implikationerna blir därmed att en omedveten övergång mellan representationerna kan vara negativ för progressionen mellan stadierna. Ett sätt att öka kvaliteten i undervisningen kan vara att lärare arbetar mer ingående med varje representation och visa på likheter och skillnader mellan dem. Även om Ball (1993) beskriver att lärare behöver välja representation utifrån vad som ska läras, nämns inte hur elevers kunskapsutveckling påverkas av byten mellan representationer. I föreliggande studies kollegiala samtal framkom dessutom att ett utökat innehåll, olika tal i täljaren att resonera utifrån, kan förändra förståelsen att täljaren stod för ett heltal.

Elevers förståelse har ofta kartlagts genom intervjuer (Ball, 2007; Wong, 2013) eller i form av diagnostiska test (Löwing, 2016). I denna studie har elevers förståelse framkommit genom att lärare analyserat elevernas förståelse i undervisning på flera stadier. Detta kan vara en orsak till att problematiken med övergångar mellan representationer tidigare inte framgått på liknande sätt.

Vardagsbilder

Det andra problemområdet handlar om hur lärarna på olika stadier erbjöd vardagliga bilder för att eleverna skulle tolka och förstå bråk. Bilderna var tänkta som ett stöd för elevernas begreppsutveckling kring bland annat helhet och delar samt storlek på bråk.

Så som visats i resultatet hade barnen i förskolan en föreställning om att både helheten och delarna skulle ha ett specifikt utseende. I de kollegiala samtalen framkom att de vardagsbilder som användes i förskolan för att visa tal i bråkform ofta var äpplen där bråkdelar blir specifika i form av klyftor. Detta kan vara en anledning till att äldre elever senare verkade ha föreställningen att $\frac{1}{4}$ har ett specifikt utseende, vilket även Ball (1993) och Löwing (2016) identifierat med 9-åringar. Resultatet ger implikationer om att omedveten vardagsanknytning kan utgöra ett hinder för progression.

Utifrån denna studie menar jag att grunden för hur barn och elever tolkar bråk som helhet och delar läggs i förskolan, vilket även Watts m.fl. (2014) poängterar. Det visar att de vardagliga föremål som barn möter kan få en avgörande betydelse. Det räcker inte att barnen kan relatera till materialet, materialet måste även ge möjligheter till utforskande och utvecklande av matematisk förståelse. Även om Reis (2011) inte studerat just begreppet bråk, beskriver hon likt denna studie, materialets betydelse. Studien visar att barn behöver möta samma matematiska begrepp i flera olika vardagssituationer och med olika material för att möjliggöra generalisering till andra sammanhang. Förskollärarens matematikdidaktiska kunskaper utifrån olika vardagssituationer kan därmed bli avgörande. Jonsson m.fl. (2017) framhåller att undervisningen i förskolan behöver ta sin utgångspunkt i barns intresse och de lekar och aktiviteter som uppstår i vardagen för att därigenom utmana och stimulera.

Resultatet visar att när de vardagliga föremålen inte stämde överens med konventionen för bråk fick eleverna i grundskolan svårigheter att resonera kring storleksordning av bråk eller bråk större än 1 med hjälp av pizzor eller tårtor. Detta resultat står å ena sidan i motsats till den studie som visar att elever lättare klarar av att storleksordna bråk och tolka bilder på bråk större än 1 när de får resonera utifrån pizzor (Mack, 1990). Å andra sidan kan strukturerat material i form av pizzadelar leda till att elever fokuserar på att finna delar där pizzans fyllning stämmer överens istället för delarnas storlek (Sveider, 2016). En viktig skillnad här är att eleverna i föreliggande studie själv använde pizzan utifrån hur den kan användas i vardagliga sammanhang, vilket är skillnad mot att elever får ett strukturerat material i form av pizza och en tillhörande uppgift att resonera utifrån. De vardagsbilder som lärare använder för att konkretisera bråk kan därmed få konsekvenser när vardagsbilden inte fungerar i andra situationer. För undervisning om bråk uppstår ett dilemma när både kursplan och kommentarmaterial skriver fram att undervisningen ska behandla hur tal i bråkform används i vardagliga sammanhang. Det räcker dock inte *att* använda vardagliga sammanhang, det centrala blir att läraren väljer sammanhang som erbjuder olika handlingsalternativ.

Sammantaget ger detta en bild av att vardagsanknytning inte alltid är optimalt för barns och elevers kunskapsutveckling oavsett stadium. En kvalitet som därmed framträder är att vardagsbilder som används i undervisningen behöver vara genomtänkta för olika kontexter både på kort och lång sikt för att främja elevernas begreppsutveckling. Ett möjligt alternativ är att elever får möta en rik variation på bilder och material som representerar bråk. Genom att möta ett utökat innehåll kan det förhindra att elever uppfattar att delen på ett bråk har ett specifikt utseende (Löwing, 2016). En variation på vardagliga händelser, bilder och laborativt material kan därmed bli ett stöd för elevernas kunskapsutveckling.

Multiplikation av bråk

Det tredje problemområdet handlar om att endast 20 % av eleverna i årskurs 9 löste multiplikation av ett tal i bråkform med ett heltal vid kartläggningen. Detta kan jämföras med Löwings (2016) studie där ungefär 65 % av eleverna i årskurs 6 kunde lösa liknande uppgifter. Den vanligaste lösningen var att eleverna multiplicerade heltalet med både täljaren och nämnaren. Utifrån en tänkt progression i kursplanen kan det ses som problematiskt att få elever klarade att lösa denna typ av uppgift i årskurs 9. Utifrån lärarnas kollegiala samtal framkom att det inte var optimalt för elevernas kunskapsutveckling när lärarna förevisade multiplikation för eleverna. Istället fick eleverna mer kvalitativt resonera utifrån olika lösningar från kartläggningen, såväl korrekta som felaktiga, för att själv få syn på hur multiplikation går till. Detta sätt att använda kartläggningens lösningar direkt in i undervisningen skiljer sig från att använda kartläggning som underlag för att utveckla undervisning (Löwing, 2016; Skolverket, 2017e) eller för att identifiera elever i behov av riktade anpassningar (Utbildningsdepartementet, 2016).

Att tillämpa erfarenheter i nya situationer

Det fjärde problemområdet handlar om svårigheten för elever att ta med nyvunna specifika erfarenheter in i nya uppgifter. I det kollegiala samtalet ställde sig lärarna tveksamma till om eleverna lyckades ta med sig nya erfarenheter både mellan uppgifter, lektioner och årskurser. Tidigare studier i förskolan visar att barn kan överföra sina erfarenheter mellan liknande aktiviteter men i möte med nya material börjar barnen utforska på nytt. Det samma gällde om det förflutit lång tid mellan aktiviteterna (Reis, 2011). Även studier som genomförts i grundskolan visar att oavsett om elever arbetar utifrån eget arbete (Erlwanger, 1973) eller grupparbete (Löwing, 2004) är det svårt att säkerställa varje elevs kunskapsutveckling. Om elever inte lyckas befästa begreppen kan det vara svårt att påverka progression i undervisningen. Utifrån lärarnas kollegiala samtal framträdde ännu en kvalitet i undervisningen, nämligen att interaktionen mellan lärare och elev och mellan elever har betydelse. I förskolan handlade det om att förskolläraren utifrån till exempel begreppet halv kunde utmana barnen i interaktion utifrån flera olika vardagssituationer, vilket även Reis (2011) uppmärksammat som viktiga för barns utveckling.

Resultatet visar att eleverna i grundskolan behövde gott om talutrymme för att diskutera begrepp och att lärarens roll blev att ställa frågor som utmanade elevernas idéer så att de kunde fördjupa resonemanget. Läraren hade även en viktig roll i att samla ihop gruppernas olika diskussioner i helklass så att olika åsikter kom upp till ytan samtidigt som läraren drev samtalet. I slutet av diskussionen fick det inte råda någon tvekan om vad som gällde för det matematiska begreppet. Detta sätt att förverkliga undervisning ligger i linje med Smith, Hughes, Engle och Steins (2009) tankar om rika matematiska diskussioner där läraren under lektionen identifierar och väljer ut lösningar som ska diskuteras i helklass. I denna studie använde lärarna lösningar från kartläggningen i den gemensamma planeringen vilket bidrog till att de på förhand kunde identifiera vilka lösningar som skulle användas i undervisningen. En annan skillnad var att eleverna gruppvis fick diskutera olika lösningar innan de togs upp i helklass. Detta kan ha bidragit till att fler elever deltog i diskussion om olika lösningars kvaliteter, än om lösningarna enbart hade diskuterats i helklass.

Något som måste betonas i sammanhanget är att *vad* eleverna fick diskutera var av betydelse. I flera fall var lärarna eniga om att uppgifterna behövde utökas så att eleverna fick en variation att resonera utifrån. Detta arbetssätt verkade fungera väl även om uppgifterna inte nådde upp till alla kriterier för att kallas ett rikt matematiskt problem (jfr. Smith m.fl. 2009). Lärarna kom genom kollegiala samtal fram till liknande idéer som forskning inom området anger, nämligen att elever behöver diskutera utifrån utmanande, matematiska uppgifter (Schoenfeld, 2014). Resultatet visar även att lärarnas förverkligande av undervisning bygger på resonemang och begrepp. Detta är särskilt intressant då tidigare studier visat att elever mestadels får öva på procedurer i undervisningen vilket påverkar deras möjlighet till lärande (Jäder, 2015; Sidenvall; 2015). Trots detta kvarstår dilemmat att säkerställa att alla elever får nya erfarenheter som de kan ta med in i nya uppgifter.

Med utgångspunkt i ovanstående diskussion kring elevers lärande drar jag slutsatsen att progressionen i undervisningen inte varit optimal. Eleverna har genomgått liknande bråkinnehåll och nivå i undervisning oavsett stadium. En förenkling av innehållet bidrog inte alltid till kunskapsutveckling. I det kollegiala samtalet framkom några olika kvalitativa aspekter som kan gagna undervisningens progression. Det matematiska innehållet behöver oavsett stadie utökas så att eleverna får utforska och befästa begreppen. Ett utökat innehåll kan innebära att eleverna får möta en stor variation på bilder, vardagshändelser eller laborativt material av ett och samma bråktal för att upptäcka att det är arean som är av betydelse och inte storlek och form. Det kan även handla om att möta en variation på täljaren för att diskutera vad den står för.

Lärares lärande

Det nybildade tillfälliga arbetslaget, praktikgemenskapen, bestod av lärare från grundskolans alla stadier samt en lärare från förskolan. Under studiens genomförande blev det uppenbart att lärarna behövde använda sig av varandras kunskaper för att förhandla fram ny förståelse. Lärare som själva inte lyckades identifiera mindre framgångsrika förståelser kunde inte heller påverka dessa. Man kunde inte heller upptäcka brister i planeringen genom att enbart analysera kartläggningar – kompletterande analyser med videoklipp fick en avgörande betydelse. Följande särskilt viktiga aspekter av samarbetet och didaktiska förhandlingar i lärarnas praktikgemenskap kommer att lyftas fram i den text som följer: heterogena grupper, analysarbete samt ämnesdidaktiska frågeställningar.

Heterogena grupper

Den första aspekten handlar om lärarnas olika erfarenheter som en tillgång i de kollegiala samtalen, både när de diskuterade progression, elevernas förståelse eller framgångsrik undervisning. Trots nya insikter verkade inte alla samtal leda till en förändrad praktik.

Tack vare att praktikgemenskapen bestod av lärare från olika stadier kunde de tillsammans identifiera att progressionen i undervisningen inte varit optimal. De hade haft liknande idéer om att variera representationerna samtidigt som eleverna hade liknande svårigheter med dem. Genom det kollegiala samtalet blev det uppenbart att tidigare undervisning inte alltid varit framgångsrik. Lärarna omvärderade synbart sina idéer om undervisning utifrån olika representationer, vilket enligt Wengers (1998) synsätt kan tolkas som en ny insikt och utveckling av praktiken. I dessa samtal var lärarna inte alltid eniga till en början. När de granskade elevernas förståelse av tallinjen var de oeniga om det fanns en problematik i att de använde sina kunskaper om del av helhet även på tallinjen. Utan lärarnas olika erfarenheter är det inte säkert att varken problematiken hade kommit fram eller att lärarna hade lyckats förhandla sig fram till en gemensam förståelse för en förändrad undervisning. Även Granberg och Ohlsson (2005) poängterar just oliktänkande som en drivande kraft för processer och lärande i arbetslag. Olin (2009) som studerat skolans mötespraktik lyfter tvärtom fram att den bästa formen för kollegialt lärande är när lärarna själv har valt att samarbeta samt att de har gemensamma pedagogiska utgångspunkter. Dock lyfter hon fram att kollegialt lärande mellan olika lärarkategorier kan vara att föredra när invanda tanke- och handlingsmönster ska brytas. Denna studie visar därmed på ett tredje alternativ för kollegialt lärande, att lärare med olika pedagogiska erfarenheter väljer ett gemensamt projekt att fördjupa sig kring. Utifrån studien menar jag att oliktänkande var en förutsättning för att förbättra undervisning om bråk i ett 1-16-års perspektiv. Oliktänkande möjliggör att lärarnas känsla av förtrogenhet med ämnet utmanas och kan enligt Wenger (1998) leda till att lärandet intensifieras.

Resultatet visar också på att lärare kan ha svårt att förändra sin undervisning när tidigare erfarenheter av matematik handlat om rätt och fel och alternativa lösningar på helhet respektive delars utseende blev svåra att visualisera. Detta visar likt Lindensjö och Lundgren (2000) att det kan vara ett stort steg från att formulera gemensamma insikter om undervisning till att realisera den undervisningen. Att förändra undervisning kan vara en långsam process (Löwing, 2016) och det år som lärarna ingick i praktikgemenskapen var inte tillräcklig för att alla idéer om förändrad undervisning skulle realiseras.

Analysarbete

I studien kom tre redskap inom aktionen att få en särskild betydelse för lärarnas analysarbete; kartläggning, videofilmad undervisning samt specifika frågeställningar. Kartläggningen bidrog till att ge lärarna argument för *vad* de skulle undervisa om. Till skillnad från tidigare studier (Heikka, 2015), som visar att läroböcker haft stort inflytande i undervisningen, visar denna studie att lärarna tog utgångspunkt i kartläggningar och tidigare erfarenheter av undervisning.

Videoanalysen, tillsammans med frågeställningarna, bidrog till att lärarna identifierade elevernas förståelse av innehållet samt hur undervisningen gynnade eller inte gynnade elevernas kunskapsutveckling. Videoanalysen medverkade därmed till att lärarna identifierade sin egen roll; hur deras frågor, uppgiftsbeskrivningar och vardagsbilder bidrog eller inte bidrog till elevernas kunskapsutveckling. Denna analys gav tillsammans med forskningslitteratur lärarna argument för *varför* och *hur* undervisningen behövde förändras (jfr. Svedberg, 2016). Många studier visar att analys av undervisning är en framgångsfaktor (Hattie, 2009) medan denna studie bidrar med hur analyser av olika dokumentationer (data) kan komplettera varandra.

Genom videoanalysen blev det uppenbart för lärarna att undervisningen de hade planerat utifrån kartläggningen inte blev optimal utifrån elevernas perspektiv. Kartläggningen gav enbart information om vilka områden inom bråk eleverna ännu inte förstod, inte vad som var det specifika problemet. Detta ledde till att undervisningen lärarna hade planerat inte alltid lyckades förändra elevernas förståelse. Även Jakobsson (2013) beskriver att skriftliga test inte synliggör elevernas förståelse. För praktiken uppstår ett dilemma när Skolverket (2017e) uttrycker att kartläggningar, som nationella prov, kan ge underlag för att utveckla undervisningen medan denna studie visar att det inte är tillräckligt för att ge argument för förändringar. Därmed finns en risk att elevernas specifika behov inte upptäcks utan kompletterande analyser. Det är stor skillnad att agera didaktiskt på generella och specifika problemområden. Resultatet visar att det var först via videoanalysen som lärarna fick syn på vad som var problematiken.

Även Löwing (2016) beskriver att det krävs kompletterande analys av elevernas förståelse genom till exempel intervjuer för att möjliggöra rätt åtgärder i undervisningen. Lärarna kom under studiens gång att förändra sitt sätt att använda kartläggningen som ett redskap för att planera undervisningen, även om de tog utgångspunkt i de uppgifter som endast några få elever hade besvarat korrekt. Samtalen förändrades från att kartläggningen gav argument till innehållet (*vad*) i undervisningen till att ge argument för *varför* och *hur* kartläggningen kunde användas som ett kvalitativt hjälpmedel i undervisningen (se multiplikation av bråk).

Ämnesdidaktiska frågeställningar

För att rikta in reflektionsmötena på ämnesdidaktiska frågor i undervisningen kom mina/forskarens mer specifika ämnesdidaktiska frågor att påverka hur förändringar i undervisningen kunde göras. Sättet att ställa frågor blev successivt en modell för hur lärarna sedan ställde frågor till varandra. Rollen som kritisk vän bygger på relationer, tillit och kritiska frågor (Zimmerman, Wennergren & Sjöberg, 2016). I denna studie blev rollen viktig i det kollegiala lärandet, dock inte oproblematisk. Tilliten inom gruppen var inte självklar eftersom vi inte tidigare ingått i samma praktikgemenskap. En kritisk fråga var alltid riktad till alla i gemenskapen där lärarna hade ett gemensamt ansvar för lektionernas genomförande. Det finns alltid en risk att kritiska frågor leder till försvar av undervisning istället för vidare analys (Zimmerman m.fl., 2016). Trots frågeställningarna kom samtalsinnehållet ibland att övergå i allmändidaktiska frågeställningar som pojkars och flickors självförtroende eller elevers olika talutrymme i klassrummet. Både frågeställningar och samtalsmodell gjorde att samtalet inte fastnade i de allmändidaktiska.

För att lärarna inte enbart skulle utgå från egna erfarenheter i de kollegiala samtalen hade det varit en fördel om lärarna hade läst mer specifik forskningslitteratur. Som en konsekvens av att den gemensamma planeringen och analysarbetet fick stort utrymme av den gemensamma tiden fick läsningen begränsas.

Med utgångspunkt i ovanstående diskussion kring lärarnas lärande drar jag slutsatsen att lärarnas olika erfarenheter varit en tillgång i de kollegiala samtalen och att de olika redskapen varit centrala för att analysera fram ny förståelse om progression i undervisning utifrån barns och elevers förståelse. Trots detta lyckas inte alla realisera nyvunna erfarenheter i undervisning.

Praktikgemenskap

För att återknyta till Wengers tre dimensioner av en praktikgemenskap, kan den första delen av diskussionen, elevernas lärande, ses som lärarnas gemensamma projekt. Den andra delen, lärarnas lärande, handlar om förutsättningar, redskap och motivation för lärarnas samarbete, det vill säga kollektiva redskap och ömsesidigt engagemang (jfr. Wenger, 1998).

Det gemensamma projektet handlade om att finna samband mellan elevers lärande och undervisning. Studien visar på vikten av ett avgränsat gemensamt projekt för att komma till förhandling och nå ny gemensam mening, i det kollegiala lärandet. Deltagandet i praktikgemenskapen innebar att genomföra analyser av olika data som i vårt fall var: elevers förståelse, gemensamma planeringar, elevers arbeten och forskningslitteratur. Studien visar likt Svedberg (2016) att analys av olika data är centrala ingredienser i kollegialt lärande för att nå en förändrad undervisning som kan förbättra elevernas kunskapsutveckling. Att analysera olika data inom en praktikgemenskap verkar vara en förutsättning för att förbättra progression. Detta kan jämföras med Skolverkets (2017b) definition av kollegialt lärande, där den centrala ingrediensen enbart består av analys av egen och andras undervisning.

Förutsättningar för lärande möjliggörs genom lärarnas ömsesidiga engagemang för elevernas lärande. Det ömsesidiga engagemanget kan ses som drivkraften i det kollegiala lärandet. Att lärare ”tvingas” arbeta i arbetslag innebär inte per automatik ett engagemang utan kan tvärtom förknippas med slitningar och olika svårigheter som leder till brist på lust och arbetsglädje (Svedberg, 2016). Det ömsesidiga engagemanget uppstod inte för att lärarna dagligen arbetade tillsammans utan för att de hade ett gemensamt projekt som de tog ansvar för. Även om utvecklingsarbetet initierades av mig som forskare har projekt som gagnar elevers lärande goda förutsättningar att ge drivkraft även för lärarnas lärande (Hargreaves, 2004). På analysmötena fanns en balans mellan deltagande och förverkligande vilket innebar att lärarna var centrala deltagare i arbetslaget. Lärarnas olika erfarenheter från olika stadier, tillsammans med gemensamma upplevelser i projektet, var väsentliga för att starta diskussioner och komma till nya insikter om undervisning. Dessa nya insikter kan tolkas som lärarnas lärande och en utveckling av praktiken.

De kollektiva redskapen; kartläggning, videofilmad undervisning och frågeställningar bidrog till att lärarna kunde förhandla om kvaliteter i undervisning. Även om alla redskap hade sin funktion möjliggjorde den videofilmade undervisningen en inblick i undervisning på andra stadier. Varken elevernas förståelse eller de små didaktiska skillnaderna hade varit möjliga att identifiera utan videon. Även Bjørndal (2005) poängterar att video ger stora möjligheter för reflektion. Detta kan jämföras med matematiklyftet (Skolverket, 2017d) där lärare reflekterar över noteringar från egen och andras undervisning. Redskapen tillsammans med lärarnas deltagande möjliggjorde förverkligande om undervisning från förskola till högstadiet. De tvetydigheter som fanns i redskapen som lärarna använde i undervisning, som kartläggning, laborativt material, begrepp och olika representationer, hamnade i fokus i de kollegiala samtalen. Tvetydigheterna handlade om på vilket sätt redskapen bidrog eller inte till elevernas kunskapsutveckling. De tre dimensionerna var därmed aktiverade genom studiens design.

Utifrån Wengers (1998) teori var lärarna legitimt perifera deltagare när praktikgemenskapen startade. Genom att de tre dimensionera aktiverades blev lärarna succesivt fullvärdiga deltagare i gemenskapen (jfr. Lave & Wenger, 1991). Vägen från perifert deltagande till fullvärdig var olika lång där olika hinder uppstod. När deltagarna började tvivla på sin egen undervisning var förhandlingar med gruppen väsentliga för att komma vidare. Lärarna fick tillgång till gemensamma redskap, så som kartläggningar, videofilmad undervisning, forskningslitteratur och frågeställningar som hade fokus på kvaliteter i undervisning om bråk. Genom att använda de olika redskapen förverkligades samtidigt intentionen om tydligare progression i undervisningen. Detta tillsammans med lärarnas ömsesidiga engagemang skapade utrymme för förhandlingar kring det gemensamma projektets specifika innehåll.

Implikationer

Studiens resultat ger implikationer om att lärare som samarbetar över stadiegränser kan uppmärksamma och förbättra progression. Genom att praktikgemenskapen analyserade undervisning i ett 1-16-års perspektiv uppmärksammades undervisningens innehåll och samband mellan undervisning och elevers lärande på olika stadier. När undervisningen förverkligades på liknande sätt oavsett stadie gynnade det inte elevernas kunskapsutveckling. Elevernas lärande behöver därmed ses i ett helhetsperspektiv, från 1-16 år och gärna längre upp i åldern. Stadieövergångar har tidigare studerats genom elevintervjuer eller genom att granska undervisning över två stadier. Den typ av undersökningar visar hur progression ser ut i praktiken medan aktionsforskning och kollegialt lärande möjliggör utveckling av praktiken samtidigt som progression studeras. Utifrån studien förordar jag inte att arbetslag ska vara ämnesindelade över stadiegränser. Däremot kan kollegialt lärande i syfte att analysera och förbättra progression organiseras likt denna studies genomförande.

Studien ger implikationer om att analys av videofilmad undervisning ger mer utförlig information än skriftlig kartläggning när syftet är att utveckla undervisning. En fråga som uppstår gäller tester och om de möjliggör utveckling av undervisning som gagnar eleverna (obligatorisk kartläggning i förskoleklass, bedömningsstöd, nationella prov, skolors egna kartläggningar samt lärares egna kartläggningar)? Videoanalys gav i denna studie argument till undervisningen utifrån vad, varför och hur – vilket inte kartläggningen bidrog med.

Lärarna hade varierande grad av såväl ämnesdidaktiska som innehållsliga kunskaper, vilket innebar att de inte alltid lyckades identifiera elevernas förståelse. På planeringsmötena kom det till uttryck genom att de hade idéer på arbetsform och arbetssätt, utan att ha identifierat ett innehåll. Detta ger implikationer om att både huvudman, utbildning och lärarfortbildning behöver ta ett större ansvar för lärares lärande. Lärares ämneskunskaper kan vara ett hinder för att genomföra undervisning som bygger på förståelse. Lärare behöver därför ha specifika ämnesdidaktiska kunskaper om elevers lärande och utveckling. De behöver även förståelse för hur laborativa material möjliggör ny förståelse. Laborativa material i sig innehåller ingen matematik och alla material är inte optimala för elevers kunskapsutveckling. Däremot kan ett väl genomtänkt material utifrån det som ska läras möjliggöra kunskapsutveckling. Denna studie har visat på vinster med kollegialt lärande. Men det finns inte ett färdigt recept för kollegialt lärande då varje skola är unik och har olika förutsättningar.

Fortsatt forskning

Tidigare studier om progression, som beskrivits i bakgrunden, har ofta genomförts mellan två olika stadier eller skolformer. De har samlat in data via intervjuer med lärare och elever samt observation i klassrum. Det råder alltså brist på studier där undervisning analyserats i ett 1-16-års perspektiv. En utvidgning av denna studie skulle kunna vara att studera progression inom andra områden inom matematik eller inom andra ämnen. En annan möjlighet är att utvidga och inkludera gymnasiet eller till och med skolformer längre upp i skolsystemet. Det är angeläget att progression i undervisning fortsätter att studeras så att bilden breddas och fördjupas och att eventuella åtgärder kan framträda.

Ett annat sätt att studera progression kan vara att analysera lärares gemensamma planeringar. I denna studie dokumenterades lärarnas planeringsmöten med ljud. Dessa samtal är möjliga att analysera för att synliggöra hur lärare tar utgångspunkt i elevers förståelse när de planerar undervisning.

Som tidigare nämnts framkom inte skillnaden i undervisningsbegreppet mellan förskola och skola i analysmötena. Undervisning som begrepp i förskolan är förhållandevis nytt och innebär att barnet utmanas genom lek, miljö och samspel tillsammans med andra barn. Det är alltså utifrån barnperspektivet som undervisningen behöver utvecklas för att förbättra progressionen. Det behövs fler studier som synliggör och bidrar till förståelse mellan stadier och som på sikt kan berika synen på undervisning. Sådana studier kan bidra till att definiera undervisningen vad, varför och hur genom hela utbildningssystemet.

Egna lärdomar

Genom studien gjorde jag olika lärdomar i mina olika roller som: forskare, handledare och lärarutbildare. Som aktionsforskare blev jag medveten om vikten av att studera elevers lärande tillsammans med kollegor. Lärarnas analyser av egen och andras videodokumenterade undervisning var ett kraftfullt verktyg för att synliggöra sambandet mellan undervisning och elevers lärande. Dessutom bekräftade studiens resultat mina tankar om att ett stadieövergripande arbetssätt möjliggör progression i undervisning och nya utmaningar för eleverna. Något som också blev tydligt för mig som aktionsforskare var att den investering jag gjorde i relationer försvårade analysen av data. Även om jag läst om närhet och distans i litteratur blev det tydligt att det var en tidskrävande och arbetsam process att distansera sig.

Granskning av videofilmade analysmöten synliggjorde min handledarroll, både styrkor såväl som utvecklingsområden. Det var framför allt min förmåga att hålla kvar samtalet vid ett och samma innehåll, som blev ett förbättringsområde. Jag var ibland för snabb och ville gå vidare till nästa steg. Dessutom har Wengers (1998) teoretiska begrepp hjälpt mig att förstå när och varför kollegialt lärande fungerar respektive inte fungerar.

Wengers (1998) begrepp legitimt perifert deltagande har väckt frågor om hur lärarutbildningens undervisning möjliggör studenters lärande. Begreppet stämmer väl med lärarstudenters verksamhetsförlagda utbildning där de får möjlighet att prova läraruppdragets olika delar och lära av de mer erfarna handledarna. På lärarutbildningen är studenterna, enligt Wengers (1998) synsätt, legitimt perifera och deltar allt eftersom i läraryrkets alla delar. Vissa delar av läraryrket kan förmodligen enbart utvecklas genom att delta i den verksamhetsförlagda utbildningen. Även om studenterna inte deltar i läraryrkets praktikgemenskap på lärarutbildningen kan Wengers begrepp användas för att utforma undervisning på lärarutbildningen. Ett exempel är att skapa balans mellan deltagande och förverkligande så att inte föreläsningar om hur undervisning *kan* utformas får företräde på bekostnad av utvecklingen av det praktiska yrkeskunnandet. Ett annat exempel är att ge utmaningar, vilket innebär att undervisningen behöver utformas utifrån studenternas förkunskaper. Det räcker inte att ha kännedom om en lärandeteori, den måste även implementeras och integreras med praktiska kunskaper.

English summary

Introduction

International comparisons of students' learning show that students' results in mathematics have decreased in Swedish compulsory schools. Since mathematics been emphasized in the preschool curriculum, the debate also includes lower ages. Although there have been various national efforts to enhance students' learning, the negative trend in results has not yet turned. There is some research-based knowledge about students' understanding of fractions in different age groups. Students' difficulties in understanding fractions in grades 4-6 tend to be the same as those in grade 7-9 (Löwing, 2016). At the same time, teachers do not seem to have knowledge about students' results in different age groups or different educational stages (Alatalo, Meier & Franks, 2016).

Progression in mathematics instruction can be seen as a quality in teaching that entails gradually increased demands on the student (Säfström, 2017). If there is a lack of progression in teaching or the demands increase too much, this can reduce students' opportunities to learn. The point of departure for this study is the idea that if teachers are better aware of students' understandings and of mathematics teaching in other age groups, progression in teaching might be improved and repetition reduced. Furthermore, teachers should take joint responsibility for learning within their teams to develop the quality in teaching (cf. Wennergren, 2016).

In order to explore the progression in teaching fractions from preschool to 9th grade (age 1-16), the approach of this study was based on action research. Four teachers from different stages: preschool, grade 1-3, grade 4-6 and grade 7-9, were invited to a temporary team, a community of practice.

The overall aim of the study was to develop knowledge about teaching fractions when teachers used students' understandings as a point of departure for their actions plans. In addition, I intend to highlight the importance of the team's negotiation of teaching fractions. The overall research question of the study is:

What qualities in teaching are negotiated in a stage-wide community of practice?

Theoretical framework

Wenger´s (1998) communities of practice form the design of the study. The four teachers in the community were invited to participate because they have a mutual engagement in teaching fractions. At the same time, this group is diverse because they have different backgrounds and they teach different age groups. By planning and reflecting on teaching in other age groups, the teachers might be challenged in new ways, which might lead to enhanced learning about teaching fractions. The testing of students' understanding and the videotaped mathematical instruction are repertoires that can be resources for negotiating qualities in teaching.

The analysis was based on concepts derived from *communities of practice*. *Negotiation of meaning* is used to observe the teachers' negotiation about qualities in teaching fractions. *Reification* is used to identify the teachers' ways of thinking and talking about their experience. *Joint enterprise, mutual engagement* and *shared repertoire* are used to study qualities in the team, because learning affects these dimensions of practice.

Method

Action research was used to develop teacher professional learning of teaching fractions to students from 1 to 16 years of age. The four teachers used the four phases of action research process: plan, act, observe and reflect (Carr & Kemmis, 1986). The research was conducted over a period of three semesters containing in total five cycles. The first cycle was a pilot performed with students in seventh grade, to test the methods and the repertoire (the pre-tests and video recordings). In the second semester, two cycles were conducted, one in preschool and one in third grade. In the third semester, two additional cycles were conducted, one in fifth grade and one in ninth grade.

Each cycle contained two different kinds of meetings: planning and reflecting. Before the planning meeting, a test of students' understanding of fractions was compiled and presented to the teachers. During the planning meeting, the teachers analysed the test results and planned two teaching sessions. The teacher conducted the lessons and it was documented by video. At the reflection meeting, the teachers studied a part of the video. The teachers were instructed to describe the students' understandings and describe their own ideas about teaching fractions based on the students' understandings. Those meetings were documented by video and was analysed as the main data.

To make the overall analyses of data, I used Braun and Clarke's (2006) description of thematic analysis. The first step included transcribing and becoming familiar with the data. This was an important step, as the data was about ninety pages and every conversation was linked to a specific instructional situation. Initial codes, based on the research question, were listed and then sorted into themes.

The number of teachers and conducted lessons limits generalizability. But the results can form a foundation for further research in the field of progression.

Results

Four themes that describe the teachers' negotiation of qualities in mathematics education were identified: interpreting students' understandings, basing instruction on students' understandings, visualizing fractions and ensuring students' understanding.

By analysing students' understandings through videotaped instruction, the teachers *interpreted students' understandings* and observed which kind of instruction enabled learning. They also noted students' earlier educational experiences or life experiences that may have had an impact on students' understanding. To improve progression in teaching fractions, it seems important that teachers were able to identify students' understandings, which was not always the case during the meetings. Teachers who didn´t identify students' understanding were not able to address it. In many cases, it was small didactical changes that might improve the quality. This could involve what word the teacher used when introducing a task, asking a question or emphasizing a concept.

Irrespective of the students' ages, the teachers seemed to struggle with the similar content in teaching. The teachers reified *mathematical instructions based on students' understandings*, which entailed an expanded content. An expanded content might give students more experience to argue about fractions, which might lead to enhanced learning.

There was not always an automatic correspondence between *visualizing fractions* with everyday materials or manipulative materials and the conventions regarding fractions within mathematics, which affected students' learning opportunities. Sometimes the students had a focus on how materials were used in everyday life, which led to wrong conclusions. The teachers reified a quality relating to how to visualize fractions. A wide range of materials might avoid the material leading to a focus on the wrong aspects.

Even if the students seemed to be united about fractions, the teachers were uncertain how to *ensure students' understanding*. The teachers were uncertain whether every student had an understanding of the concept and whether they were able to use their knowledge in another context. When students are not able to use their knowledge in a new situation that will hinder the progression of knowledge.

Discussion

When the team of teachers analysed videotaped instruction from different educational stages, they also identified that they reified instructions in similar ways and that it did not benefit students' learning opportunities at any age. The study therefore indicates that the teaching progression not was sufficient. In order to improve progression in teaching fractions, it seemed important that teachers succeed in identifying students' understandings and negotiated qualities in mathematics instruction. The joint enterprise in the team of teachers was the relationship between students' learning and teaching fractions.

The shared repertoire, for example pre-tests and video recordings, was the core for negotiating instruction based on students' understandings. The tests gave information about which content they struggled with, not how they grasped it. The pre-tests did not provide enough information to plan teaching with a progression. The videotaped instruction gave more information about students' understandings and therefore formed a better foundation for improving mathematics instructions. To improve progression, I conclude that analysing tests and video documentation is required.

The diverse experiences in the community of practice led to a mutual engagement within the team. The teachers did not always agree about students' understandings, which in turn led to negotiation about qualities in instruction that can improve progression. The teachers re-evaluated their ideas about teaching which, according to Wenger (1998), can be interpreted as a new insight and development of practice. Nevertheless, even if the teachers collectively negotiated meaning, it seemed to be a big step between formulating meaning and implementing it in their teaching.

This study contributes knowledge about diverse qualities in analysing students' understandings by means of pre-tests or video recordings. The study also contributes knowledge about professional learning when participants have diverse experience.

Referenser

Ackesjö, H. (2014). *Barns övergångar till och från förskoleklass: gränser, identiteter och (dis-)kontinuiteter* (doktorsavhandling). Kalmar: Linnéuniversitetet.

Alatalo, T., Meier, J., & Frank, E. (2016). Transition between Swedish preschool and preschool class: A question about interweaving care and knowledge. *Early Childhood Education Journal, 44*(2), 155–167.

Altrichter, H., Feldman, A., Posch, P., & Somekh, B. (2008). *Teachers investigate their work: an introduction to action research across the professions*. (2nd ed.) London: Routledge.

Anderson, G.L., Herr, K., & Nihlen, A.S. (1994). *Studying your own school: an educator's guide to qualitative practitioner research*. Thousand Oaks, Calif.: Corwin Press.

Attewell, P., & Domina, T. (2008). Raising the bar: Curricular intensity and academic performance. *Educational Evaluation and Policy Analysis*, *30*(1), 51-71.

Ball, D. L. (1993). Halves, pieces, and twoths: Constructing and using representational contexts in teaching fractions. In T. P. Carpenter, E. Fennema & T. A. Romberg (Eds.), *Studies in mathematical thinking and learning. Rational numbers: An integration of research* (s. 157-195). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Ball, D. L. (2007). Assessing a Student's Mathematical Knowledge by Way of Interview. In A. H. Schoenfeld (Ed.), *Assessing mathematical proficency*. (s. 213-267). New York: Cambridge.

Ball, D. L., & Bass, H. (2000). Interweaving Content and Pedagogy in Teaching and Learning to Teach: Knowing and Using Mathematics. In J. Boaler (Ed.), *Multiple Perspectives on Mathematics Teaching and Learning* (s. 83-104). Westport: Ablex Publishing.

Ball, D.L., Ferrini-Mundy, J., Kilpatrick, J., Milgram, R.J., Schmid, W., & Schaar, R. (2005). Reaching for Common Ground in K-12 Mathematics Education. *Notices of the AMS*, *52*(9), 1055-1058.

Baroody, A. J., Lai, M., & Mix, K. S. (2006). The development of young children's early number and operation sense and its implications for early childhood education. In B. Spodek & O. N. Saracho (Eds.), *Handbook of research on the education of young children* (2nd ed.) (s. 187-221).

Behr, M., Lesh, R., Post, T., & Silver E. (1983). Rational Number Concepts. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes*, (s. 91-125). New York: Academic Press.

Behr, M., & Post, T. (1992). Teaching rational number and decimal concepts. In T. Post (Ed.), *Teaching mathematics in grades K-8: Research-based methods* (2nd ed.) (s. 201-248). Boston: Allyn and Bacon.

Behr, M., Wachsmuth, I., & Post, T. (1988). Rational Number Learning Aids: Transfer From Continuous Models To Discrete Models. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, *10*(4), 1-17.

Björklund, C. (2009). *En, två, många: om barns tidiga matematiska tänkande*. (1. uppl.) Stockholm: Liber.

Björklund, C. (2016). Learning about "Half": Critical Aspects and Pedagogical Strategies in Designed Preschool Activities. *Scandinavian Journal of Educational Research*, 1-19.

Bjørndal, C.R.P. (2005). *Det värderande ögat: observation, utvärdering och utveckling i undervisning och handledning* (1. uppl.). Stockholm: Liber.

Boaler, J., and Greeno, J.G. (2000). Identity, Agency, and Knowing in Mathematics Worlds. In J. Boaler (Ed.), *Multiple perspectives on mathematics teaching and learning.* (s. 171-201). Westport, CT: Ablex Publishing.

Braun, V., & Clarke, V. (2006). Using thematic analysis in psychology. *Qualitative Research in Psychology, 3*(2), 77-101.

Brizuela, B.M. (2005). Young children's notations for fractions. *Educational Studies in Mathematics*, *62*(3), 281-305.

Broström, S. (2002). Communications and continuity in the transition from kindergarten to school. In H. Fabian & A-W. Dunlop (Eds.), *Transitions in the early years; debating progression and continuity for children in early education* (s. 52-63). London: Routledge Falmer.

Carpenter, T., Kepner, H., Corbitt, M., Lindquist, M., & Reys, R. (1980). Results and Implications of the Second NAEP Mathematics Assessments: Elementary School. *The Arithmetic Teacher*, *27*(8), 10-47.

Carr, W., & Kemmis, S. (1986). *Becoming critical: education, knowledge and action research*. London: Falmer Press.

Clarke, D. (2006). Fractions as division: The forgotten notion. *Australian Primary Mathematics Classroom, 11*(3), 4-10.

Clarke, D. M., Roche, A., & Mitchell, A. (2011). Tio sätt att göra bråk levande. I B. Bergius, G. Emanuelsson, L. Emanuelsson & R. Ryding (Red.), *Matematik - ett grundämne* (s. 113-120). Göteborg: Nationellt centrum för matematikutbildning (NCM), Göteborgs universitet.

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2011). *Research methods in education*. (7. ed.) Milton Park, Abingdon, Oxon, [England]: Routledge.

Dahl, M. (2014). *Fritidspedagogers handlingsrepertoar: pedagogiskt arbete med barns olika relationer* (doktorsavhandling). Kalmar : Linnéuniversitetet.

Dhlamini, Z., & Kibirige, I. (2014). Grade 9 Learners' Errors And Misconceptions In Addition Of Fractions. *Mediterranean Journal Of Social Sciences, 5*(8), 236-244.

Doverborg, E. (1985). Forskning om tidig räkning och matematiksvårigheter: Förskolebarns uppfattningar av matematikbegrepp. *Nämnaren 12*(4), 32-34.

Doverborg, E., Pramling, N., & Pramling Samuelsson, I. (2013). *Att undervisa barn i förskolan*. Stockholm: Liber.

Empson, S. B. (1999). Equal sharing and shared meaning: The development of fraction concepts in a first-grade classroom. *Cognition and Instruction, 17*(3), 283-342.

Erlwanger, S. H. (1973). Benny's conception of rules and answers in IPI mathematics. Journal of Children's Mathematical Behavior, 1(2), 7–26. In Carpenter, T. P., Dossey, J. A., & Koehler, J. L. (2004). *Classics in mathematics education research* (s. 48-59). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Folkesson, L. (2012). Forskning – på vems villkor?. I K. Rönnerman (Red.), *Aktionsforskning i praktiken: förskola och skola på vetenskaplig grund.* (s. 41-54). (2., [rev.] uppl.) Lund: Studentlitteratur.

Gannerud, E., & Rönnerman, K. (2007). *Att fånga lärares arbete: bilder av vardagsarbete i förskola och skola*. (1. uppl.) Stockholm: Liber.

Granberg, O., & Ohlsson, J. (2005). Kollektivt lärande i team. Om utveckling av kollektiv handlingsrationalitet. *Pedagogisk Forskning i Sverige*, *10*(3/4), 227-243.

Gustafson, N. (2010). *Lärare i en ny tid: om grundskollärares förhandlingar av professionella identiteter* (doktorsavhandling). Umeå : Umeå universitet, 2010. Umeå.

Gustafsson, K., & Mellgren, E. (2005). *Barns skriftspråkande: att bli en skrivande och läsande person* (doktorsavhandling). Göteborg : Göteborgs universitet, 2005. Göteborg.

Hargreaves, A. (2004). Inclusive and exclusive educational change: emotional responses of teachers and implications for leadership. *School Leadership & Management*, *24*(3), 287-309.

Hattie, J. (2009). *Visible learning: a synthesis of over 800 meta-analyses relating to achievement*. London: Routledge.

Heikka, L. (2015). *Matematiklärares målkommunikation: en jämförelse av elevernas uppfattningar, lärarens beskrivningar och den realiserade undervisningen* (Licentiat-uppsats) Luleå : Luleå tekniska universitet.

Häggström, J. (2012). *Learning study: en guide* (1. uppl.). Göteborg: Göteborgs universitet.

Jakobsson, A. (2013). Att undersöka kunskapstrender med hjälp av PISA – Likvärdighet, förståelse och kunskapssyn. *Utbildning och demokrati: Tidskrift för didaktik och utbildningspolitik, 22*(3), 13-36.

Jonsson, A., Williams, P., & Pramling Samuelsson (2017). Undervisnings-begreppet och dess innebörder uttryckta av förskolans lärare. *Forskning om undervisning och lärande, 1*(5), 6-25.

Jäder, J. (2015). *Elevers möjligheter till lärande av matematiska resonemang* (Licentiat-uppsats). Linköping.

Kemmis, S., & McTaggart R. (1988). *The action research planner.* Australia: Deakin University Press.

Kemmis, S., McTaggart, R., & Nixon, R. (2014). *The Action research planner: doing critical participatory action research.* Singapore: Springer Singapore.

Kilborn, W. (2013a). *Bråk i kursplanerna och elevers kunskaper om bråk.* Skolverket. (Hämtad 17-10-25, från http://matematiklyftet.skolverket.se)

Kilborn, W. (2013b). *Bråk som del av helhet och som del av ett antal.* Skolverket. (Hämtad 17-10-25, från http://matematiklyftet.skolverket.se)

Kroksmark, T. (2010). Skolans ödesfråga. Forskande lärare och en skola på vetenskaplig grund. *Forskning och undervisning om lärande* 4, s. 9–21.

Kullberg, A., & Runesson, U. (2013). Learning about the numerator and denominator in teacher-designed lessons. *Mathematics Education Research Journal, 25*(4), 547-567

Kvale, S. & Brinkmann, S. (2009). *Den kvalitativa forskningsintervjun*. (2. uppl.) Lund: Studentlitteratur.

Lamon, S. J. (2007). Rational numbers and proportional reasoning: toward a theoretical framework for research. In National Council of Teachers of Mathematics. (s. 629-668). *Second handbook of research on mathematics teaching and learning: a project of the National Council of Teachers of Mathematics. Vol. 1.* Charlotte, NC: Information Age Pub..

Larson, N. (2014). *Matematikämnet och stadiebytet mellan grundskolan och gymnasieskolan: en enkät- och klassrumsstudie* (doktorsavhandling). Linköping: Linköpings Universiet.

Lauvås, P., Lycke, K.H., & Handal, G. (2016). *Kollegahandledning med kritiska vänner.* (Andra upplagan). Lund: Studentlitteratur.

Lave, J., & Wenger, E. (1991). *Situated learning: legitimate peripheral participation*. Cambridge: Cambridge University Press.

Liljenberg, M. (2015). *Distributed leadership in local school organisations: working for school improvement* (doktorsavhandling)? Göteborg: Göteborgs universitet.

Lindensjö, B., & Lundgren, U.P. (2000). *Utbildningsreformer och politisk styrning.* Stockholm: HLS förlag.

Lindgren, A-C. (2012). Med videon som verktyg. I K. Rönnerman (Red.), *Aktionsforskning i praktiken: förskola och skola på vetenskaplig grund.* (s. 55-70). (2., [rev.] uppl.) Lund: Studentlitteratur.

Lithner, J. (2008). A research framework for creative and imitative reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, *67*(3), 255-276.

Lo, M.L. (2014). *Variationsteori: för bättre undervisning och lärande.* (1. uppl.) Lund: Studentlitteratur.

Lortie, D.C. (2002). *Schoolteacher: a sociological study.* (2nd ed.). Chicago: University of Chicago Press.

Loughran, J. J. (2006). *Developing a pedagogy of teacher education: understanding teaching and learning about teaching.* London: Routledge.

Löwing, M. (2004). *Matematikundervisningens konkreta gestaltning: en studie av kommunikationen lärare – elev och matematiklektionens didaktiska ramar* (doktorsavhandling) Göteborg: Göteborgs Universiet.

Löwing, M. (2016). *Diamant - diagnoser i matematik: ett kartläggningsmaterial baserat på didaktisk ämnesanalys.* Göteborg: Acta universitatis Gothoburgensis.

Mack, N. (1990). Learning Fractions with Understanding: Building on Informal Knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education*, *21*(1), 16-32.

McIntosh, A. (2008). *Förstå och använda tal: en handbok.* Nationellt centrum för matematikundervisning (NCM). Göteborg: Göteborgs universitet.

McNiff, J., & Whitehead, J. (2001). *Action research: principles and practice.* (2. ed.) London: RoutledgeFalmer.

McNiff, J., & Whitehead, J. (2006). *All you need to know about action research.* London: SAGE.

Mix, K., Levine, S., & Huttenlocher, J. (1999). Early fraction calculation ability. *Developemental Psychology, 35,* 164-174.

Moseley, B., & Okamoto, Y. (2008). Identifying fourth graders' understanding of rational number representations: A mixed methods approach. *School Science And Mathematics*, *108*(6), 238-250.

Neuman, D. (1993). Early conceptions of fractions: A phenomenographic approach. *Proceedings of the seventeenth international conference of psychology of mathematics education*, 3, 170-177.

Neuman, M.J. (2002). The wider context: An international overview of transition issues. In H. Fabian & A-W. Dunlop (Eds.), *Transitions in the early years; debating progression and continuity for children in early education* (s. 8-22). London: Routledge Falmer.

Newton, K. (2008). An Extensive Analysis of Preservice Elementary Teachers' Knowledge of Fractions. *American Educational Research Journal, 45*(4), 1080-1110.

Niss, M. (1994). Mathematics in society. In R. Bieler, R Scholz, R. Strässer & B. Winkelmann (Eds.), *Didactics of mathematics as a scientific discipline* (s. 367-378). Netherlands: Kluwer Academic Publisher.

Ohlsson, J. (2004a). Arbetslagsmötet – hur används det. I J. Ohlsson (Red.), *Arbetslag och lärande: Lärares organiserande av samarbete i organisationspedagogisk belysning* (s. 81-102). Lund: Studentlitteratur.

Ohlsson, J. (2004b). Gemensam reflektion i mötessamtalen. I J. Ohlsson, (Red.), *Arbetslag och lärande: Lärares organiserande av samarbete i organisations-pedagogisk belysning* (s. 103-120). Lund: Studentlitteratur.

Ohlsson, J. (2004c). Organiserande i pedagogisk belysning. I J. Ohlsson (Red.), *Arbetslag och lärande: Lärares organiserande av samarbete i organisations-pedagogisk belysning* (s. 169-182). Lind: Studentlitteratur.

Olin, A. (2009). *Skolans mötespraktik: en studie om skolutveckling genom yrkes-verksammas förståelse* (doktorsavhandling). Göteborg: Göteborgs universitet.

Persson, S. (2015). Pedagogiska relationer i förskolan. I I. Tallberg Broman, A–C. Vallberg Roth, L. Palla & S. Persson (Red.), *Förskola tidig intervention* (s. 121-143). Stockholm: Vetenskapsrådet.

Pitkethly, A., & Hunting, R. (1996). A Review of Recent Research in the Area of Initial Fraction Concepts. *Educational Studies in Mathematics, 30*(1), 5-38.

Pramling Samuelsson, I. (1994). *Kunnandets grunder: prövning av en fenomenografisk ansats till att utveckla barns sätt att uppfatta sin omvärld.* Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis.

Punch, S. (2002). Research with children: the same or different from research with adults? *Childhood, 9*(3), 321–341.

Quennerstedt, A., Harcourt, D., & Sargeant, J. (2014). Forskningsetik i forskning som involverar barn. *Nordic Studies in Education, 34*(2), 77-93.

Reis, M. (2011). *Att ordna, från ordning till ordning: yngre förskolebarns matematiserande* (doktorsavhandling). Göteborg : Göteborgs universitet, 2011. Göteborg.

Rystedt, E., & Trygg, L. (2010). *Laborativ matematikundervisning: vad vet vi?.* (1. uppl.) Göteborg: Nationellt centrum för matematikutbildning, Göteborgs universitet.

Rönnerman, K. (2012). Vad är aktionsforskning?. I K. Rönnerman (Red.), *Aktionsforskning i praktiken: förskola och skola på vetenskaplig grund.* (s. 21-40). (2., [rev.] uppl.) Lund: Studentlitteratur.

Rönnerman, K., & Salo, P. (2014). Traces of nordic educational traditions. In K. Rönnerman, K & P. Salo (Eds.), *Lost in practice: transforming Nordic educational action research* (s. 1-9). Rotterdam: Sense Publishers.

Salo, P., & Rönnerman, K. (2014). The Nordic tradition of educational action research – In the light of practice architectures. In K. Rönnerman & P. Salo (Eds.), *Lost in practice: Transforming Nordic educational action research* (s. 53-71). Rotterdam: Sense Publishers.

Scherp, H-Å. (2002). *Lärares lärmiljö: att leda skolan som lärande organisation.* Karlstad: Karlstad Universitet, Institutionen för pedagogik.

Schoenfeld, A.H. (2007). Reflections on an Assessment Interview: What a Close Look at Student Understanding Can Reveal. In A. H. Schoenfeld (Ed.), *Assessing mathematical proficiency.* (s. 269-277). New York: Cambridge University.

Schoenfeld, A.H. (2014). What makes for powerful classrooms, and how can we support teachers in creating them? A story of research and practice, productively intertwined. *Educational Researcher, 43*(8), 404-412.

Schön, D.A. (1983). *The reflective practitioner: how professionals think in action.* New York: Basic Books.

Schön, D.A. (1987). *Educating the reflective practitioner: [toward a new design for teaching and learning in the professions].* (1. ed.) San Francisco: Jossey-Bass.

Sdrolias, K. A., & Triandafillidis, T. A. (2008). The transition to secondary school geometry: Can there be a ”chain of school mathematics”? *Educational Studies in Mathematics, 67*(2), 159-169.

SFS 2010:800. *Skollag.* Stockholm: Utbildningsdepartementet.

Sidenvall, J. (2015). *Att lära sig resonera : Om elevers möjligheter att lära sig matematiska resonemang* (Licentiatuppsats). Norrköping.

Siegler, R. S., Duncan, G. J., Davis-Kean, P. E., Duckworth, K., Claessens, A., Engel, M., Susperreguy, M. I., & Chen, M. (2012). Early Predictors of High School Mathematics Achievement. *Psychological Science, 23*(10), 691-697.

Siegler, R.S., & Pyke, A.A. (2013). Developmental and individual differences in understanding of fractions. *Developmental Psychology*, *49*(10), 1994–2004.

Sjöberg, L. (2009). Skolan och den ’goda’ utbildningen – för ett konkurrenskraftigt Europa. *Utbildning & Demokrati, 18*(1), 33-58.

Skolinspektionen. (2010). *Tillsyn och kvalitetsgranskning: sammanfattning av Skolinspektionens erfarenheter och resultat.* Stockholm: Skolinspektionen.

Skolinspektionen. (2011). *Förskolans pedagogiska uppdrag.* Stockholm: Skolinspektionen.

Skolinspektionen. (2015). *Undervisning i förskoleklass.* Rapport 2015:03.

Skolverket. (2006). *Läroplan för det obligatoriska skolväsendet, förskoleklassen och fritidshemmet Lpo 94*. Stockholm: Skolverket.

Skolverket. (2008a). *Svenska elevers matematikkunskaper i TIMSS 200]: en djupanalys av hur eleverna förstår matematiska begrepp och tillämpar beräkningsprocedurer*. Stockholm: Skolverket.

Skolverket. (2008b). *Svenska elevers matematikkunskaper i TIMSS 2007: en jämförande analys av elevernas taluppfattning och kunskaper i aritmetik, geometri och algebra i Sverige, Hong Kong och Taiwan*. Stockholm: Skolverket.

Skolverket. (2008c). *TIMSS 2007: Uppgifter i matematik, årskurs 4*. Stockholm: Skolverket.

Skolverket. (2008d). *TIMSS 2007: Uppgifter i matematik, årskurs 8*. Stockholm: Skolverket.

Skolverket. (2012). *TIMSS 2011: svenska grundskoleelevers kunskaper i matematik och naturvetenskap i ett internationellt perspektiv*. Stockholm: Skolverket.

Skolverket. (2013). *PISA 2012, 15-åringars kunskaper i matematik, läsförståelse och naturvetenskap*. Stockholm: Skolverket.

Skolverket. (2015a). *Grundskollärares tidsanvändning: en fördjupad analys av "Lärarnas yrkesvardag"*. Stockholm: Skolverket.

Skolverket. (2015b). *Systematiskt kvalitetsarbete: för skolväsendet.* (Andra upplagan). Stockholm: Skolverket.

Skolverket. (2016a). *Läroplan för förskolan Lpfö 98. Reviderad 2016*. Stockholm: Skolverket.

Skolverket. (2016b). *TIMSS 2015: svenska grundskoleelevers kunskaper i matematik och naturvetenskap i ett internationellt perspektiv*. Stockholm: Skolverket.

Skolverket. (2016c). *Slutredovisning: Uppdrag att svara för utbildning.* Tillgänglig: www.skolverket.se.

Skolverket. (2017a). *Bedömningsprotalen.* (Hämtad 2017-06-27, från https://bp.skolverket.se/web/thv/start)

Skolverket. (2017b). *Forskningsbaserat arbetssätt i undervisningen.* (Hämtad 2017-09-22, från https://www.skolverket.se/skolutveckling/forskning/ forskningsbaserat-arbetssatt/forskningsbaserat-arbetssatt-i-undervisning)

Skolverket. (2017c). *Läroplan för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet 2011*. Reviderad 2017. Wolters Kluwer.

Skolverket. (2017d). *Lärportalen.* (Hämtad 2017-09-22, från https://larportalen.skolverket.se)

Skolverket. (2017e). *Nationella prov.* (Hämtad 2017-06-27, från http://www.skolverket.se/bedomning/nationella-prov)

Skott, J., Hansen, H. C., Jess, K., & Schou, J. (2010). *Matematik för lärare. Y.* Grundbok. Bd 2. (1. uppl.) Malmö: Gleerup.

Smith, M.S., Hughes, E.K., Engle, R.A., & Stein, M.K. (2009). Orchestrating Discussions. *National Council of Teachers of Mathematics, 14*(9), 548-556.

Solem, I. H., Alseth, B., & Nordberg, G. (2011). *Tal och tanke: matematikundervisning från förskoleklass till årskurs 3.* (1. uppl.) Lund: Studentlitteratur.

Somekh, B. (2006). *Action research: a methodology for change and development.* Maidenhead: Open University Press.

Stein, M. K., Engle, R. A., Hughes, E. K., & Smith, M. S. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning, 10*(4), 313-340.

Sterner, H. (2015). *Problematisera "görandet": lärares lärande om kommunikation och resonemang i matematikundervisningen i en organiserad praktikgemenskap* (Licentiatuppsats). Växjö : Linnéuniversitetet.

Stigler, J.W., & Hiebert, J. (2009). *The teaching gap: best ideas from the world's teachers for improving education in the classroom.* (1st Free Press trade pbk. ed.) New York: Free Press.

Svedberg, L. (2016). *Pedagogiskt ledarskap och pedagogisk ledning: teori och praktik.* (1. uppl.) Lund: Studentlitteratur.

Sveider, C. (2016). *Lärares och elevers användande av laborativt material i bråkundervisningen i skolår 4-6: Vad görs möjligt för eleverna att erfara* (Licentiatuppsats)*?.* Linköping : Linköpings universitet, 2016. Linköping.

Säfström, A. (2017). Progression i högre utbildning. *Högre Utbildning, 7*(1), 56-75.

Tyrén, L. (2013). *"Vi får ju inte riktigt förutsättningarna för att genomföra det som vi vill" En studie om lärares möjligheter och hinder till förändring och förbättring i praktiken* (doktorsavhandling). Gothenburg Studies in Educational Sciences, 337). Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis.

Timperley, H. (2011). *Realizing the Power of Professional Learning.* Berkshire: Open University press.

Törnquist, E. (2006). *Att iscensätta lärande: lärares reflektioner över det pedagogiska arbetet i en konstnärlig kontext* (doktorsavhandling) Lund: Lunds Universitet.

Wallerstedt, C., Lagerlöf, P., & Pramling, N. (2014). *Lärande i musik – barn och lärare i tongivande samspel.* Lund: Gleerups.

Watts, T. W., Duncan, D. J., Siegler, R. S., & Davis-Kean, P. E. (2014). What's Past Is Prologue: Relations Between Early Mathematics Knowledge and High School Achievement. *Educational reseacher 43*(7), 352-360.

Vetenskapsrådet. (2002). *Forskningsetiska principer inom humanistisk-samhällsvetenskaplig forskning*. Stockholm: Vetenskapsrådet.

Vetenskapsrådet. (2011). God Forskningssed. *VR-rapport nr 1/2011*. (Hämtad 2017-06-27, från http://www.cm.se/webbshop_vr/pdfer/2011_01.pdf)

Wenger, E. (1998). *Communities of practice: learning, meaning, and identity*. Cambridge: Cambridge University Press.

Wennergren, A-C. (2007). *Dialogkompetens i skolans vardag: en aktionsforskningsstudie i hörselklassmiljö*. (doktorsavhandling) Luleå: Luleå Tekniska Universitet.

Wennergren, A-C. (2012). På spaning efter en kritisk vän. I K. Rönnerman, (Red.). *Aktionsforskning i praktiken: förskola och skola på vetenskaplig grund*. (s. 71-88). (2., [rev.] uppl.) Lund: Studentlitteratur.

Wennergren, A-C. (2014). The Power of Risk-taking in Professional Learning. In K. Rönnerman & P. Salo (Eds.), *Lost in practice. Transforming Nordic Educational Action Research* (s. 133-152). Rotterdam: Sense Publishers.

Wennergren, A-C. (2016). Teachers as learners - with a little help from a critical friend. *Educational Action Research, 24*(2), 260-279.

Wennergren, A-C., & Blossing, U. (2016). Handledning för professionsutveckling. I M. Jarl & E. Nihlfors (Red.), *Ledarskap, utveckling, lärande : Grundbok för rektorer och förskolechefer* (s. 365–384). Stockholm: Natur & Kultur.

Wennergren, A-C., & Blossing, U. (2017). Teachers and Students Together in a Professional Learning Community. *Scandinavien Journal of Educational Research, 61(1), 47-59.*

Wernberg, A. (2009). *Lärandets objekt: vad elever förväntas lära sig, vad görs möjligt för dem att lära och vad de faktiskt lär sig under lektionerna* (doktorsavhandling). Umeå: Umeå Universitet, Institutionen för naturvetenskapernas och matematikens didaktik.

Zimmerman Nilsson, M.-H., Wennergren, A.-C., & Sjöberg, U. (2016). Tensions in communication – Teachers and academic facilitators in a critical friendship. *Action Research*. (Epub ahead of print).

Wong, M. (2013). Locating Fractions on a Number Line. *Australian Primary Mathematics Classroom*, *18*(4), 22-26.

Utbildningsdepartementet. Utredningen om en läsa-skriva-räkna-garanti (2016). *På goda grunder: en åtgärdsgaranti för läsning, skrivning och matematik: betänkande*. Stockholm: Wolters Kluwer.

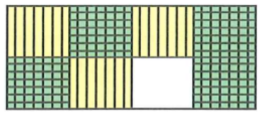
Bilagor

Bilaga 1 En sida om bråk ur ett läromedel i årskurs 4

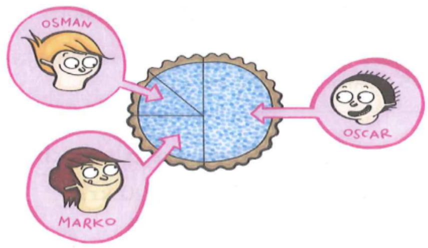
KAPITEL 1

Mera bråk

25 a) Hur stor del av mönstret på bilden är randig?
b) Hur stor del är rutig? Kan du skriva det på flera sätt? Visa hur.

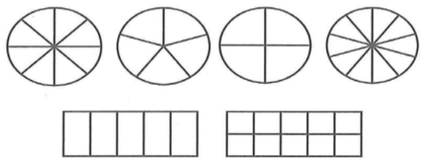


26 Pajen är delad i fyra olika stora delar.
a) Hur stor är delen som Oscar får?
b) Hur stor är delen som Marko får?
c) Hur stora delar får Osman?



27 a) Hur stor del av halsduken är röd?
b) Hur stor del är gul?
c) Hur stor del är blå?

28 Ta hjälp av bilderna och skriv in > (större än), < (mindre än) eller = mellan bråken.
a) $\frac{2}{8}$ $\frac{2}{5}$ b) $\frac{4}{5}$ $\frac{8}{10}$ c) $\frac{1}{4}$ $\frac{4}{10}$



29 Använd bilderna och skriv
a) två olika bråk som är lika stora.
b) två bråk där det ena är lite större än det andra.
c) två bråk där det ena är mycket större än det andra.

BRÅK 15

Sidan är hämtad ur matematikserien Mattespanarna 4B (Liber AB) och publiceras med tillstånd från förlaget.

Bilaga 2 En sida om bråk ur ett läromedel i matematik 1b på gymnasiet

Aktivitet **UNDERSÖK**

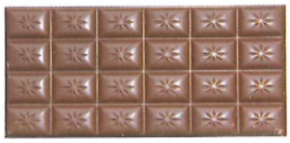
Jämföra bråktal

1 En chokladkaka med 24 rutor kan delas i lika stora delar på många olika sätt. Rita sex bilder av kakan och

dela kakan i två delar

dela kakan i tre delar

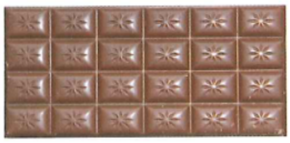
dela kakan i fyra delar



dela kakan i sex delar

dela kakan i åtta delar

dela kakan i tolv delar



2 Skugga eller färglägg en av dina bilder. Skriv bråktalet bredvid den skuggade delen.

a) $\frac{2}{3}$ av kakan c) $\frac{2}{6}$ av kakan

b) $\frac{3}{4}$ av kakan d) $\frac{6}{8}$ av kakan

3 Två av bråktalen i uppgift 2 beskriver lika mycket choklad. Vilka?

4 Studera dina bilder och skriv flera olika bråktal som är lika stora som $\frac{1}{2}$.

5 Vilka tal är större än $\frac{1}{2}$? Förklara hur du tänker.

$\frac{11}{14}$ $\frac{7}{12}$ $\frac{5}{8}$ $\frac{2}{5}$ $\frac{5}{10}$ $\frac{13}{28}$ $\frac{8}{14}$

6 Vilket tal är störst?

a) $\frac{3}{6}$ *eller* $\frac{4}{6}$ b) $\frac{1}{6}$ *eller* $\frac{1}{8}$ c) $\frac{2}{4}$ *eller* $\frac{2}{3}$

7 Använd bilderna i uppgift 1. Vad ska det stå i rutorna?

a) $\frac{1}{3} = \frac{\square}{24}$ c) $\frac{5}{6} = \frac{\square}{24}$ e) $\frac{10}{12} = \frac{\square}{24}$

b) $\frac{2}{3} = \frac{\square}{24}$ d) $\frac{7}{8} = \frac{\square}{24}$

8 Använd resultatet i uppgift 7 för att avgöra vilket bråk som är störst.

a) $\frac{2}{3}$ *eller* $\frac{5}{6}$ b) $\frac{7}{8}$ *eller* $\frac{10}{12}$

9 Vilket bråk är störst? Visa en beräkning eller förklara hur du tänker.

a) $\frac{3}{5}$ *eller* $\frac{1}{2}$ c) $\frac{3}{4}$ *eller* $\frac{7}{9}$

b) $\frac{2}{5}$ *eller* $\frac{1}{3}$ d) $\frac{7}{8}$ *eller* $\frac{8}{9}$

34 1.3 TAL I BRÅKFORM

Sidan är hämtad ur matematikserien Matematik 5000 1B (Natur&Kultur) och publiceras med tillstånd från förlaget.

Bilaga 3 Tillståndsbrev till lärare

Information till **lärare** om deltagande i studien: *Undervisning om tal i bråkform i förskola och grundskola*

Inom ramen för mina forskningsstudier på Göteborgs universitet studerar jag hur progression i undervisning av bråk ser ut från förskolan och genom hela grundskolan. Förutsättningen för att jag ska kunna genomföra studien är ett samarbete med er lärare, med barn och föräldrar. Jag vill därför informera er om min forskning och hur studien kommer att genomföras.

På många skolor är det vanligt att varje stadie arbetar för sig och att förskollärare på förskolan och lärare på olika stadier sällan får möjlighet att samtala om undervisning och dess innehåll. Det finns lite forskning kring hur progressionen i undervisning[8] ser ut mellan olika stadier, alltså vilket innehåll som tas upp och hur det tar sig uttryck. Syftet med studien är att synliggöra denna progression.

I denna studie kommer en förskollärare på förskolan och en lärare från varje stadie att ingå, dvs. låg- mellan- och högstadiet. De fyra lärarna[9] kommer att träffas för att tillsammans planera upp undervisning i bråk på ett stadie i taget. Jag kommer inför planeringen ta reda på vad eleverna kan i syfte att ge lärarna information så att de kan planera sina lektioner utifrån elevernas kunskap. Planeringsmötena spelas in på diktafon. Jag kommer därefter att finnas med på de två första planerade lektionerna om bråk i varje stadie och videofilma de lektionerna. Fokus för videofilmningen är lärarens undervisning, men även några grupper av elever kommer att videofilmas. Videofilmerna är till för att lärarna sedan ska kunna titta på lektionerna och resonera och diskutera kring undervisningens innehåll och utformning. Denna diskussion kommer i sin tur att ligga som grund för nästa stadies planering och undervisning. Planeringen som lärarna gör tillsammans beräknas ta ca två timmar och diskussionerna kring videofilmerna ca två timmar.

Jag följer de etiska reglerna från Vetenskapsrådets Forskningsetiska principer inom humanistisk-samhällsvetenskaplig forskning som bl.a. innebär att samtliga deltagare först ska informeras och tillfrågas om deltagande enligt informationskravet. Allt deltagande är helt frivilligt och kan avbrytas när som helst utan angivande skäl för detta, enligt samtyckeskravet. Alla medverkande i studien är garanterade anonymitet då namn på de medverkande samt förskolans och skolans namn är fingerade.

Resultatet av denna studie kommer att presenteras i form av en licentiatuppsats. Om ni önskar delar jag gärna med mig av forskningsresultaten.

Önskar ni mer information, kontakta gärna mig:
Doktorand Caroline Eriksson tel. xxx-xx xx xx caroline.eriksson@hh.se

Eller någon av mina handledare:
Professor Pia Williams tel. xxx-xxx xx xx pia.williams@ped.gu.se
Lektor Angelika Kullberg tel. xxx-xxx xx xx angelika.kullberg@ped.gu.se
Lektor Anki Wennergren tel. xxx-xx xx xx anki.wennergren@hh.se

[8] Med undervisning och lektioner menas även den pedagogiska verksamheten i förskolan.
[9] Med lärare menas även förskolläraren i förskolan.

För samtycke om deltagande i projektet *Undervisning om tal i bråkform i förskola och grundskola,* fyll i nedanstående talong och lämna till Caroline Eriksson.

- ❑ Jag har fått information om projektet *Undervisning om tal i bråkform i förskola och grundskola,* och samtycker <u>inte</u> till att delta i studien.

- ❑ Jag har fått information om projektet *Undervisning om tal i bråkform i förskola och grundskola,* och samtycker till att delta i studien.
  Videoinspelningarna får endast användas i projektet.

....
Lärarens namn

....
Förskolans/Skolans namn Avdelning/Klass

....
Datum

....
Underskrift

Bilaga 4 Tillståndsbrev till vårdnadshavare

Att skapa en skola som vilar på vetenskaplig grund

För mer än ett år sedan fick ni information om att lärarna genomför undersökningar genom att dokumentera undervisning på olika sätt inom ramen för modellskolan. Syftet med dokumentationen är att öka kvaliteten i lärarnas undervisning och därmed ge bättre förutsättningar för elevernas kunskapsutveckling.

Inom ramen för mina forskningsstudier på Göteborgs universitet kommer även jag att dokumentera undervisning för att studera hur progression i matematik ser ut från förskolan och genom hela grundskolan för att öka undervisningens kvalitet. För att kunna genomföra studien som extern forskare behöver jag ett samtycke om ert barns deltagande i studien. Jag vill därför informera er om min forskning och hur studien kommer att genomföras.

Lärares undervisning i matematik

I denna studie genomför jag en skriftlig kartläggning kring elevernas matematiska förståelse. Sammanställningen från kartläggningen delges läraren i klassen och ytterligare tre andra lärare. Sammanställningen ligger till grund för lärarnas gemensamma planering av två lektioner. Jag kommer sedan att finnas med i klassen och videofilma de två lektionerna. Fokus på videofilmningen är lärarens undervisning, men även några grupper av elever kommer att videofilmas. De fyra lärarna tittar sedan tillsammans på videofilmen för att resonera om innehåll och utformning. Studien kommer att genomföras denna vår.

Vetenskapsrådets Forskningsetiska principer inom humanistisk- och samhällsvetenskaplig forskning som bl.a. innebär att samtliga deltagare först ska informeras och tillfrågas om deltagande enligt informationskravet kommer att följas. Allt deltagande är helt frivilligt och kan avbrytas när som helst utan angivande skäl för detta, enligt samtyckeskravet. Alla medverkande i studien är garanterade anonymitet då namn på de medverkande samt förskolans och skolans namn är fingerade. Det insamlade materialet kommer att förvaras skyddat från utomstående.

Det vi önskar av er som föräldrar/vårdnadshavare är att ni ger samtycke till att ert barn deltar i studien. Den information som samlas kommer enbart att används i forskningsändamål. Om ni önskar mer information om studien, kontakta gärna mig eller mina handledare via mail eller telefon.

Önskar ni mer information, kontakta gärna mig:
Doktorand Caroline Eriksson tel. xxx-xx xx xx caroline.eriksson@hh.se

Eller någon av mina handledare:
Professor Pia Williams tel. xxx-xxx xx xx pia.williams@ped.gu.se
Lektor Angelika Kullberg tel. xxx-xxx xx xx angelika.kullberg@ped.gu.se
Lektor Anki Wennergren tel. xxx-xx xx xx anki.wennergren@hh.se

För samtycke om deltagande i studien *Lärares undervisning i matematik,* fyll i nedanstående talong och lämna på grundskolan i medföljande kuvert.

❑ Jag har fått information om projektet *Lärares undervisning i matematik,* och samtycker till att vårt barn deltar i studien.
Videoinspelningarna används endast inom studien och i syfte att utveckla verksamheten på XX skola.

❑ Jag har fått information om projektet *Lärares undervisning i matematik,* och vill **inte** att vårt barn deltar i studien.

....
Barnets namn

....
Skolans namn Klass

....
Datum

....
Vårdnadshavares/vårdnadshavarnas underskrift

Bilaga 5 Kartläggning förskola

Samtalsguide

Frågor inför samtal med 5-åringar om tal i bråkform.

Samtalet genomförs med två barn i taget.

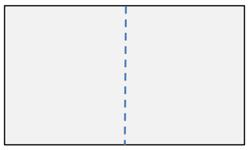
Jag tar utgångspunkt i en pizza som är delad i 6 bitar. Jag tänker att pizza är välbekant för barnen.

1. Kan ni dela pizzan så att ni får lika mycket pizza var?
2. Hur mycket pizza fick ni?
3. Kan ni dela pizzan på något annat sätt?
4. Hur mycket pizza fick ni nu?
5. Kan ni dela pizzan så att ni får hälften var?
6. Hur tänkte ni?

Jag plockar undan pizzan och tar fram ett papper som jag klipper av men inte på hälften.

1. Har jag klippt pappret på hälften?
2. Hur vet du det?

Jag tar fram ett nytt papper och klipper på hälften.



1. Har jag klippt pappret på hälften?
2. Hur vet du det?

Jag tar fram ett nytt papper.

1. Finns det fler sätt som man kan klippa pappret på så att det blir klippt på hälften?
2. Kan du visa mig?
3. Finns det fler sätt? Visa.

Jag tar fram ett nytt papper.

1. Hur kan man klippa pappret i fjärdedelar?

Jag plockar undan papperna och tar fram 12 gröna stenar.

1. Nu ska vi dela stenarna på oss tre. Kan ni dela så att vi får lika många stenar var?
2. Hur många stenar fick vi?
3. Kan ni dela stenarna på något annat sätt mellan oss?
4. Hur många stenar fick vi nu?
   Om barnen inte delar stenarna i olika stora mängder så gör jag det.

5. Kan man dela så här? Hur har jag delat?
6. Kan ni dela så att vi får en tredjedel stenar var?
7. Hur tänkte ni?

Jag plockar undan stenarna och tar fram en tråd.

1. Kan ni klippa tråden på hälften?
2. Blev tråden klippt på hälften?
3. Hur kan du se det?

Jag tar undan tråden och tar fram papper och penna.

1. Vet ni hur man kan skriva en halv? Prova.
2. Vet ni hur man kan skriva en fjärdedel? Prova.

Jag tar fram en bild på fyra ritade barn.

1. Om barnen ska få ett halvt äpple var. Hur många äpplen måste jag hämta?
   Om barnen inte klara uppgiften tar jag fram 5 äpplen som de får titta på och se om det hjälper barnen att lösa uppgiften.

Bilaga 6 Planering förskola

Tillfälle 1

Temat är pirater och sjörövare.

En pedagog är kapten och Fanny och ytterligare en pedagog är pirater.

Det är 10 barn med vid detta tillfälle.

Uppgift 1

Barnen får i uppgift att dela upp sig i tre grupper till de tre olika pedagogerna.

Syfte är att upptäcka **olika**, då det blir olika antal barn i grupperna.

Uppgift 2

Nä, minsann, kaptenen kan inte ha någon grupp. Kaptenen har fullt upp med andra uppgifter. Gruppen lämnas över till en av piraterna.

Syftet är här att grupperna blir ännu ojämnare till antal, **olika.**

Uppgift 3

Barnen får i uppdrag att dela upp så att det blir lika många barn i båda grupperna.

Syftet är att få syn på **lika** och **hälften**.

Uppgift 4

En av piraterna känner sig lite krasslig och kan inte ta hand om så många barn. Ett barn får gå över till den andra gruppen.

Syftet är att barnen ska upptäcka att rättvist kan innebära att dela **olika**, i det här fallet utifrån piraternas hälsa.

Uppgift 5

Barnen är nu indelade i två grupper där en grupp består av 4 barn och den andra av 6 barn. Barnen ska följa sin pirat till olika skattkistor där det finns uppdrag. Efter att barnen klarat ett uppdrag står det var barnen ska gå för att hitta en ny skattkista.

Uppdrag 1

En berättelse om kokosnötter som t ex ramlat ner från två träd/buskar. Uppgiften är att barnen ska fördela dessa på de båda träden/buskarna.

Efter att barnen delat på ett sätt får de i uppdrag att dela upp dem på ett annat sätt.

Och därefter på ytterligare ett sätt.

Efter varje fördelning så måste barnen få beskriva hur de tänkt när de delade upp dem. Poängtera **lika, hälften** och **olika, inte hälften**.

Om barnen inte kommer på någon annan delning än lika så måste pedagogen utmana vidare så att de får syn på lika, hälften och olika, inte hälften.

Uppdrag 2

Göra en repstege, då måste repet klippas på hälften för annars blir kaptenen inte nöjd. Piraten delar en piprensare på hälften och några som inte är på hälften. (Piprensarna ska här föreställa repen till stegen). Här diskuteras hälften utifrån barnens svar och utmanas i deras tänkande.

Därefter klipper piraten en bandanas som blir olika långa och visar på att en inte går om huvudet, medan den andra blir väldigt lång.

Piraten visar hur man genom att vika tygbiten på mitten kan klippa och få två bandanas som är lika långa. Barnen får sedan klippa bandanas på hälften och ta om sitt huvud.

Syftet är att barnen ska få syn på **hälften, lika** långa, utifrån en representation som är som en linje och där det inte finns någon egen vinning i att själv få ”rättvist”, men även få syn på **inte hälften**, **olika** långa. Bandanasklippningen är något som kan handla om egen vinning.

Uppdrag 3

Båten kantrar och alla trillar i vattnet. Som tur är finns det tre öar (rockringar) där barnen kan rädda sig iland.

Syftet är att det blir olika antal barn på rockringarna för alla ska klara sig iland.

Eventuellt se om barnen kan räddas på andra sätt än det första.

Syftet är begreppet **olika**.

Uppdrag 4

I skattkistan finns det en berättelse om vindruvor som behöver delas lika mellan barnen.

Syftet är begreppet **lika**.

Uppgift 6. Dokumentation.

Skattjakten avslutas med att barnen får en rituppgift där de ska dela 9 vindruvor i två ”högar”. Här är det åter viktigt att piraten frågar hur de har tänkt och om det hade funnits andra sätt att dela på.

Syftet är att se om barnen har tagit till sig **olika**.

Tillfälle 2.

Vid detta tillfälle är barnen i helgrupp med Fanny. Vid detta tillfälle behöver det vara 12 personer, antingen 12 barn eller 10 barn och 2 vuxna.

Syftet med detta tillfälle är att fortsätta arbeta med begreppet hälften och att införa begreppet fjärdedelar som är mer okänt.

Uppgift 1

Dela ett äpple på hälften.

Dela ett äpple i fjärdedelar.

Hur vet man att något är delat i hälften? Hur vet man att något är delat i fjärdedelar?

Uppgift 2

Barnen får i uppgift att dela sig på hälften.

Barnen får i uppgift att dela sig i fjärdedelar.

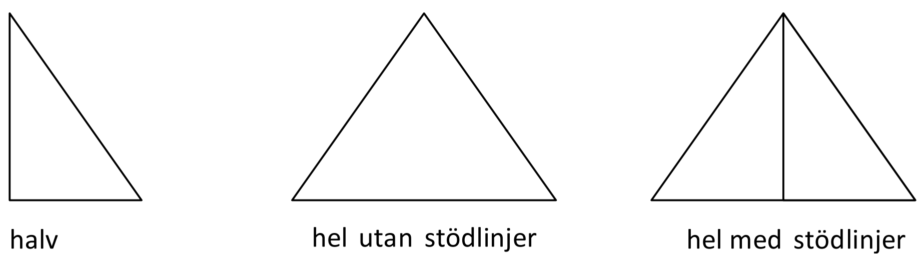
Uppgift 3

Barnen får se när Fanny delar en piratflagga (stort papper) på hälften. Barnen får titta på hur halvorna ser ut. Fanny klipper sedan en ny piratflagga på hälften, men på ett annat sätt. Problematisera att den första halvan och den andra klippta halvan ser olika ut, men ändå är hälften båda två. Fanny har med ytterligare någon halva som är klippt sedan tidigare och barnen får fundera på hur den hela kunnat se ut.

Pappret är till för att de två grupperna ska kunna måla vars sin piratflagga.

Uppgift 4. Dokumentation.

Ett papper är tillverkat där det är ritat en halva (triangel), men även olika helheter till den och ”helheter” som inte stämmer. Barnen får i uppgift att med hjälp av triangeln testa och se vilka som kan stämma och färglägga dessa. Om uppgiften är för svår finns även papper där stödlinjen är utritad.

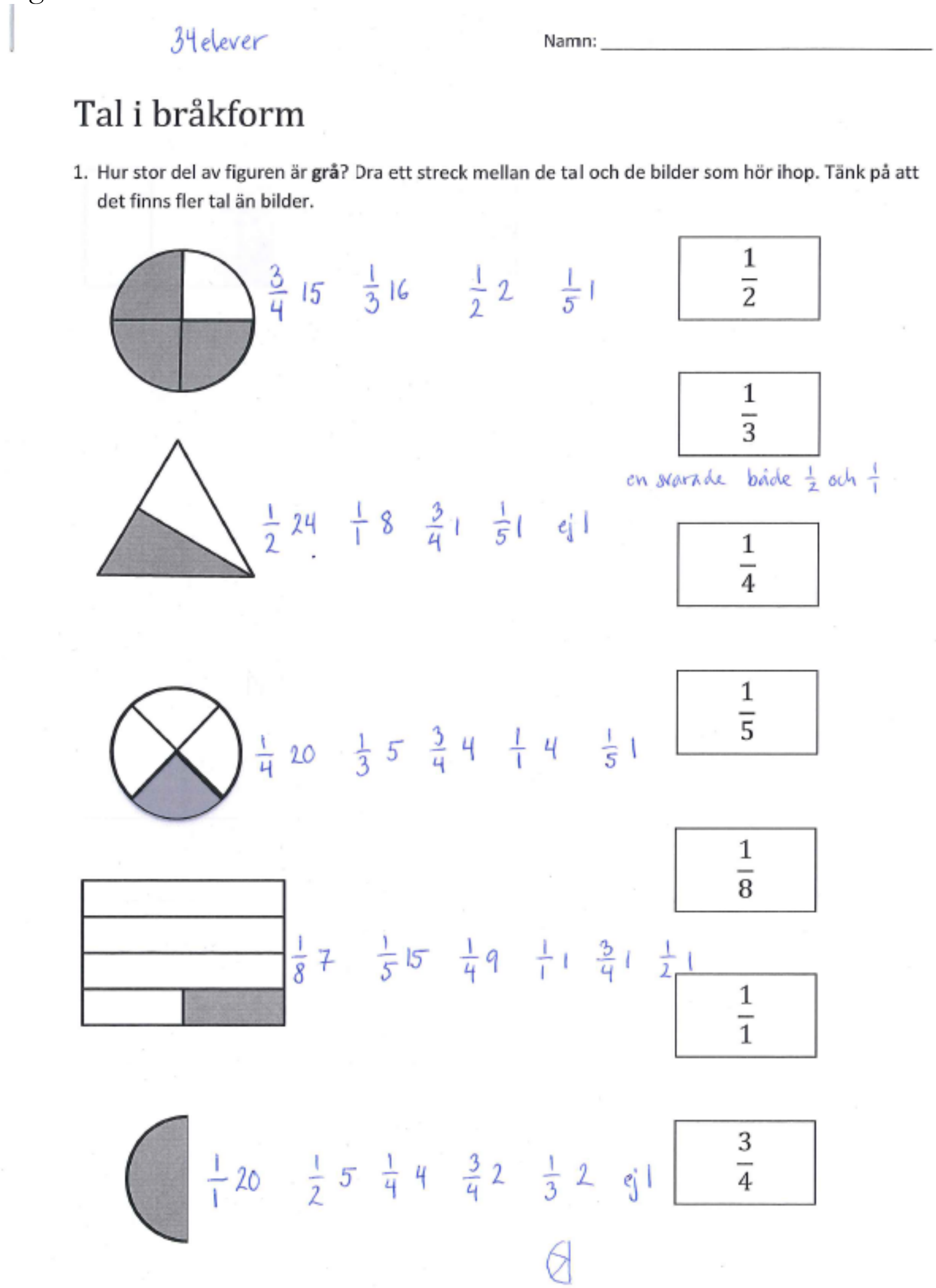


Uppgift 5. Dokumentation.

Om någon behöver/vill ha extra utmaning kan de få samma uppgift som i uppgift 4, men i fjärdedelar.

Bilaga 7 Kartläggning årskurs 3

Kartläggning i årskurs 3 med 34 elever. Nedan visas olika elevsvar och antal elever på respektive elevsvar. Det antal som anges vid en uppgift är antal elever som svarat rätt. Men på fråga 2 anger antalet hur många elever som valt att ringa in bilden.



34 elever

Namn: ____________________

Tal i bråkform

1. Hur stor del av figuren är **grå**? Dra ett streck mellan de tal och de bilder som hör ihop. Tänk på att det finns fler tal än bilder.

$\frac{3}{4}$ 15 $\frac{1}{3}$ 16 $\frac{1}{2}$ 2 $\frac{1}{5}$ 1

$\frac{1}{2}$ 24 $\frac{1}{1}$ 8 $\frac{3}{4}$ 1 $\frac{1}{5}$ 1 ej 1

en svarade både $\frac{1}{2}$ och $\frac{1}{1}$

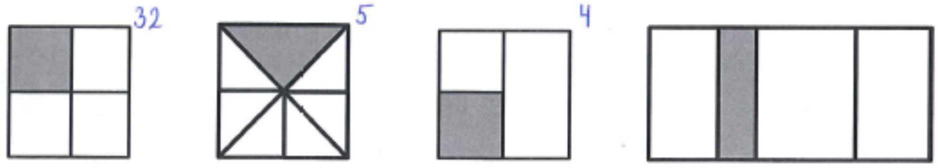
$\frac{1}{4}$ 20 $\frac{1}{3}$ 5 $\frac{3}{4}$ 4 $\frac{1}{1}$ 4 $\frac{1}{5}$ 1

$\frac{1}{8}$ 7 $\frac{1}{5}$ 15 $\frac{1}{4}$ 9 $\frac{1}{1}$ 1 $\frac{3}{4}$ 1 $\frac{1}{2}$ 1

$\frac{1}{1}$ 20 $\frac{1}{2}$ 5 $\frac{1}{4}$ 4 $\frac{3}{4}$ 2 $\frac{1}{3}$ 2 ej 1

$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{1}$ $\frac{3}{4}$

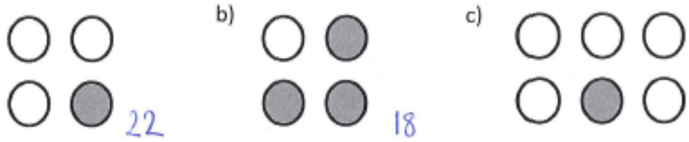
2. Vilka figurer visar att $\frac{1}{4}$ är **grå**? Ringa in dem.



32 5 4 17

3. Hur stor del av cirklarna är grå? Svara i bråkform. Skriv på linjen.

a) b) c)



22 18 19

a) $\frac{4}{1}$ 3 $\frac{3}{1}$ 2 $\frac{1}{3}$ 2 $\frac{1}{1}$ 2 1 1 ej 2

b) $\frac{3}{1}$ 4 $\frac{1}{3}$ 5 $\frac{4}{3}$ 2 3 1 $\frac{3}{5}$ 1 $\frac{1}{1}$ 1 ej 2

c) $\frac{1}{5}$ 3 $\frac{5}{1}$ 4 $\frac{6}{1}$ 2 1 1 $\frac{1}{3}$ 1 $\frac{1}{1}$ 1 $\frac{3}{6}$ 1 ej 2

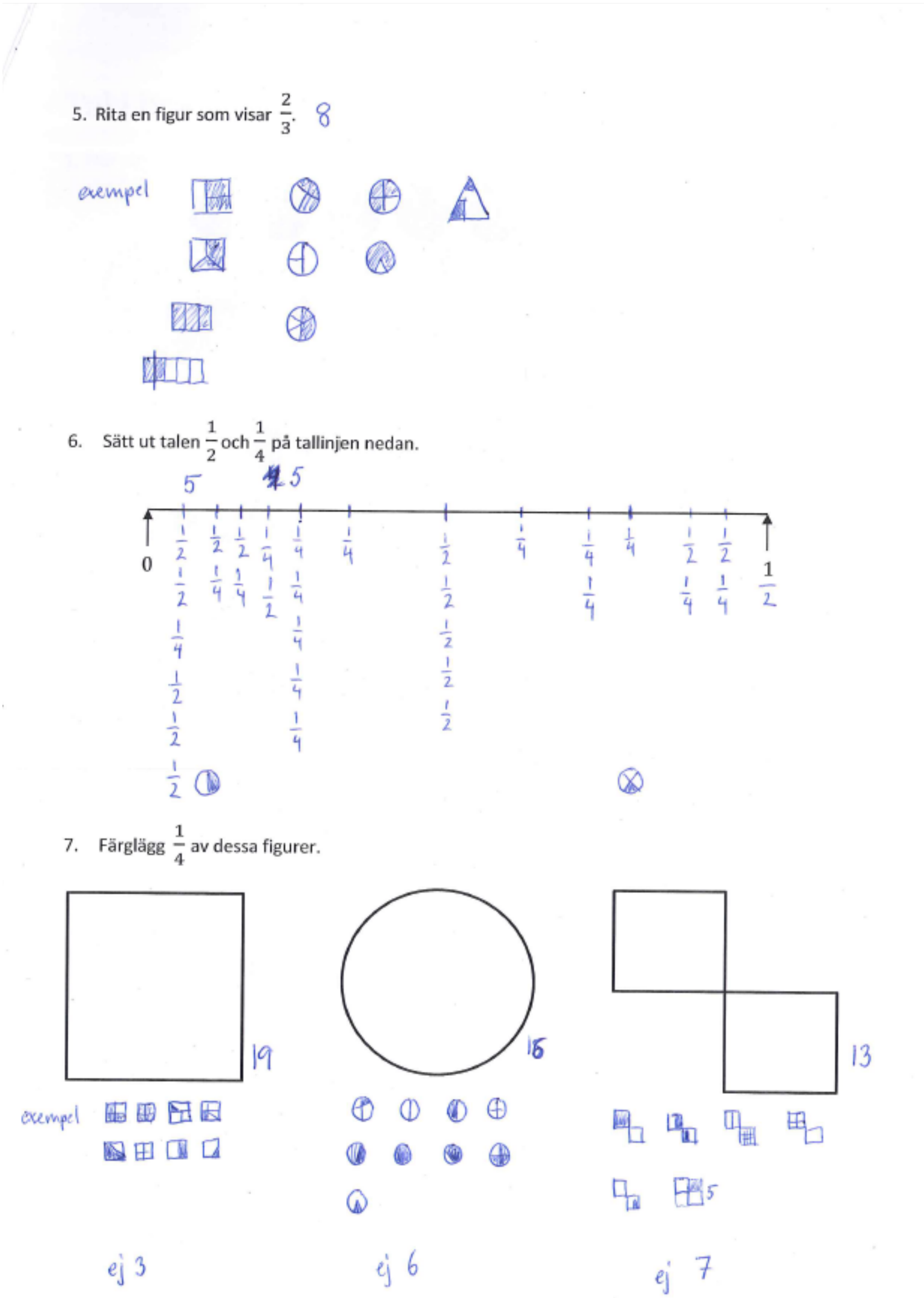
4. 10 barn i en klass får välja om de vill arbeta med svenska eller matte. Hur tror du att barnen i klassen valde? Skriv på tre olika sätt.

	Svenska		Matte
10 =	_____	+	_____
10 =	_____	+	_____
10 =	_____	+	_____

5+5 23
7+3 11
4+6 8
2+8 7
3+7 7
6+4 7
0+10 5
1+9 4
9+1 4
8+2 1
10+0 1

4+2 3
1+1 4
3+3 2
1+_ 2
_+1 2
3+2 1
2+6 1
4+5 1
1+8 1
8+4 1
4+3 1
3+1 1
5+2 1

4+10 1
6+2 1
1+5 1



5. Rita en figur som visar $\frac{2}{3}$. 8

exempel

6. Sätt ut talen $\frac{1}{2}$ och $\frac{1}{4}$ på tallinjen nedan.

5 ~~4~~ 5

0 1

7. Färglägg $\frac{1}{4}$ av dessa figurer.

19 18 13

exempel

5

ej 3 ej 6 ej 7

8. Det finns 10 äpple. Ringa in $\frac{1}{2}$ av dem. 15

2 8elever 3 1elev ej 1elev

4 3elever 6 1elev

9. Det finns 8 kakor. Ringa in $\frac{1}{4}$ av kakorna. 10

4 12elever 3 1elev ej 2elever

8 2elever 6 1elev

2 elever

10. Det finns 8 kakor. Ringa in $\frac{3}{4}$ av kakorna. 8

4 9elever 7 1elev ej 4elever

3 5elever 4,5 1elev

11. Ringa in det tal som är störst. $\frac{1}{4}$ 24 $\frac{1}{2}$ 8 ej 1

ringade in 4:an och 2:an

12. Ringa in det tal som är störst. $\frac{1}{4}$ 4 $\frac{2}{4}$ 28 ej 1

ringade in 4:an och 4:an

Bilaga 8 Planering årkurs 3

Lektion 1

Lisa ritar en halvmåne på tavlan. Berättar en historia.
Lisa berättar att hon blev bjuden på ½ av något. Skriv ½ på tavlan. Vad betyder ettan och vad betyder tvåan?

Skriva ½ på tavlan. Var i vardagen har ni stött på ½. Gör en tanketavla!

Det här är ett bråk. Har ni stött på något annat bråk? Vilket och i vilket sammanhang? Gör en tanketavla!

Uppgift 1.

Barnen får i grupp om två en geometrisk form (kvadrater, cirklar, rektanglar, halvcirkel, triangel, romb) på ett färgat papper. Alla grupper får olika former/storlekar. De får i uppgift att dela den geometriska formen på hälften, i andredelar. Eleverna skriver ½ på varje bit.

Eleverna klistrar upp halvorna, så att de bildar en helhet, på ett vitt papper och sätter upp dem på fönstret.

Helklassdiskussion: Hur tänkte ni när ni delade dem i andredelar/på hälften? Hur vet vi att detta är andredelar/hälften? Viktigt att komma fram till att de ska vara lika stora och att poängtera detta.

Uppgift 2.

Barnen får i grupp om två olika antal av något. Eleverna får i uppgift att dela antalet på hälften, i andredelar.

Barnen i gruppen får även ett papper med samma antal ritat på och får i uppgift att ringa in hälften. Eleverna skriver ½ under det inringade.

De sätts upp på fönstret.

Helklassdiskussion: Hur tänkte ni när ni delade dem i andredelar/på hälften? Hur vet vi att detta är andredelar/hälften? Viktigt att komma fram till att de ska vara lika många och att poängtera detta.

Uppgift 3.

Barnen i grupp om två får en linje. Linjerna är olika långa och någon får med 0 och 1 utsatta och några med både 0, 1 och 2. De får i uppgift att markera var ½ finns.

De sätts upp på fönstret.

Helklassdiskussion: Hur tänkte ni när ni satte dit en halv? Hur vet man var den ska vara?

Lektion 2

Starta lektionen med att dra upp ¼, skrivet på en lapp, ur fickan. Jag skrev denna lapp för att påminna mig om något. Vad kan det ha varit? Hjälp mig?

Uppgift 1.

Barnen får cm-rutat papper med kvadrater som är i storlek 4*4cm, d.v.s. 16 rutor totalt. Denna kvadrat ska vara synlig, ditritad, på det cm-rutade pappret. Barnen färglägger i fjärdedelar, fyra olika färger. Detta håller de på med ca 15 minuter. Barnen genomför denna uppgift enskilt.

Lisa samlar ihop alla kvadrater och delar sedan ut dem så att alla grupper om två får en hög med kvadrater. De delar upp dem i två högar, korrekta och icke korrekta, d.v.s. en hög för de som är indelade i fjärdedelar och en hög för de som inte är indelade i fjärdedelar.

Eleverna sätter upp dessa på två olika stora papper på fönstret. Ett papper med fjärdedelar. Ett papper inte fjärdedelar.

Helklassdiskussion: Hur tänkte ni när ni delade dem i fjärdedelar? Hur vet man att något är delat i fjärdedelar? Viktigt att komma fram till att de ska vara lika stora och att poängtera detta.

Uppgift 2.

Barnen får i grupp om två olika antal centikuber. De får i uppgift att dela centikuberna i fjärdedelar.

Barnen i gruppen får även ett papper med samma antal ritat på och får i uppgift att ringa in en fjärdedel. Eleverna skriver ¼ under det inringade.

De sätts upp på fönstret.

Helklassdiskussion: Hur tänkte ni när ni delade dem i fjärdedelar? Hur vet vi att detta är fjärdedelar? Viktigt att komma fram till att de ska vara lika många och att poängtera detta.

Uppgift 3.

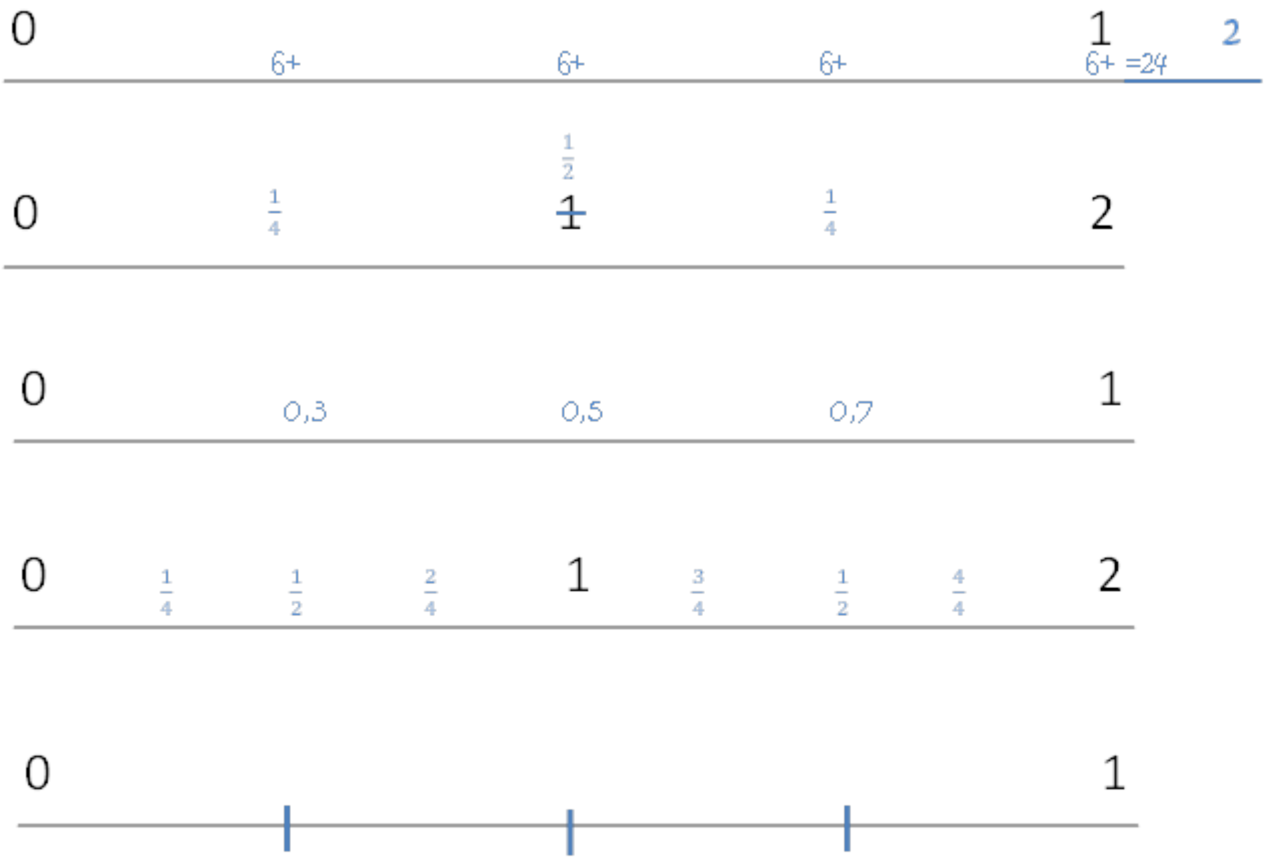
Barnen i grupp om två får samma linje som dagen innan, ta ner från fönstret. De ska markera var ¼ finns.

De sätts upp på fönstret.

Helklassdiskussion: Hur tänkte ni när ni satte dit en fjärdedel? Hur vet man var den ska vara?

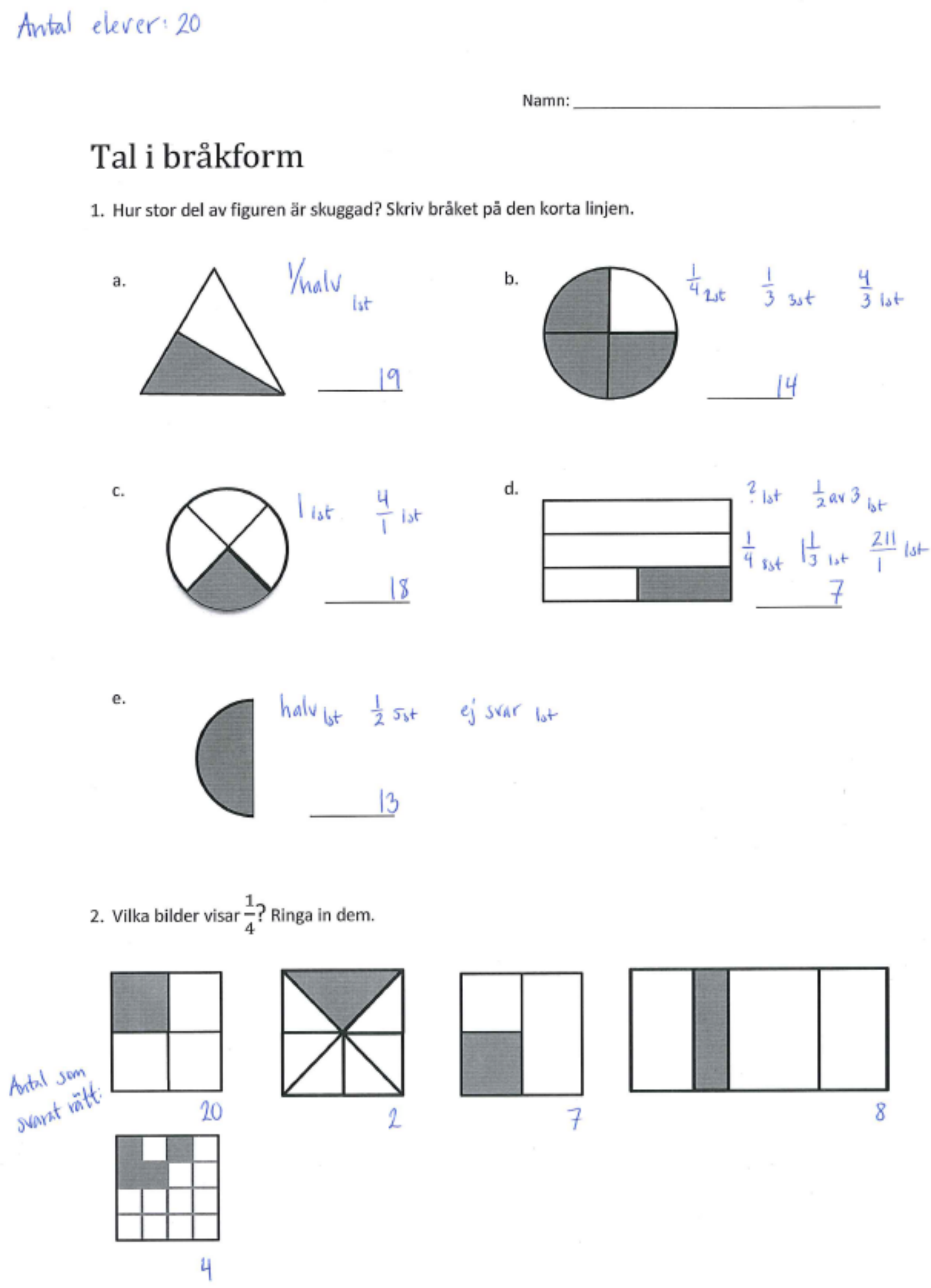
Bilaga 9 Elevlösningar av bråk på en tallinje i årskurs 3

I årskurs 3 fick eleverna i uppgift att markera en andredel respektive en fjärdedel på en tallinje. En del elever fick en tallinje som sträckte sig från noll till ett medan andra fick tallinje som sträckte sig från noll till två. På tallinjen som sträckte sig från noll till två var även talet ett utsatt. Nedan är några av elevernas lösningar illustrerade. Det som är i blått är det som eleverna skrivit/markerat/ritat.



Bilaga 10 Kartläggning årkurs 5

Kartläggning i årskurs 5 med 20 elever. Nedan visas olika elevsvar och antal elever på respektive elevsvar. Det antal som anges vid en uppgift är antal elever som svarat rätt.



Antal elever: 20

Namn: ____________________

Tal i bråkform

1. Hur stor del av figuren är skuggad? Skriv bråket på den korta linjen.

a. 1/halv 1st — 19

b. $\frac{1}{4}$ 2st $\frac{1}{3}$ 3st $\frac{4}{3}$ 1st — 14

c. 1 1st $\frac{4}{1}$ 1st — 18

d. ? 1st $\frac{1}{2}$ av 3 1st $\frac{1}{4}$ 8st $1\frac{1}{3}$ 1st $\frac{211}{1}$ 1st — 7

e. halv 1st $\frac{1}{2}$ 5st ej svar 1st — 13

2. Vilka bilder visar $\frac{1}{4}$? Ringa in dem.

Antal som svarat rätt: 20 2 7 8 4

3. $\frac{3}{4}$

Vad betyder 3:an? ______________________________

____

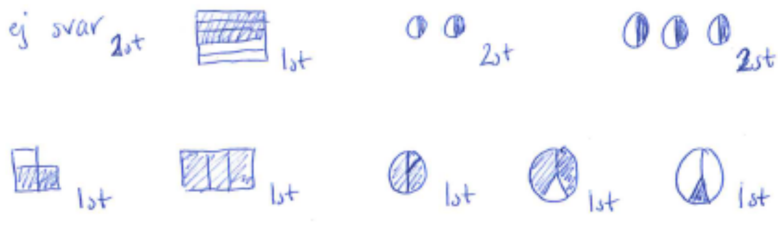
Vad betyder 4:an? ______________________________

____

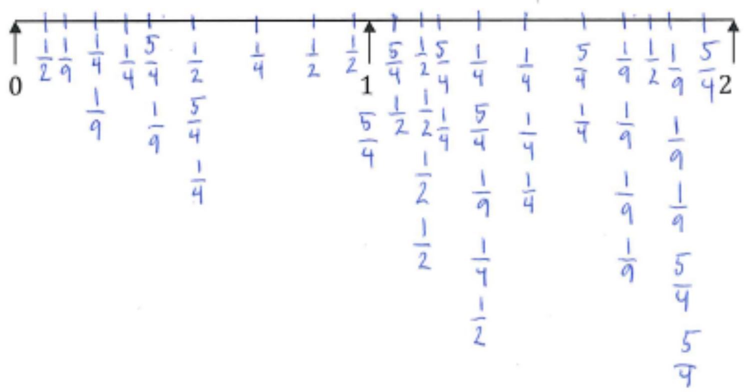
se separat fil

4. Rita $\frac{2}{3}$. 15

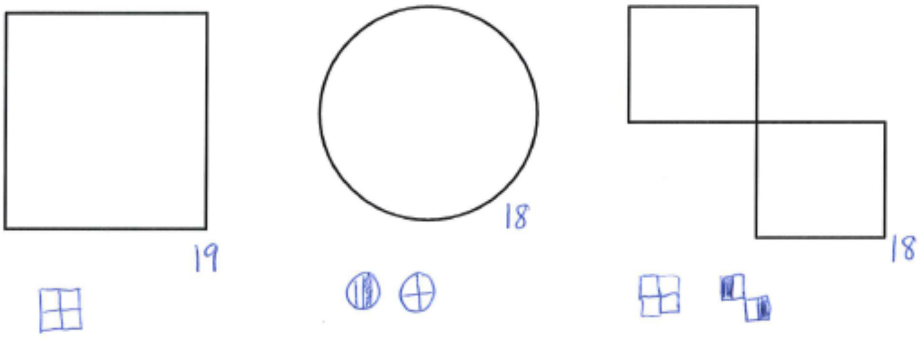
5. Rita $\frac{3}{2}$. 7



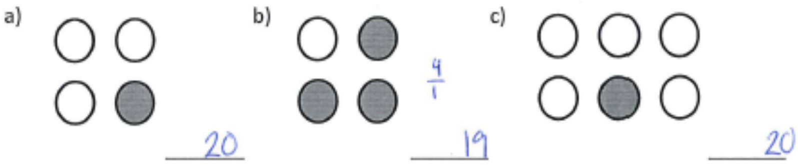
6. Markera talen $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{4}$ och $\frac{1}{9}$ på tallinjen nedan.



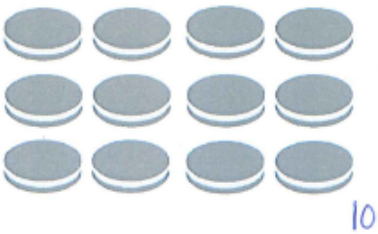
7. Färglägg $\frac{1}{4}$ av dessa figurer.

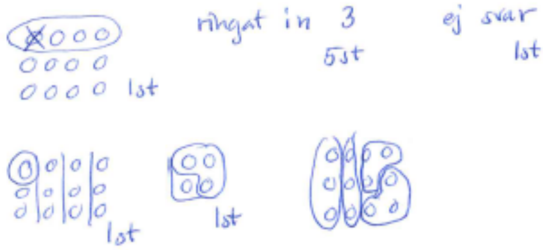


8. Hur stor del av cirklarna är grå? Svara i bråkform. Skriv på linjen.



9. Det finns 12 kakor. Ringa in $\frac{1}{3}$ av kakorna.





10. Det finns 10 äpplen. Ringa in $\frac{3}{5}$ av äpplena.

ringat in 5 4st

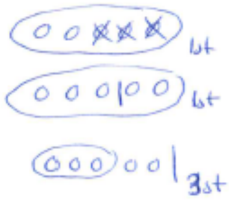
ringat in 3 1st

ringat in 9 1st

ringat in 3,3,3 1st

ringat in 5,5 1st

ej svar 1st



11. a. Ringa in det tal som är störst. $\frac{1}{5}$ 3 $\frac{1}{3}$ 17

b. Hur vet du att det talet är störst?

se bifogad fil

12. a. Ringa in det tal som är störst. $\frac{1}{7}$ 6 $\frac{2}{7}$ 14

b. Hur vet du att det talet är störst?

se bifogad fil

13. Vilket av talen ligger närmast 1? Ringa in ditt svar.

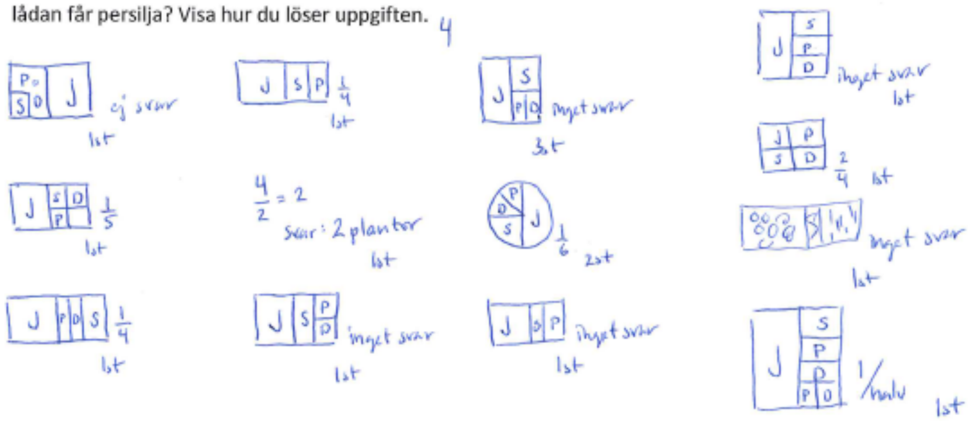
$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{9}$

20

14. Vilket av talen ligger närmast 1? Ringa in ditt svar.

$\frac{1}{6}$ 7 $\frac{3}{6}$ 1 $\frac{5}{6}$ 12

15. Martin planterar växter i en låda på balkongen. Han planterar jordgubbar i hälften av lådan och sallad i en fjärdedel av lådan. Resten av lådan fördelas lika mellan persilja och dill. Hur stor del av lådan får persilja? Visa hur du löser uppgiften. 4



Bilaga 11 Planering årskurs 5

- Storleksordna, bråk med lika nämnare
- Täljare/nämnare betydelse
- Alla delar lika stora

Lektion 1.

Uppgift 1.

Uppstart: Liten berättelse om en tårta som ska delas i åttondelar.

Utgå från elevernas förslag på förklaringar på täljare och nämnare, lägga till förslag.

Tillgång till laborativt material, t.ex. sax, penna papper, centikuber.

Jag gör grupperna utifrån att gruppen ska kunna samarbeta bra.

Sitta i grupp om tre elever, varje grupp formulerar en def. eller väljer ut den de tycker är bäst. Testa om er def. fungerar på 1/6. Varje grupp skriver sin def. på tavlan, Jag ställer utmanande frågor: Hur har ni valt den?, Hur vet ni att den stämmer?

Klassen ska enas om en def. som vi sätter upp i klassrummet.

Uppgift 2.

Rita fjärdedelar, se åk 7. Färdiga rutor som de ska rita en fjärdedel. Se planeringen från åk 7. Ha med extra tomma som de som är klara ska markera fjärdedelar på ett sätt som ingen annan har gjort.

Lektion 2.

Samma grupper.

Uppgift 1.

Storleksordna bråk, som bilder. 4 el 5 bilder/grupp t.ex. sjättedelar, sjundedelar, femtedelar, niondelar. Därefter namnge bråken. Redovisa ca två grupper.

Uppgift 2.

Storleksordna bråk, börja med gemensamma nämnare, obs! inte samma som i uppgiften ovan. Redovisas ca två grupper.

Uppgift 3.

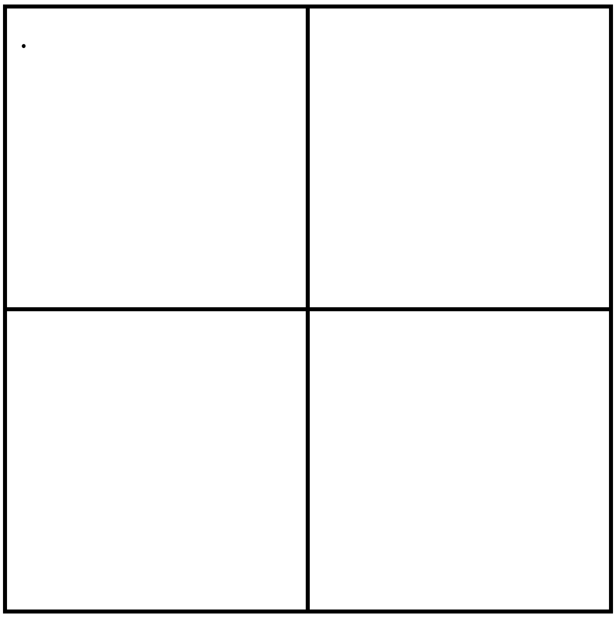
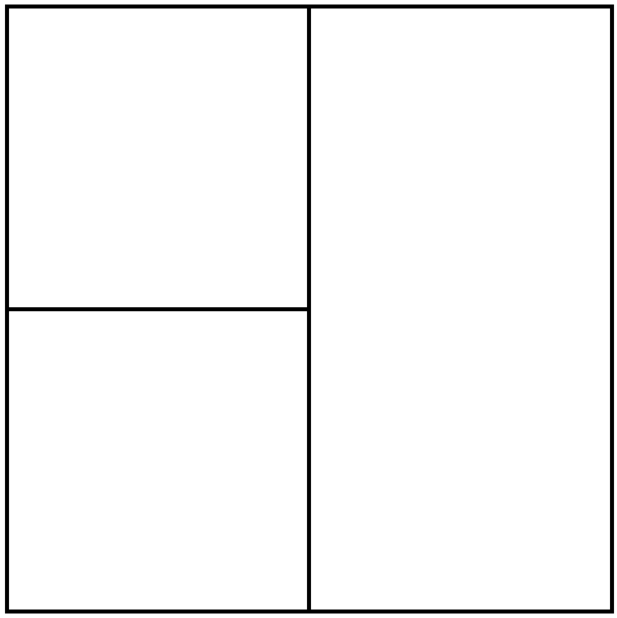
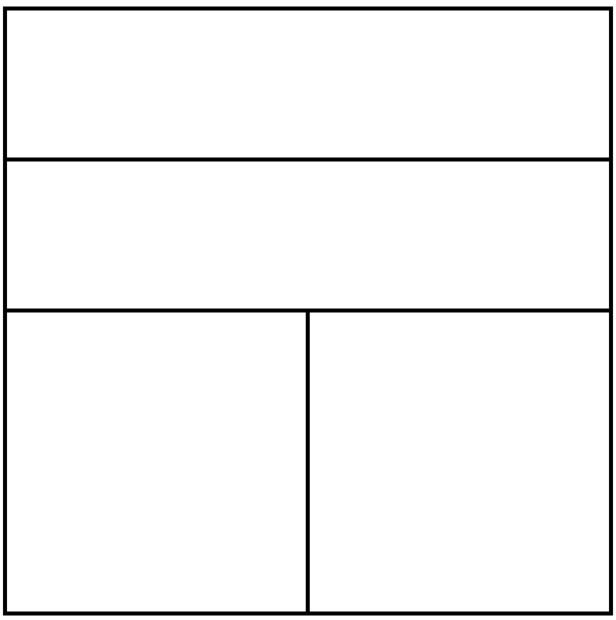
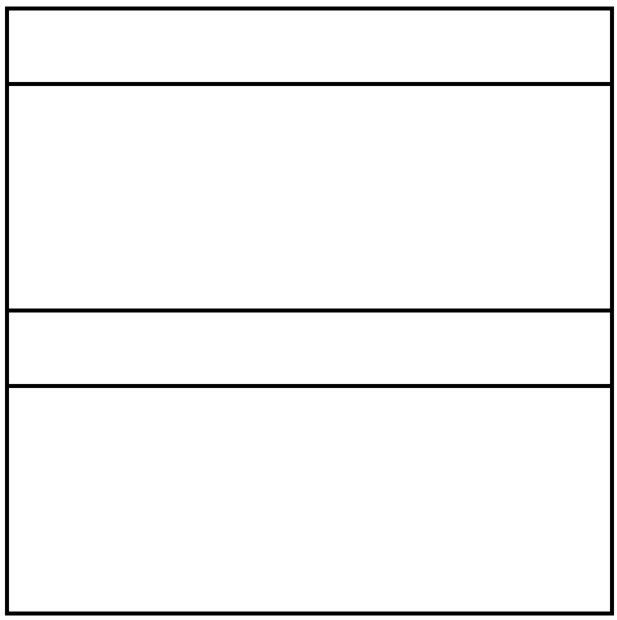
Storleksordna bråk med gemensam täljare. Uppmuntra till att rita. Både stambråk och t.ex. 2/3, 2/5, 2/9. Redovisas ca två grupper.

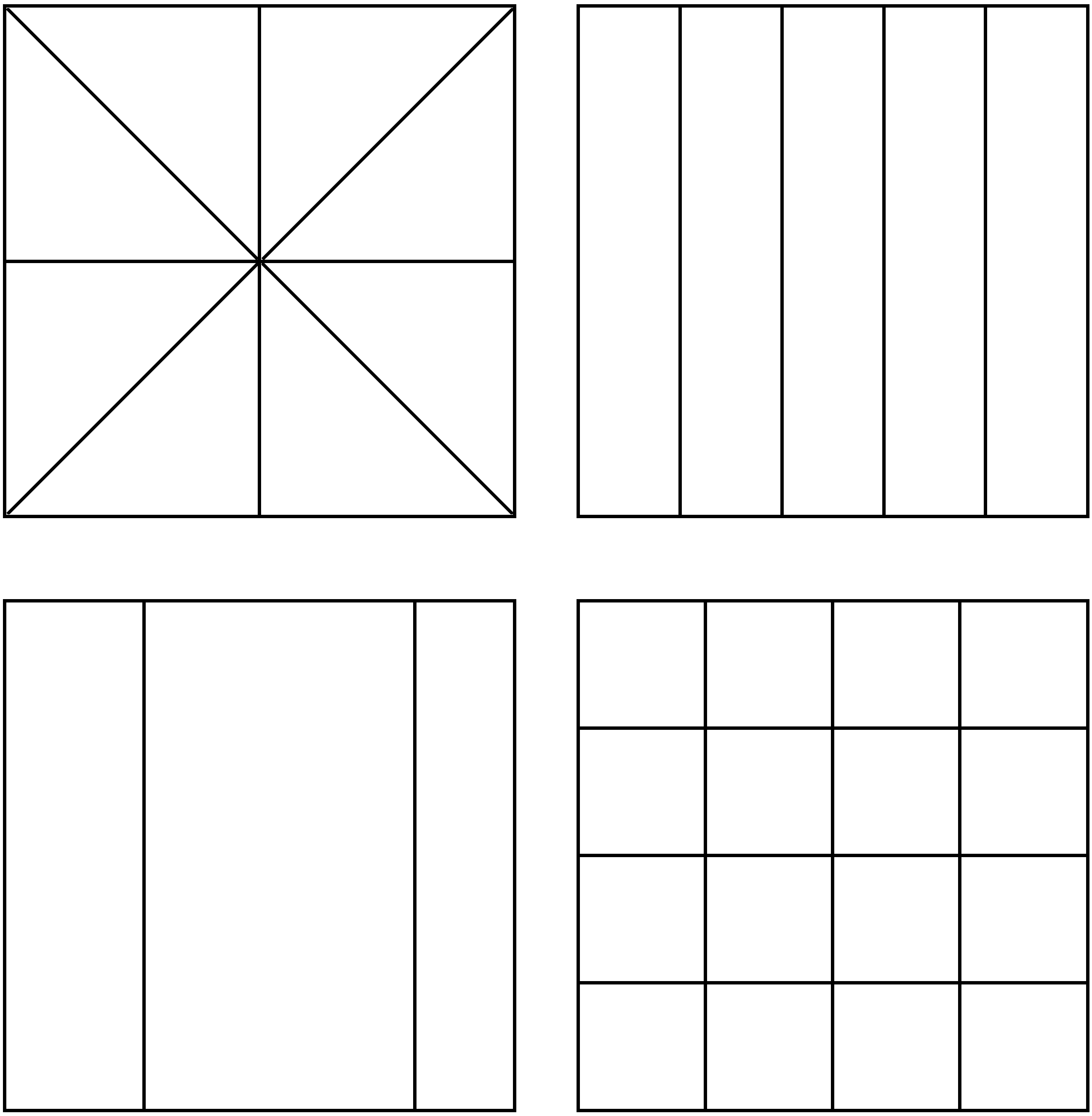
Uppgift 4.

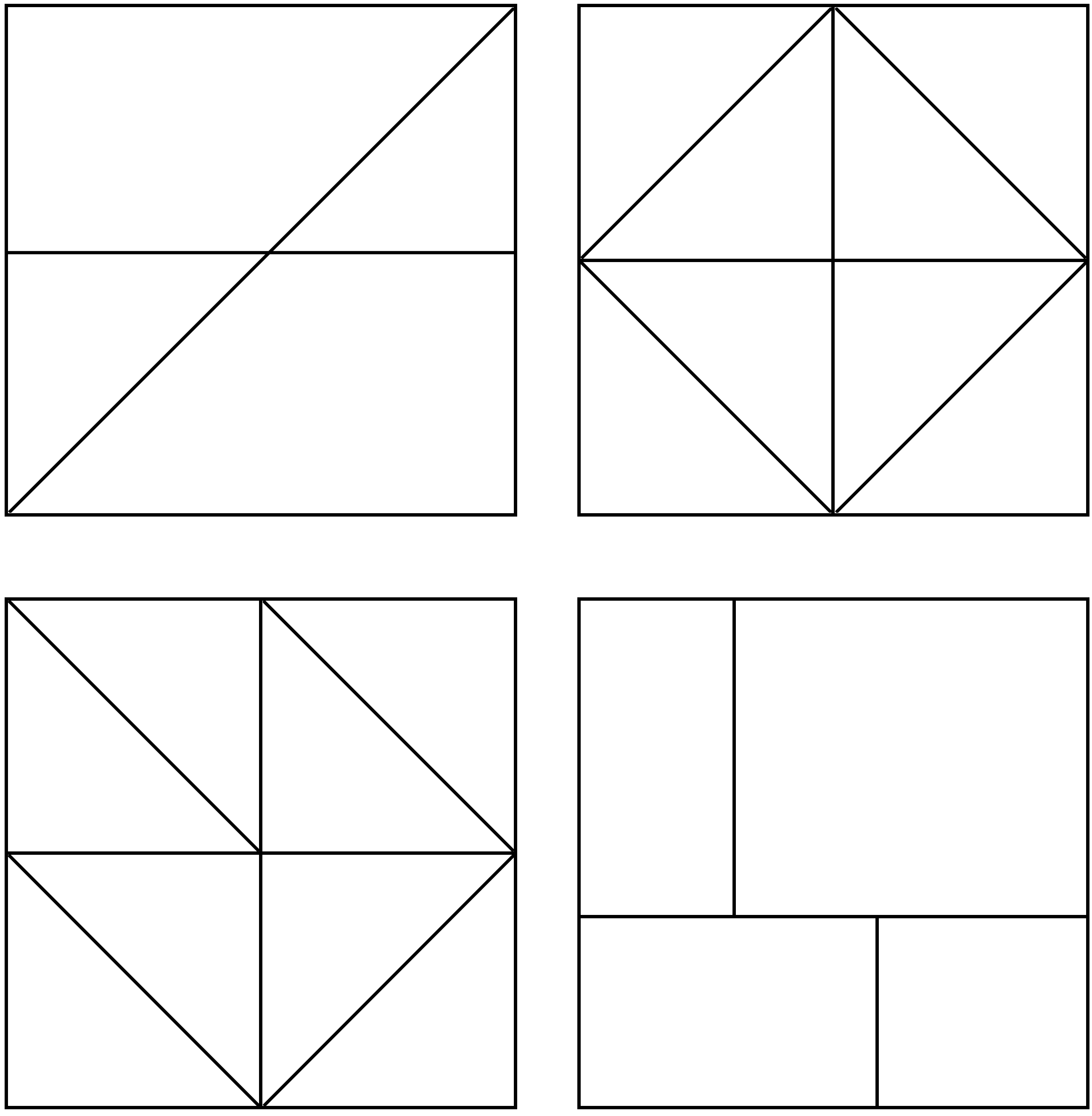
Memory

Bilaga 12 Uppgift kring $\frac{1}{4}$ i årskurs 5

Eleverna i årskurs 5 fick i uppgift att färglägga $\frac{1}{4}$ av en figur.





Bilaga 13 Kartläggning årskurs 9

Kartläggning i årskurs 9 med 15 elever. Nedan visas olika elevsvar och antal elever på respektive elevsvar. Det antal som anges vid en uppgift är antal elever som svarat rätt.

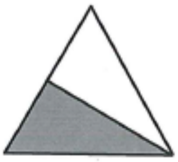
Sammanställning 15elever

Namn: ______________________

Tal i bråkform

1. Hur stor del av figuren är skuggad? Skriv bråket på den korta linjen.

a.



15

b.

$\frac{1}{4}$ 1

14

c.

$\frac{1}{4}$ 1

14

d.

$\frac{0,5}{3}$ 1 $\frac{1}{5}$ 1

13

e.

$\frac{1}{2}$ 3

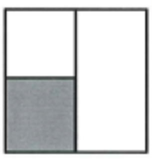
12

2. Vilka bilder visar $\frac{1}{4}$? Ringa in dem.

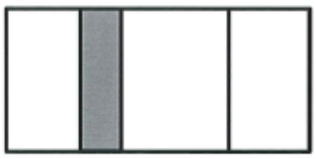
Antal rätt:

15

9



13



14

12

15

3. $\frac{3}{4}$

Vad betyder 3:an? ______________________

____

Vad betyder 4:an? ______________________

____

se separat fil

4. Rita $\frac{2}{3}$.

13

5. Rita $\frac{3}{2}$.

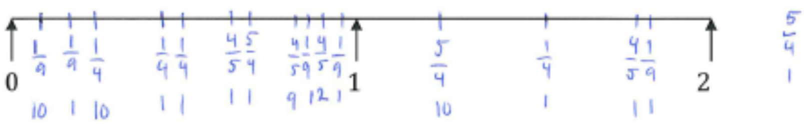
7

inget svar 1

6. Markera talen $\frac{1}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{4}$ och $\frac{1}{9}$ på tallinjen nedan.

ej svarat på $\frac{1}{4}$ $\frac{4}{5}$ $\frac{5}{4}$ $\frac{1}{9}$

1 III III 1



7. Vilket av bråken är lika mycket som $\frac{2}{3}$?

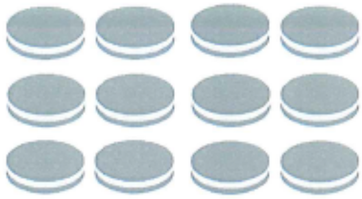
$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{3}{2}$
	1	12	

1 svarade $\frac{3}{4}$ och $\frac{4}{6}$

1 svarade $\frac{3}{4}$ och $\frac{3}{2}$

8. Det finns 12 kakor. Ringa in $\frac{1}{3}$ av kakorna.

15



9. Ringa in $\frac{3}{5}$ av 10 äpplen.

13 2 ringade in 2 äpplen

10. Ringa in det tal som är störst. $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{3}$

15

11. Ringa in det tal som är störst. $\frac{1}{7}$ $\frac{2}{7}$

15

12. Vilket av talen ligger närmast 1? Ringa in ditt svar.

$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{9}$

14 1

13. Vilket av talen ligger närmast 1? Ringa in ditt svar.

$\frac{1}{6}$ $\frac{3}{6}$ $\frac{5}{6}$

15

14. Beräkna $\frac{4}{5} - \frac{1}{5}$. Ringa in ditt svar.

$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{25}$	3
14			1

15. Beräkna $\frac{2}{5} + \frac{1}{3}$. Ringa in ditt svar.

$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{11}{15}$	$\frac{2}{15}$
8	4	2	1

$1 \quad \frac{1}{2}$ → $\frac{1}{2} \; \frac{1}{4}$ $\quad \frac{1}{2} = \frac{2}{4}$

$\frac{2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

1 rätt malösning men fel bildlösning

16. Vad är hälften av $1\frac{1}{2}$? Visa med bild och/eller text hur du kommer fram till ditt svar.

$1\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \quad \frac{2}{6}$

$1\frac{1}{2}$

de fälten som är fyllda med är hälften av $1\frac{1}{2}$

6 rätt svar

1 inget svar

2 rätt uträkning men inget svar

$1 - 0{,}5 = 0{,}5 \quad 0{,}5 \; \frac{1}{4}$

$\frac{1}{2} - 2 = \frac{1}{4}$

$\frac{1}{2} = 0{,}5 \quad \frac{0{,}5}{2} = 0{,}25$

$0{,}5 + 0{,}25 = 0{,}75 = \frac{1}{3}$

$\frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$

$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

Delar bara allt på hälften

17. Beräkna $4 \times \frac{3}{4}$. Visa med bild och/eller text hur du kommer fram till ditt svar.

$4 \times \frac{3}{4} = \frac{12}{16}$ 2

$4 \times \frac{3}{4} = \frac{12}{16}$

$\frac{3}{4}$

$\frac{3}{4} \cdot 4 = \frac{12}{16}$

3 rätt svar

2 inget svar

$4 \cdot \frac{3}{4} = \frac{12}{16}$

$4 \times 3 = 12$

$4 \times 4 = 16 \quad \frac{12}{16}$ 2

betyder fortfarande lika mycket bara att $\frac{3}{4}$ är förenklat

$4 \cdot \frac{3}{4} = \frac{12}{16} = \frac{6}{8}$

I bilden delar jag upp fjärdedelarna i fyra och får då 16 delar. Eftersom jag hade $\frac{3}{4}$ får jag nu $\frac{12}{16}$.

$\frac{12}{16} = \oplus + \oplus + \oplus + \oplus$

man multiplicerar det första talet med båda talen i bråktalet.

18. Om en planka är 60 cm lång och den är $\frac{1}{4}$ av vad jag vill ha, hur lång planka behöver jag då totalt?

3 svarar 15

~~9 rätt svar~~

11 rätt svar

Jag behöver 4 planker totalt. För att om 60 är $\frac{1}{4}$ så har jag $3\frac{1}{4}$ kvar för att det ska bli en hel.

Bilaga 14 Planering årskurs 9

Lektion 1

Mål: Definition av nämnare och täljare

Utgå från de definitioner som finns och låt eleverna diskutera i grupper om 3-4 elever. Komma fram till en gemensam definition

Testa er definition på ex 1/4, 7/15, 5/3. Mängd, helhet, tallinje.

Gemensam diskussion i klassen där vi försöker enas om den ”bästa” definitionen.

Från Martinas planering

Sitta i grupp om tre elever, varje grupp formulerar en def. eller väljer ut den de tycker är bäst. Testa om er def. fungerar på 1/6. Varje grupp skriver sin def. på tavlan, Jag ställer utmanande frågor: Hur har ni valt den?, Hur vet ni att den stämmer?

Klassen ska enas om en def. som vi sätter upp i klassrummet.

Mål: Kunna rimlighetsbedöma additioner av bråk.

Timss - uppgiften

olika svårighetsgrad i olika grupper

3/5 + 1/4 =

Ge fyra svarsalternativ liknande timss.

4/9; 17/20; 4/20; 3/20

3/5 + 1/5=

4/25   4/10   4/5   3/10

Motivera för varje bråk varför det är rätt eller fel.

Lyft till helklassdiskussion

Lektion 2

Mål: Förståelse för helheten samt rimlighet. Ska leda till förståelse för multiplikation av bråk.

Använd elevlösningar på uppgift 17 på förtestet som diskussionsunderlag. Hur har personerna som löst uppgifterna tänkt? Vilka lösningar är korrekta och vilka är det inte?

Om jag hittar ett lämpligt matematiskt problem med nära anknytning till elevernas vardag så tar vi in det som avslutning.

Bilaga 15 Uppgift att definiera täljare och nämnare i årkurs 9

Bråk-uppgift (definiera nämnare och täljare)

I gruppen ska ni diskutera hur man kan definiera vad täljaren respektive nämnaren står för i ett bråk med hjälp av exemplet

$$\frac{3}{4}$$

Ni tar utgångspunkt i de förslag på förklaringar ni hittar i tabellen. Ni väljer sedan ut en förklaring ni är nöjda med eller formulerar en egen.

Testa även er förklaring på andra bråk exempelvis 1/4, 7/15, 5/3.

Fundera också på om den fungerar både när det gäller del av helhet, del av antal och som tal på en tallinje.

$$\frac{3}{4}$$

Vad betyder 3:an?	Vad betyder 4:an?
3:an betyder hur många av den hela du har	Hur många delar hela består av
Har du tex en figur med fyra olika områden, så är 3 områden ifyllda	Medan ett område är tomt
Hur stor del är den hela	Hur stor delen är
Hur stor del av nämnaren det är	Hur stor delen är totalt
Att man har tre delar av fyra i detta fallet	Hur många man vill ha
Hur många antal delar det är	Hur många antal delar det finns totalt
Man kan säga att $\frac{3}{4}$ (gjort en pil till trean) det är hur många delar du har	Man kan säga $\frac{3}{4}$ (gjort en pil till fyran) det är hur stor eller hur många delar som får plats
Den visar hur många delar som ”används”	Den visar hur många möjligheter det finns. Eller hur mycket som det finns.
Hur många man ska dela	Hur mycket det finns
3an är summan du har	4an är hela
Hur många delar man vill ha ut av det hela (kan även översättas till procent)	Det tal man utgått ifrån och anser vara 100%
Täljaren betyder hur många bitar som är rörliga	Nämnaren är det fasta talet och det är så många bitar du har
Hur många delar av en yta man har skuggat	Hur många delar ytan är uppdelad i
Det är tre delar av fyra möjliga	Det är hur många delar det finns
3 är mörka/3 ifyllda	Och 4 är vita/ inte ifyllda
Att 3 delar är borta	Det är 4 delar
3:an betyder hur många som är färglagda	4:an betyder hur många rutor som finns
3:an betyder att det är 3 bitar av 4:a.	4:an betyder att det är en sak som är delad på 4 delar
3 stycken	4 delar
Att det är 3 stycken målade utav 4	Att det finns 4 i själva uppgiften
3 delar av	En fjärdedel
Hur många delar det är	Hur många det finns
Det betyder att man tar 3 st från 4:an	Det betyder att man har 4 bitar från början.
Att tre stycken bitar av 4 är mörka	Att det är 4 bitar totalt
3:an betyder 3 mörka av nånting	Fyra bitar
Det betyder att det är 3 av 4 bitar som är skuggade eller nånting	4:an betyder hur många bitar de e.
3 stycken	4 delar
Hur mycket som är uppdelat	Hur mycket som är ifyllt
Tredje	Fjärde
Hur många delar är det	Vilken form är det
Hur många delar det är	Vilken form av del det är
3:an betyder att det t ex är skuggat på 3 delar	4:an betyder att t ex tårtan bara har 4 bitar
Det betyder hur många ifyllda rutor	Den säger hur många rutor det finns
3 stycken	Fjärdedelar

Bilaga 16 Additionsuppgifter i årskurs 9

Addition av bråk

Gemensam uppgift i klassen

Uppskatta storleken av: 12/13 + 7/8

Alternativ: 1, 2, 19, 21

Alla får chans att först tänka själva och skriva ner sitt svar. Därefter diskuterar man med grannen och motiverar sitt/sina svar. Slutligen diskuterar vi uppgiften i helklass.

Gruppuppgift

Alla i gruppen ska vara beredd att redogöra för ert resultat i helklassdiskussion – så det är viktigt att alla har förstått vad ni kommit fram till.

Vilket av nedanstående bråk är summan av: 3/5 + 1/5

4/25 4/10 4/5 3/10

Motivera för varje bråk (med bilder eller text) varför det är rätt eller fel.

(Ha rimlighet och definitionen av nämnare och täljare i bakhuvudet när ni löser uppgiften)

Vilket av nedanstående bråk är summan av: 3/5 + 1/4

4/9; 17/20; 4/20; 3/20

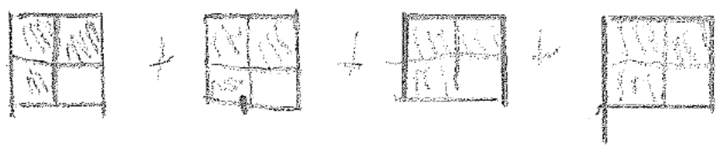
Motivera för varje bråk (med bilder eller text) varför det är rätt eller fel.

(Ha rimlighet och definitionen av nämnare och täljare i bakhuvudet när ni löser uppgiften)

Bilaga 17 Multiplikationsuppgift i årskurs 9

Beräkna $4 \times \frac{3}{4}$. Visa med bild och/eller text hur du kommer fram till ditt svar.

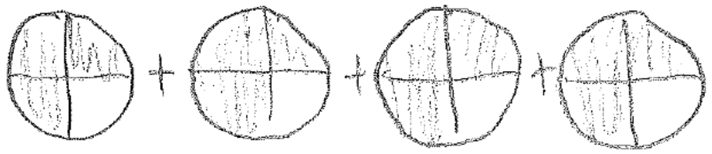
Lösning 1.



$= \frac{12}{4}$

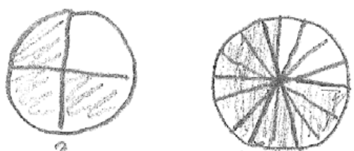
Lösning 2.

$\frac{12}{16} =$



Lösning 3.

$4 \times \frac{3}{4} = \frac{12}{16}$



$\frac{3}{4}$ $\frac{12}{16}$

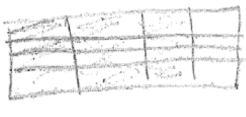
betyder fortfarande lika mycket bara att $\frac{3}{4}$ är förenklat.

Lösning 4.

$4 \times \frac{3}{4} = \frac{12}{4}$ jag gångar bara det översta för att sedan få fram svaret.

Lösning 5.

$4 \cdot \frac{3}{4} = \frac{12}{16}$



I bilden delar jag upp fjärdedelarna i fyra och får då 16 delar. Eftersom jag hade [illegible]