GÖTEBORGS UNIVERSITET

Because you know I’m all about that base!

En litteraturstudie om talsystem och talbaser

Vo Thanh Cong & Erik Johansson

Ämneslärarprogrammet, MA/FY

Titel:	Because you know I'm all about that base! En litteraturstudie om talsystem och talbaser.
Författare:	Vo Thanh Cong & Erik Johansson.
Termin/år:	HT/2017.
Kursansvarig institution:	Matematiska Vetenskaper.
Examensarbete:	15 hp.
Kurs:	LGMA2G.
Nivå:	Grundnivå.
Handledare:	Johanna Pejlare.
Examinator:	Laura Fainsilber.
Kod:	HT17-3001-004-LGMA2G.

Nyckelord: Positionssystem. Talbas. Talsystem. Matematikdidaktik. Matematikhistoria. Undervisning.

Sammanfattning

Denna litteraturstudies syfte är att undersöka talsystem, positionssystem och olika talbaser ur ett matematiskt, matematikhistoriskt och didaktiskt perspektiv. Målet är att få fördjupade kunskaper kring relevansen av talsystem och talbaser, samt dess betydelse för svensk matematikundervisning. Studien definierar de tre kategorier vilka talsystem brukar delas upp i för att därefter presentera hur kategorierna använts och utvecklats genom historien. Vidare berättas hur talsystemet och talbasen slutligen skulle nå till Sverige. Därefter görs en jämförelse i hur svenska styrdokuments mål kring talsystem och talbaser har utvecklats. Studien kopplar också de matematiska kunskaperna till aktuella styrdokument i svensk grundskola och gymnasium. En analys görs av populära läromedel för att ge perspektiv kring hur talsystem och talbaser undervisas idag. Avslutningsvis redovisas elevers svårigheter och konsekvenser av svårigheterna, tillsammans med förslag för att underlätta undervisningen.

Key words: Positional notation. Radix. Numerical notation. Mathematics didactics. History of mathematics. Education.

Abstract

This literature study aims to review numerical systems, the positional system and radices from the mathematical, historical and didactic perspectives. The goal is to gain further knowledge of the significance of different numerical systems and mathematics education, especially in Sweden. The study first shows the definitions and three categories in which numerical systems are classified based on their number-creating operations. The development of different numerical systems is then summarized with respect to the regional and historical perspective. In the next part, the Swedish mathematics education, in relation to the positional system and radices, is particularly presented. In order to how Swedish students are taught and have been learning the topic, the study provides a shorter analysis with a closer look on the Swedish curriculum and common teaching materials that are used by primary and secondary schools. Last but not least, probable students'difficulties regarding the positional system are determined along with proposals for solutions respectively.

Förord

Vi vill passa på att tacka vår handledare Johanna Pejlare som ställt upp med idéer och vägledning i långa möten. Framförallt vill vi tacka henne för hennes flexibilitet tillsammans med viljan att utmana och stötta oss i arbetet med konstruktiv återkoppling tills slutresultatet var nått. Vi vill även tacka NCM, Nationellt Centrum för Matematik, som med öppen dörr gett värdefulla råd och tillgång till relevant litteratur. Slutligen vill vi tacka våra familjer som stöttat oss genom hela processen.

/ Vo Thanh Cong
Erik Johansson

Innehållsförteckning

1 Introduktion

Matematikämnet diskuteras dagligen och satsningar sker med täta intervaller. Trots detta verkar det ge minst sakt milda resultat. I årskurs nio är just matematik det ämne som elever oftast har underkänt i (Skolverket, 2017c), vilket hindrar dem att nå gymnasienivå. I Skolverkets rapport 461 (Skolverket, 2017b) beskrivs att drygt 30% av eleverna i de yrkesförberedande programmen inte klarar kursen matematik 1. Skolverket fortsätter med att beskriva att kursen matematik 2b ofta hindrar elever från att få sin gymnasieexamen på högskoleförberedande program. Vidare beskriver Skolverket att det är lika stort bekymmer oavsett kön eller bakgrund.

I arbetets början diskuterade vi hur vi skulle kunna förbättra denna trend och vi frågade oss själva vad vi upplevt saknas i klassrummet. Diskussionen ledde oss till hur det decimala systemet upplevs självklart i viss mening, att de tio siffrorna är ”allsmäktiga” och inte går att ifrågasätta. Samtidigt upplevs talsystem och talbaser otydliga, vilket märks tydligt hos elevers svårigheter. Vår samlade empiriska erfarenhet pekade därmed på att det, oavsett elevgrupp, saknas grundläggande kunskaper inom talsystsemens egenskaper och i arbete med dessa.

1.1 Syfte & frågeställningar

Denna litteraturstudies syfte är att undersöka positionssystemet och olika talbaser ur ett matematiskt, matematikhistoriskt och didaktiskt perspektiv. I studien besvaras följande frågeställningar:

Hur definieras talsystem och talbaser?

Hur har talsystem och talbaser utvecklats historiskt?

Hur undervisas talsystem och talbaser i svensk skola idag utifrån utvalda läromedel?

Hur främjar undervisningen om talbaser elevernas förmågor utifrån styrdokumenten?

Vilka svårigheter kan elever uppleva i arbetet med talsystem och talbaser?

1.2 Material och metod

Denna litterturstudie har baserats på litteratur som har hittats från databaserna Google-Scholar, Summon, GUPEA, NCM, och Eric. De sökord som använts har anpassats beroende på behandlat innehåll. Exempelvis har följande sökord använts för att hitta texter relevanta till kapitel fyra: ”positional number system”, ”positionssytem”, ”definitions”, ”talbaser”, ”radices”, ”hybridsystemet”. Med hjälp av sökord kunde databaserna lista relevanta böcker eller artiklar. Eftersom mycket matematikhistoriska texter återfinns i böcker blev flera besök på bibliotek naturligt. Aktuell litteratur hittades med hjälp av sökmotorn Libris och bibliotikarier. Texterna valdes utifrån frågeställningarna. Därefter gjordes en systematisk bedömning av studiernas validetet genom ett källkritiskt förhållningssätt rekommenderat av Göteborgs Universitetsbibliotek (2017). Frågorna som skulle besvaras var:

i) Vem är upphovsman?
ii) Vilket syfte har innehållet?
iii) För vem är materialet skrivet?
iv) Hur aktuell är informationen?
v) Hur trovärdigt är innehållet?

Efter att relevant litteratur identifierats och studerats, fortsatte sökningen med att granska texters referenslista. Vidare texter hittades och när dessa listor var genomgångna ansåg vi oss ha tillräckligt med litteratur att arbeta med. Genom att identifiera vilka källor som använts kunde det dessutom hjälpa oss i vår värdering av källans är tillförlitlighet.

Med anledning av att en del av behandlad litteratur skrivits på engelska, och studien redovisas på svenska, behövdes flera översättningar av nyckelord. Översättningsmetoden genomfördes genom att söka publicerade artiklar på svenska vilka definierar eller beskriver nyckelorden på ett liknande sätt. Tabell 1 nedan sammanfattar nyckelord som har översatts.

Tabell 1: Nyckelord med motsvarande översättningar

Engleska	Svenska	Källor på svenska
Numeration systems	Talsystem	(McIntosh, 2014a)
Positional number system	Positionssystem	(McIntosh, 2014a)
Non-positional number system	Teckenvärdesystem	(Nationalencyklopedin, 2017)
Positional notations	Notationer i positionssystemet	(McIntosh, 2014a)
Additive numeration systems	Det additiva systemet	(Fredriksson, Larsson, & Torstensson, 2014)
Hybrid numeration systems	Hybridsystemet	(Fredriksson, Larsson, & Torstensson, 2014)
String	Teckensträng/Lista	(ComputerSweden)

Översättningprocessen var inte smärtfri. Vissa ord skulle kräva noggrant sökande, samt diskussioner där exempelvis termen ”string” var problematisk. Motsvarande ord på svenska skulle vara ”teckensträng”. Teckensträng har därmed använts för att mena en ordnad följd av tecken (ComputerSweden). Men ”string” skulle även kunna mena”lista” utifrån våra egna erfaranheter inom datatekniken. Eftersom det finns en tillförlitlig källa med tydlig definition av ”teckensträng”, använder vi termen ”teckensträng” med samma betydelse som ”string”.

I studien genomfördes även en undersökning av populära läroböcker i matematik för att överskåda hur talsystem och talbaser generellt undervisas på grundskolan och gymnasiet i Sverige. Eftersom vi är blivande gymnasielärare som ska ha behörighet att undervisa på högstadienivå och gymnasienivå valdes läroböcker från och med årkurs sju. De fem böcker som valdes är Matte Direkt 7, Matte Direkt 8, Matte Direkt 9 (Carlsson, Hake, & Öberg, 2012), Exponent 1a och Exponent 1c (Gennow, Gustafsson, & Silborn, 2011). Övriga läroböcker i tidigare årkurser är naturligvist intressanta, dock uppfyller de inte vårt praktiska behov. Enligt centrala innehåll (Skolverket, 2011a), undervisas talsystemet, positionssystemet och talbaser inte från matematik 2 på gymnasiet, vilket slutligen begränsade vårt undersökningsområde mellan grundkolans årkurs 7 och matematik 1 på gymnasiet.

Matte Direkt 7, 8, och 9 valdes med hjälp av statistik från Göteborgsregionens kommunalförbund. Vi kontaktade avdelningen GR Utbildning Läromedel gällande vilka läromedel som säljer bäst. Personalen återkom med säljstatistik för de böcker som sålts under 2017 (se bilaga). För högstadiet återfinns serien Matte Direkt oftast i tabellen. Exponent-serien valdes efter samtal med Nationellt Centrum för Matematikutbildning (NCM).

Trots att vårt huvudsakliga intresse är elever på högstadiet och gymnasiet, inkluderades även elever i yngre åldrar. Det gjordes med bakgrunden att studien behandlar litteratur om elevers svårigheter och lösningsförslag. För att kunna hjälpa elever måste en lärare, oavsett på vilken nivå, ta reda på det ursprungliga problemet. Missuppfattningar om exempelvis positionssystemet upptäcktes inte först vid högstadiet utan barnen har med stor sannolikhet haft problem sedan tidigare (Skolverket, 2017a). Undervisning i talsystem, positionssystem och talbaser, väger dessutom tyngre på grundskolenivå än på gymnasienivå, enligt det centrala innehållet (Skolverket, 2011a). Sådeles finns forskning som undersöker grundskolans elevers svårigheter, och ger förslag för förbättring. Mångfald i forskning bildrar till en mer komplett förståelse om varför elever har svårt att lära sig det specifika arbetsområdet.

2 Definitioner

Kapitlet kommer att förklara begreppen additivt-, hybrid- samt positionssystem och lista deras egenskaper och därutöver ge konkreta exempel. Dessutom kommer relevansen av talbaser i systemen motiveras.

2.1 Talsystemet i tre kategorier

Talsystem är ett system som används för att representera tal (Guedj, 1997, s. 26). Ett tal kan representeras muntligt eller skriftligt. Att namnge ett tal och uttala namnet är den muntliga representationen av talet. Att skriva ett tal med bokstäver eller notationer är den skriftliga representationen av talet. Det finns många system som används för att representera tal skriftligt. Forskare inom matematikens historia klassificerar de skriftliga systemen i tre kategorier. Dessa kategorier baseras på de aritmetiska operationer som används för att skapa tal utifrån notationer. Kategorierna är additiva talsystem, hybridsystem och positionssystem (Guedj, 1997, s. 39).

Ett additivt talsystem är ett system där tal skapas med hjälp av att addera alla tecken i talet (Guedj, 1997). Den ursprungliga formen av det romerska systemet är ett exempel på det additiva systemet. Romarna använde sju symboler I, V, X, L, C, D, M för att representera ett, fem, tio, femtio, ett hundra, fem hundra och ett tusen. I den ursprungliga versionen beror inte notationernas värde på deras positioner. Ett tals värde är summan av symbolernas värde. Till exempel, talet CCC är etthundra adderat med etthundra adderat med etthundra vilket resulterar i trehundra.

I boken *Numbers: The universal language*, påpekar Guedj (1997) två huvudsakliga begränsningar av additiva system. Den första är begränsningen i att beskriva stora tal. Den andra är bristen på korrelation mellan ett tals längd och dess värde. För att beskriva ett stort tal måste notationer upprepas flera gånger, eller så måste en helt ny notation skapas. Upprepningen kräver tid och kraft för att skrivas samt kan orsaka missuppfattningar. Till exempel behövs 3 upprepningar för att skriva trehundra trettiotre (CCCXXXIII) i det romerska systemet. Det är också lätt att tecknet I missas i talet. Att utveckla en helt ny symbol är inte heller effektivt. Det tar lång tid för att en befolkning kan vänja sig med en ny notation. Utöver den första begränsningen finns en brist i att ett tals värde inte har någon relation till dess längd/ storlek. Exempelvis märks att talet CCCXXXIII är längre än talet M. Dock är värdet hos CCCXXXIII (trehundratrettiotre) mycket lägre än hos M (ettusen).

Vidare gällande hybridsystem är symbolers värde är oberoende av sina positioner, men deras placeringar kan däremot ange vilken operation som ska användas (Guedj, 1997, s. 42). Ett exempel är det klassiska kinesiska talsystemet (Fredriksson, Larsson, & Torstensson, 2014). Symbolen 三 betyder tre och tecknet 十 betyder tio. Talet 三十 beräknas som tre multiplicerat med tio, trettio, medan talet 十三 beräknas som tio plus tre, vilket blir tretton.

Hybridsystem är mer effektivt än additiva system i vissa avseenden. Exempelvis kan stora tal uttryckas på ett effektivare sätt tack vare multiplikationsegenskapen. I stället för att skriva notationer upprepade gånger, likt det romerska systemet, kan stora tal i det kinesiska systemet skrivas mycket effektivare. Romarna behövde exempelvis sex notationer (XXXIII) för att skriva trettiotre medan kineserna endast behövde tre (三十三).

Både additiva system och hybridsystem är teckenvärdesystem (Nationalencyklopedin, 2017) där symboler behåller sina värden oavsett deras positioner i ett godtyckligt tal. Även om hybridsystemet erbjuder lösningen till problematiken angående stora tal, finns det tyvärr två problem som varken hybridsysteme eller teckenvärdesystem kan lösa. Det första problemet är att talets längd och värde i teckenvärdessystemet (Guedj, 1997, s. 48). Ett nytt problem är att teckenvärdessystem har svårt att reflektera ett tals egenskap, vilket är den obegränsade mängden tal. I teckenvärdesystem måste nya notationer uppfinnas för att beskriva tillräckligt stora tal. Att symboler inte kan återanvändas för att representera större tal är en stor begränsning när ett stort tal behövs (Guedj, 1997, s. 42).

För att få bort denna begränsning finns en tredje kategori av talsystem; positionssystemet. Jämfört med tidigare nämnda teckenvärdesystem är symbolernas värde i positionssystemet beroende av sina positioner (Guedj, 1997, s. 46). Det vill säga att om samma notation placeras i olika positioner i ett tal ska notationen ha olika värden. Till exempel, ändras värdet av notationen 3 i talet 333 i det vanliga decimala talsystemet efter notationens position. Från vänster till höger, motsvarar den första positionen hundratalet, den andra positionen motsvarar tiotalet och den sista positionen entalet. Talets värde kan även representeras med hjälp av de två aritmetiska operationerna multiplikation och addition (Guedj, 1997, ss. 46-47). I exemplet ovan kan talet trehundratrettiotre beräknas enligt $3 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 3 \cdot 1$.

Enligt Guedj (1997, s. 48) kallas symbolerna för siffror och innehöll nio siffror 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 från början. När idén om ett samband mellan siffror och positioner dök upp, kunde en tom plats inte beskrivas med tidigare nämnda siffror. Detta gav plats för den tionde siffran 0, vilken kom till att representera tomma positioner. Bara när både de förstnämnda siffrorna och siffran 0 är på plats, kan positionssystemet ses som komplett.

De två största fördelarna med detta system är att (Guedj, 1997, ss. 48-51)

i. De tio siffrorna kan återanvändas och kan därmed representera alla tal - en obegränsad kapacitet.

ii. Antalet symboler kan reflektera talets värde.

På grund av fördelarna har positionssystemet utvecklats och används även idag. Hur positionssystemet utvecklats och använts under matematikens historia ska presenteras under rubrik tre senare i uppsatsen. I nästa avsnitt presenteras mer detaljerat positionssystemets struktur.

2.2 Talbaser och teckensträngar är grunden till positionssystemet

Ett positionssystem bygger i första hand på en talbas, vilket är ett godtycklig naturligt tal som är större än 1 (Glaser, 1971, s. 7). I denna uppsats, används bokstav b för att representera en godtycklig talbas. Talbasen b använder en mängd av naturliga tal som består av $\{0, 1, 2 \dots (b-1)\}$. Symbolen a_k används för att representera en godtycklig symbol i mängder. När notationerna placeras i en bestämd ordning bildas en teckensträng (Glaser, 1971, s. 8) och bokstaven k i notationen a_k visar vilken position av notationen har i teckensträngen. En teckensträng i talbasen b representera vilket tal som helst i positionssystemet och symboliseras som följande $(a_k a_{k-1} \dots a_2 a_1 a_0)_b$. Talets värde beräknas med hjälp av de aritmetiska operationerna i formeln nedan.

$$(a_k a_{k-1} \dots a_2 a_1 a_0)_b = a_k \cdot b^k + a_{k-1} \cdot b^{k-1} + \cdots + a_2 \cdot b^2 + a_1 \cdot b^1 + a_0 \cdot b^0 \qquad (1)$$

Formeln kan förkortas till

$$(a_k a_{k-1} \dots a_2 a_1 a_0)_b = \sum_{k=0}^{k} a_k \cdot b^k \qquad (2)$$

Flera exempel av positionssystemet har dokumenterats (Glaser, 1971; Guedj, 1997; Knuth, 1997). Vårt decimala talsystem är ett specifikt fall i positionssystemet, där $b = 10$ och siffrorna består därmed av $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Talet $(456)_{10}$ motsvarar $4 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0$. Ett annat populärt exempel är det binära systemet, där $b = 2$, och siffrorna endast består av $\{0,1\}$. Talet $(1101)_2$ motsvarar $1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$, vilket är ekvivalent med talet $(13)_{10}$ i decimalsystemet.

Definitionen som presenterades av Glaser (1971, s. 8) ovan gäller bara för heltal. För att representera reella tal införs ett tecken för att skilja mellan heltalsdelarna och bråkdelarna (Knuth, 1997). I decimalsystemet heter tecknet decimalpunkt och symboliseras i Sverige av ett kommatecken. Binära talsystemets notationer kom senare kring 1600-talet (Glaser, 1971, s. 14). För att anpassa till binära talsystemet kallades kommatecknet för binärpunkten och symboliseras i Sverige också av ett kommatecken (Chalmers Teknologiska Universitet, 2008)

Formel *(1)* kan utökas med hjälp av att lägga till ett kommatecken i teckensträngen $(\dots a_2 a_1 a_0, a_{-1} a_{-2} \dots)_b$. Sådeles kan ett rationellt tal i ett godtyckligt positionssystem representeras (3) (Knuth, 1997)

$$(\dots a_2 a_1 a_0, a_{-1} a_{-2} \dots)_b = \cdots + a_2 b^2 + a_1 b^1 + a_0 b^0 + a_{-1} b^{-1} + a_{-2} b^{-2} \dots \qquad (3)$$

Till exempel, talet $(45{,}6)_{10}$ kan uttryckas i summan av $4 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0 + 6 \cdot 10^{-1}$. På liknade sätt kan talet $(11{,}01)_2$ beräknas som $1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2}$, vilket motsvarar $(3{,}25)_{10}$ i decimalsystemet.

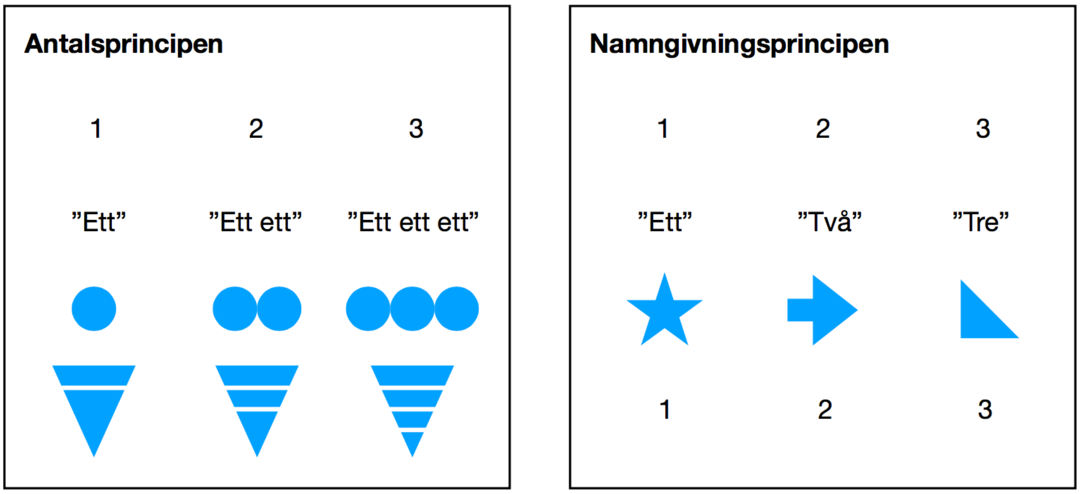
3 Historia

”För att gå framåt behöver vi blicka bakåt” är en välanvänd och klassisk fras som är relevant för studien. Denna del av arbetet reovisar hur utvalda regioners talsystem och talbaser fungerat och utvecklats. Talsystemen behandlas utifrån den region de tillhör och presenteras med hänsyn till dess egenskaper, tecknens utveckling och vilka influenser som kan ses idag. Framställningen syftar till att motivera hur de utvecklas efter behov och intresse, samt hur det kommer sig att vi nyttjar det positionssystem vi har idag.

3.1 Tal synliggörs av människan

Matematiken föddes i sökandet efter förklaringar av världen; för att förstå verklighetn och hur fenomen hänger ihop. Likt djuren tros människan först ha kunnat tolka kontraster, skillnad mellan exempelvis doftande blommor, raka pinnar eller runda stenar. Allt eftersom människan utvecklades växte ett abstrakt tänkande och likheter mellan objekt blev tydligare. Objekten kunde sedan sättas samman med hjälp av egenskapen som idag kallas *tal*. Utvecklingen skedde långsamt och människan fick behov att kunna uttrycka den nya tal-egenskapen. Detta kunde ske på många olika sätt; via tecken, fysiska objekt eller den tillförlitliga metoden att använda kroppsdelar (Boyer & Merzbach, 2011, ss. 9-10). Människan använde sig alltså av ett *bijektivt tänkande* för att räkna ihop mängder (Ifrah, 2001, ss. 34-35), att för varje fysiskt ting hitta ett motsvarande objekt.

Det finns tydliga bevis på att när människan först började använda matematisk skrift, så kallad *notation*, var det för att antingen dela med sig av information eller helt enkelt dokumentera objekt (Boyer C. B., 1944, s. 153). Funna exempel är ristningar i ben; där exempelbis djur i boskap parades ihop med samma antal ristningar. Metoderna kunde dock snabbt bli klumpiga och svårhanterliga vid större mängder, varför en *namngivningsprincip* började ersätta den tidigare *antalsprincipen* (Ifrah, 2001, s. 49).



Figur 1: Egenhändigt exempel på visuell representation över de två principer

Enligt *antalsprincipen* skapas en representation för varje enhet eller objekt, både i tal och i skrift. Enligt den senare principen uttrycks ett tal med någon form av tecken eller symbol, exempelvis en gest. Detta möjliggjorde att människan lättare kunde uppfatta större tal och födde till slut tanken att dela in tal i grupper i olika storleksordningar, vilket gav oss det första talsystemet. Beroende på var i världen människan befann sig utvecklades olika system och tekniker efter behov (Ifrah, 2001, ss. 49-51). I vidare text kommer studien sammanfatta den historiska utvecklingen av talsystemen inom några olika utvalda kulturer.

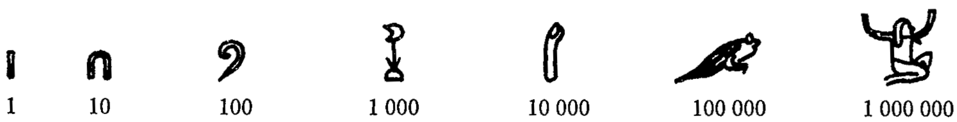
3.2 Forntida Egypten

Egypten var en idyllisk plats för människor att bosätta sig på under antiken. Med ett behagligt klimat tillsammans med floden Nilen flödandes genom landet fanns goda förhållanden för lantbruk. Egypten hade få grannar att oroas över tack vare läget med öknarna runt om, så samhället kunde utvecklas ostört och endemiskt. Antikens Egypten enas mellan 3500 och 3000 f. Kr. under en regent och deras första dynasti kommer igång tillsammans med deras storhetstid (Kline, 1972, s. 15).

Det är från första dynastins tid ett välutvecklat skriftspråk först hittas; den skrift som användes kom till att kallas *hieroglyfskrift*, en bildskrift som kunde skrivas uppifrån och ned eller från vänster till höger beroende på vad tecknaren önskade (Johansson, 2013b, s. 31). Hieroglyfskriften hittade sin plats på exempelvis tempelväggar och konstföremål medan en mer vardaglig skrift, *hieratiska skriften*, antecknades på sköra papyrus med hjälp av ett strå eller växt och bläck. Med tanke på att papyrus skapades från växter har de inte alltid åldrats väl och mycket matematisk dokumentation har gått förlorad. Dock har två klarat sig väl och har använts flitigt vid studier; *Rhindpapyrusen* och *Moskvapapyrusen*. De är båda uppskattade från 1700 f. Kr. och består av matematiska problem med lösningsförslag (Kline, 1972, s. 16).

3.2.1 Talsystemets egenskaper

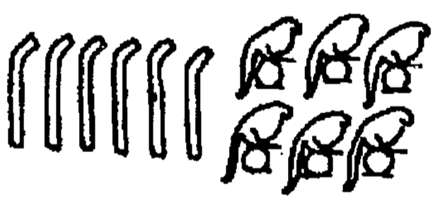
Egyptierna nyttjade en strängt decimal bas, med andra ord bas tio, med en additiv egenskap. Vidare var det egyptiska talsystemet inte beroende av position, och kan därmed klassas som ett additivt system (Ifrah, 2001, ss. 242-248).



Figur 2: Stilisering av tal i hieroglyfskrift. Från vänster ses ett lodrätt streck, en grepe/ hästsko, ett ihoprullat rep, en lotusblomma, ett finger, ett grodyngel och en knäböjande ande (Ifrah, 2001, ss. 246, 489).

Den additiva egenskapen nyttjades för att bilda ytterligare tal som inte hade en egen symbol. Med tanke på att tecknen även hade ett utsmyckande syfte och ofta fanns på byggnader och pelare kunde de till och med skrivas vertikalt. De följde omgivningen och tecknen kunde även vändas i den riktning texten var menad att läsas (Johansson, 2013b, s. 32). Gemensamt, oavsett riktning, är att systemet utvecklades till att oftast börja med tecken med högst värde för att fortsätta i sjunkande ordning ned till entalen (Ifrah, 2001, ss. 247-248). Nedan i figur 3 samt figur 4 ges exempel på hur tal skulle kunna se ut i hieroglyfskrift.

Figur 3: Talet 276 stiliseras. (Ifrah, 2001, s. 276)



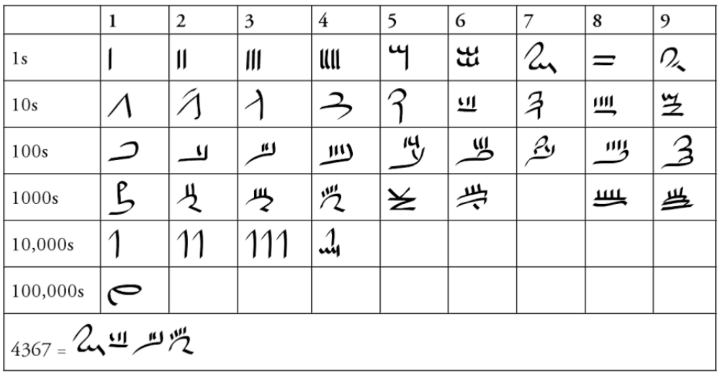
Figur 4: Talet 660 000 avbildas. (Ifrah, 2001, s. 276)

En tydlig problematik, enligt vår definition av additiva teckenvärdessystem, är att skriva ut flera större tal. En miljon kunde smidigt skrivas ut med ett tecken, medan 999 999 skulle behöva femtiofyra tecken. McLeish (1994, ss. 49-50) diskuterar även avsaknaden av "noll". Genom att ha tal för ental, tiotal, hundratal… där ordningen spelade liten roll menar han att nollan i viss mening blev onödig. Han påpekar att systemet hade andra styrkor i bland annat bråkräkning, vilket redogörs för nedan.

3.2.2 Tecknens utveckling

Varför de hieroglyfiska notationerna avbildar exempelvis en lotusblomma eller ett finger är inte känt, dock menar Ifrah (2001, ss. 249-250) att en teori kan vara att inspiration hämtats från fysiska objekt som tidigare använts för räkning.

Kring 2000-talet f.Kr. utvecklades den hieratiska skriften av praktiska skäl i det vardagliga arbetet hos arbetare och matematiker. Till en början var de enbart en förenkling av hieroglyfer men skulle senare byggas upp av att varje stavelse hade en egen geometrisk symbol, ett ideogram. Hieroglyferna skulle dock fortfarnde användas för att pryda byggnader med mer (Kline, 1972, ss. 15-16). Egyptierna tog tillfället i akt att utveckla ett påtagligt förenklat talbeteckningssystem, tack vare att de introducerade fler tecken (Ifrah, 2001, s. 257). I figur 6 beskrivs även hur talet 4367. Genom att använda den additiva egenskapen behövdes enbart fyra tecken. Jämfört med hieroglyfskriften, vilken skulle behöva tjugo tecken, är det en klar effektivisering.



Figur 6: Stilisering av de hieratiska taltecknen, vilka används i Rhindpapyrusen och Moskvapapyrusen (Chrisomalis, 2010, s. 57).

Johansson (2013b, s. 36) berättar att egyptierna lyckades också att uttrycka bråk i exakt form. De gjorde detta med hjälp av att summera ihop *stambråk*, bråk som alltid består av täljaren ett. I hieroglyfskriften skrevs tecknet *ro* för att beteckna ett stambråk, medan de i den hieratiska skriften skulle noteras med en punkt ovanför (Kline, 1972, s. 17), se figur 5.

Figur 5: Johansson (2013b, s. 37) noterar stambråket 1/8 med hieroglyfer (vänster) och hieratisk skrift (höger).

3.2.3 Beräkningar

Bland de få källor om egyptisk matematik är alltså Rhindpapyrusen och Moskvapapyrusen de främsta källorna. Föreliggande studie kommer utgå från Rhindpapyrusen, som består av 87 matematiska och vardagliga problem. Den är ursprungligen skriven i hieratisk skrift av Ahmose runt 1650 f.Kr. (Johansson, 2013b, ss. 33-34).

Rhindpapyrusen pekar på att en additionstabell, som även användes som en subtraktionstabell, var vanlig. Det fanns även tabeller för stambråk (McLeish, 1994, s. 52). Egyptierna kunde dock beräkna addition och subtraktion genom att enbart addera eller subtrahera symboler. De additiva processerna kunde även ses i hur multiplikation och division arbetades. För att se processen och tabellen kan läsaren studera exemplet nedan, en uppgift från Rhindpapyrusen där 13·14 beräknas (Kline, 1974, s. 16–17; Thompson, 1996, s. 28–29).

/	1	14
	2	28
/	4	56
/	8	112
		Summa 182

Uppgiften läses från höger till vänster och vad som syns är hur egyptierna eliminerade behovet av att minnas multiplikationstabeller. Tabellen byggdes upp med successiv fördubbling genom att utgå från multiplikanden, fjorton, i högra kolumnen för att i vänstra utgå från ett. Båda kolumnerna dubblerades tills talen i vänstra kolumnen kunde adderas till multiplikatorn, 8+4+1=13. Därefter markerades de tal i vänstra kolumnen som adderas multiplikatorn. Motsvarande tal i högra kolumnen adderades och gav svaret 14 + 56 + 112 = 182. Liknande metod kunde appliceras på division, där multiplikatorn söktes istället (Thompson, 1996, ss. 28-29).

3.2.4 Influenser idag

Många influenser finns onekligen från forntida Egypten. Läsaren känner säkert till greken Pythagoras som utvecklade teorin om rätvinkliga trianglars sidor. Med inspiration från den egyptiska 3:4:5-triangeln skapade han denna teori som ofta dyker upp i diskussioner kring matematik (Violatti, 2013). Frågan vi ställer oss är om det finns spår från Egyptens talsystem som fortfarande används idag? Mest uppenbart är att de räknade med liknande decimala system vi använder idag i Sverige. Det skulle dock vara en förhastad slutsats att beskriva idén som egyptisk då flera regioner naturligt arbetade med basen tio på grund av handens tio fingrar (Ifrah, 2001, ss. 54-55, 74).

En tydlig koppling som kan hittas idag är hur metoden för additiv multiplikation, som beskrivs tidigare, kan liknas med det binära systemet. De insåg att varje heltal kunde bildas genom addition av, vad vi idag kallar, binära tal. Idén används flitigt i dagens datorteknik (McLeish, 1994, s. 52). Datorerna nyttjar denna additionsprincip för att snabbare göra beräkningar i deras ROM, eller liknande mjukvara, vilket leder till kommandon (McLeish, 1994, ss. 244-246).

Egyptierna påverkade även grannregionen Grekland både med ytterligare matematiska idéer och kulturella inslag. En hieratisk notation samt skrift skulle övertas och modifieras av grekerna (Johansson, 2013b, s. 33) som senare fortsatte utveckla matematiken från den vardagliga problemlösningen, till en mer sofistikerad del inom filosofi och argumentationsteknik (Kline, 1972, ss. 22-23).

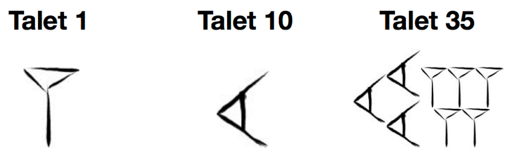
3.3 Tvåflodslandet Mesopotamien

I vad som nu kallas Irak föddes civilisationen Mesopotamien ca 4000 f.Kr. Likt Egypten var det bördiga området mellan floderna Eufrat och Tigris attraktivt och genom goda utbyten med grannländerna Egypten, Mellanöstern och Indusdalen kunde Mesopotamien utvecklas till en blomstrande civilisation. Det goda livet lockade människor från många områden, och i takt med att samhället växte behövdes en metod för att kommunicera. Det är då sumererna, den första befolkningen i Mesopotamien utvecklade lerristning. Med hjälp av lertavlor och skrivstift kunde nu informationen delas människor emellan och sparas till framtiden (McLeish, 1994, ss. 37-39). Skriften blev ett revolutionerande verktyg som främst användes för att dokumentera leveranser, inventarier eller liknande och skrevs med ett bijektivt tänkande (Johansson, 2013b, s. 8). I mitten av 2000-talet f.Kr. gjorde skriften ett markant hopp i utvecklingen då lerfigurer byttes ut mot *kilskrift.* Med hjälp av ett skrivrör börjar symbolerna markera stavelser och ord, vilket resulterar att enbart en tredjedel av de tidigare 2000 tecken används (Boyer & Merzbach, 2011, s. 27) vilket gav en större generaliserbarhet mellan de olika språken (Johansson, 2013b, s. 13).

Samtidigt som skrift generaliserades gick även notationen i samma riktning. Mellan 2000–1600 f.Kr. utvecklades, av de dåvarande regerarna babylonierna, ett talsystem på ett mer enhetligt sätt än tidigare. En markant skillnad var att de använda symbolerna började nu agera som matematiska objekt vilket innebar att begreppet *antal* kunde börja användas. Vad som utvecklades var det första positionssystemet, dock inte strikt vilket diskuteras senare. Babylonierna skulle låta systemet behålla den sumeriska sexagesimala basen, alltså basen sextio (Johansson, 2013b, ss. 14-15). Tack vare sina kunskaper inom aritmetik och algebra skulle Mesopotamien bland annat spela en betydande roll i handelns utveckling (Kline, 1972, s. 11).

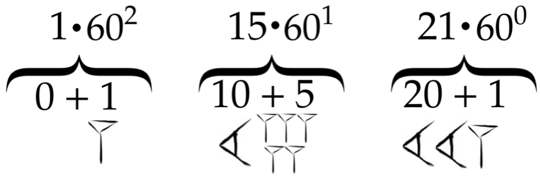
3.3.1 Talsystemets egenskaper

Nämnt ovan använde det mesopotamiska folket basen sextio. Med en stor bas nyttjades två tecken för att bygga upp större mängder; tecknen ett och tio. Systemet hade en additiv egenskap och upprepade därför siffrorna de gånger som behövdes, för att sedan addera ihop dem. Efter de första nio heltalen som byggdes upp av tecken om ett kunde siffran tio därefter avlasta innan metoden började om igen med de första nio heltalen. Kombinationen av positionsidén och den additiva egenskapen gör att talsystemet klasssas som ett hybridsystem (Thompson, 1996, ss. 45-46).



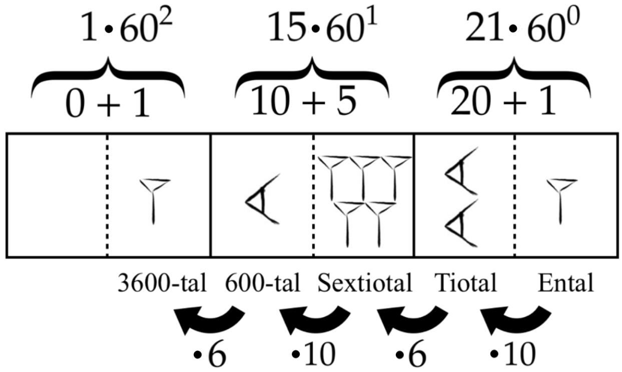
Figur 7: Egen stilisering av 3 mesopotamiska tal (Thompson, 1996, s. 45).

Skrivmetoden kilskrift skrevs från vänster till höger (Johansson, 2013b, s. 15), och för att beskriva större uttryck applicerades en icke strikt *positionsidé*, att tecknens position beskriver uttryckets storlek (Ifrah, 2001, s. 216). Det kan vara smidigt att jämföra med det moderna decimala systemet, alltså $(10^0)_{10}$, $(10^1)_{10}$, $(10^2)_{10}$, … I Mesopotamiens sexagesimala system använde potenser om sextio (Ifrah, 2001, s. 128). Exempel skulle kunna vara att omarbeta det mesopotamiska uttrycket $(1\ 15\ 21)_{60}$ till ett uttryck i decimalsystemet med bas 10: $1{\cdot}60^2 + 15{\cdot}60^1 + 21{\cdot}60^0 = (3600 + 900 + 21)_{10} = (4521)_{10}$. För att veta vilka tecken som var på vilken position menar Thompson att ett mellanrum skapades och att omgivningen, exempelvis text, fick beskriva vilken position varje teckengrupp hade (1996, s. 48), se figur 8.



Figur 8: Stilisering av hur mellanrummen beskriver vilken position som används.

Positionssystemet nämns ovan som en idé, eftersom den inte kan sägas vara strikt. Detta beror på att en tolkning skulle kunna vara att se systemet som en blandad bas med två olika uppsättningar notationer, ett och tio. En förflyttning till vänster i uttrycket ökar med en faktor tio. Ytterligare förflyttning ett steg ökar med faktor 6. Med andra ord behöver två steg tas för att antingen öka eller minska med faktor sextio (Johansson, 2013b, s. 15). Nedan finns en stilisering av talet $(1\ 15\ 21)_{60}$ i figur 9, vilket illustrerar dubbelbasen. Observera att det inte fanns några rutor eller linjer i ursprunglig skrift, utan de heldragna linjerna ska förenkla vilka tecken som är i vilken position för bas sextio. De streckade markerar var tiotal och ental skiljer sig enligt övre modell.



Figur 9: Egenkomponerad illustrering över hur det hexagesimala systemet (över) kan tolkas som en varierande bas (under).

Enligt figur 4 kan systemet enligt additionsprincipen ses nyttja bas sextio (övre modellen) och summan $(4521)_{10}$ bildas. Vid tolkning enligt en varierande bas mellan sex och tio kommer summan bli densamma, eftersom $3600 + 600 + 5 \cdot 60 + 2 \cdot 10 + 1 = (4521)_{10}$.

Tack vare att det Mesopotamiska systemets positionsidé gick uttrycket både att få större och mindre än ett (Johansson, 2013b, s. 16). Bråk skapades på samma sätt som högre potenser, fast åt höger. I systemet nyttjades inget kommatecken för att avskilja när bråkdelar skulle börja utan sammanhanget runt uttrycket fick beskriva detta. Med andra ord var det svårt att tolka positionens värde direkt från enbart uttrycket (Thompson, 1996, s. 48).

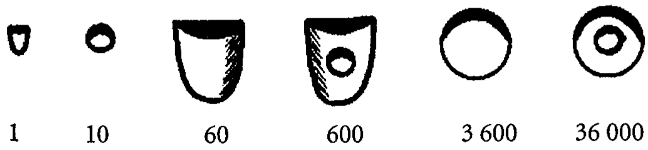
Enligt studiens definition för positionssystem i avsnitt två kan alltså det Mesopotamiska systemet generaliseras enligt följande, där a är en godtycklig notation placerad på position k.

$$a_k \cdot 60^k + a_{k-1} \cdot 60^{k-1} + \cdots + a_1 \cdot 60^1 + a_0 \cdot 60^0 + a_{-1} \cdot 60^{-1} \cdot a_{-2} \cdot 60^{-2} \ldots \qquad (4)$$

Boyer och Merzbach (2011, s. 28) menar att varför just basen sextio valdes ännu inte är bestämt. Diskussioner har varit och är heta men svaren få. De tar upp att det däremot finns flera hypoteser. En säger att basen valdes då det blev en naturlig sammanfogning mellan två tidigare system ett decimalsystem och ett med bas sex. En annan pekar på egenskaper inom astronomin. De fortsätter med att det alternativ som är mest troligt är möjligheten att dela antalet. Sextio har delarna ett, två, tre, fyra, fem, sex, tio, tolv, femton, tjugo och trettio och sextio vilket gör basen smidigt att arbeta med om något behövde delas upp.

3.3.2 Tecknens utveckling

Från början dominerade sumererna området Mesopotamien. De utvecklade taltecken runt 3200 f.kr. som ristades in i lera, precis som annan teckenskrift. De valde att etablera den varierande basen, som illustreras i figur 10 genom att bygga sina räkneord enligt denna modell (Ifrah, 2001, s. 131). De första tecknen som har hittats illustreras nedan i figur 5.



Figur 10: (Ifrah, 2001, s. 131) stiliserar olika taltecken

I samband med att kilskriften gjorde entré runt 2700 f.Kr. fick även de sumeriska tecknen en ny version. Detta berodde helt enkelt på att ett nytt skrivredskap började användas. Skrivstiftet, som hade en spetsig del samt en cirkel på andra änden, ersattes med skrivröret som enbart hade en rak egg på ena änden. När cirkeln försvann från verktyget fick exempelvis cirkel-tecknet ersättas med en polygon och skriften fick ett mer kantigt utseende. Efter lång utveckling kunde det synas tydlig skillnad på att enkelhet och snabbhet hade prioriterats över att behålla utseendet på uttrycken. Olika metoder testades för att klara av olika svårigheter vilket gav de siffror och metoder som illustreras tidigare (Ifrah, 2001, ss. 136-139).

Vidare kunde de lärda inom räknekonsten nyttja de fyra räknesätten addition, subtraktion, multiplikation samt division. De två förstnämnda ansågs oftast tillräckligt triviala för att kunna beräknas med antingen huvudräkning eller något hjälpmedel. För multiplikation eller division nyttjades en så kallad *räknetavla*. Dessa kan jämföras med vad vi idag kallar en multiplikationstabell. En räknetavla bestod av utvalda tal samt produkten av ett givet tal, u. Med hjälp av detta kunde exempelvis talet $u \cdot 34$ beräknas genom att först slå upp $u \cdot 30$ för att sedan addera med $u \cdot 4$. För division inverterades det givna talet u, dock inkluderades enbart de siffror som gav en ändligt många tecken (Johansson, 2013b, s. 18).

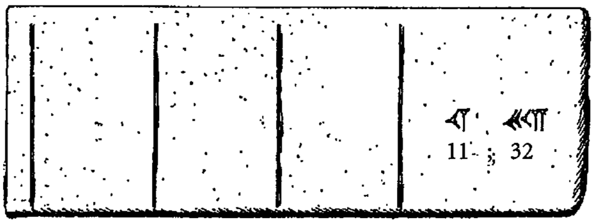
Här syns att det Mesopotamiska systemet, trots välutvecklat, hade tydlig svaghet – det fanns inget tecken motsvarande vår "nolla". Jämför vi med formel 4 kan vi tänka oss att utan sammanhang runt omkring vet vi inte vilken position tecknen är på, det skulle likaväl kunna vara ett bråk som heltal (Thompson, 1996, s. 48). För att försöka förtydliga att det enbart finns ett tomrum på en specifik position infördes en *dubbelkil,* vilken illustreras i figur 11. Detta var dock inte det enda sättet att uttrycka tomrummet, utan det har även hittats tecken föreställande olika antal krokar. Vad som är gemensamt oberoende tecken är att de enbart illustrerar den tomma positionen mellan två olika tal, och hittas därmed inte i slutet av notationer. Därför är det inte uppenbart hur mycket symbolen faktiskt underlättade (O'Connor & Robertson, 2000a).

Figur 11: Dubbelkilen som senare användes för att markera tomrum.

3.3.3 Beräkningar

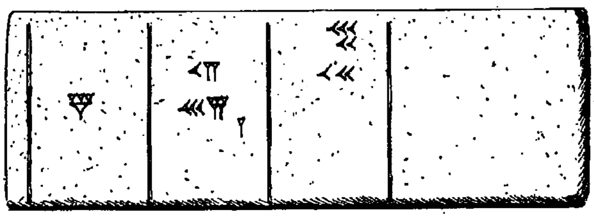
Trots att det inte hittats någon beskrivning av mesopotamiernas räknemetoder, poängterar Ifrah (Ifrah, 2001, s. 233) att det varit möjligt att rekonstruera en tolkning tack vare all dokumentation de lämnat efter sig. Han beskriver även hur lertavlorna nyttjades för att beräkna exempelvis multiplikation. I följande exempel beräknas $(692)_{10} \cdot (25)_{10}$, vilket är ekvivalent med $(11\ 32)_{60} \cdot (25)_{60}$.

Lertavlan delas in i fyra kolumner, se figur 12; tre kolumner till vänster för att tydligt veta resultatets storleksordning. Från vänster sett är storleksordningen 60^2, 60^1 och 60^0. Kolumnen längst till höger har redan fyllts i med multiplikanden $(11\ 32)_{60}$.



Figur 12: Lertavlans utgångsläge vid beräkning av multiplikation (Ifrah, 2001, s. 233).

Eftersom $(25)_{60}$ är multiplikatorn söks i dess räknetavla motsvarande värde för 2 först. Svaret $(50)_{60}$ erhålles vilket noteras överst i första kolumnen samtidigt som de två entalen tas bort hos multiplikanden. Därefter hittas, på liknande sätt motsvarande värde för $(30)_{60}$, vilket är $(12\ 30)_{60}$. Svaret noteras på tavlan under föregående resultat. Med samma metod hittas motsvarande tal för $(11)_{60}$, vilket är $(4\ 35)_{60}$. Dock förflyttas svaret en kolumn till vänster då storleksordningen för enheterna har ändrats. Svaret i sin helhet kan ses i figur 13. Återstående är att förflytta till rätt potenser vilket kommer ge resultatet $(4\ 48\ 20)_{60}$, och kan skrivas decimalt som $(17\ 300)_{10}$.



Figur 13: Tavlans utseende efter att alla produkter hittats (Ifrah, 2001, s. 233).

3.3.4 Influenser idag

Trots att sexagesimala systemet uppfanns för så länge sedan ser vi fortfarande tydliga influenser från det tillsammans med den mesopotamiska matematiken. Vår kalender kan vi se har direkta kopplingar till deras som nyttjades för att förutsäga olika fenomen i naturen. Deras år bestod av 365 dagar fördelade på tolv månader bestående av trettio dagar vardera. De sista fem dagarna lades till med förklaringen att solguden Shamash önskade systemet så (McLeish, 1994, s. 44). Genom att sedan låta ett år symboliseras av en cirkel delades den sedan in i 360 lika stora delar, vilket symboliserade dagar. Detta skulle ligga till grunden för cirkelns 360° (Lombardi, 2007).

En ytterligare tydlig koppling till det sexagesimala systemet är hur vi mäter minuter och sekunder. Mesopotamierna tros ha lagt grunden genom att först dela in dygnet i två delar om tolv som de kallade *hora,* vilket därefter delades in i sextio minuter och sextio sekunder (Dohrn- van Rossum, 1996).

3.4 Kinesiska hybridsystemet

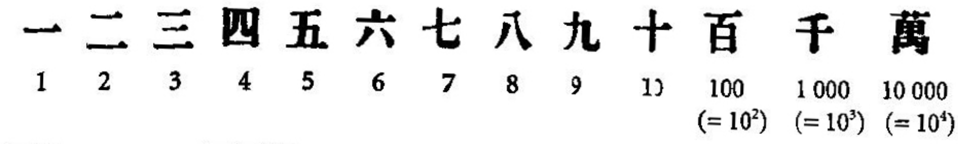
Kinesernas inställning till matematik skiljdes nämnvärt från den västerländska. De lyckades exempelvis upptäcka egenskaper hos symboler det skulle ta européer ytterligare 2000 år att finna (McLeish, 1994, ss. 61-62). McLeish fortsätter beskriva att kinesernas framgång beror främst på attityden att matematik inte var en syssla för slavar och tjänstefolk, likt Egypten och Mesopotamien, utan för de mest begåvade och vetenskapligt kunnande.

Hodgkin (2005, ss. 82-83) menar att kinesisk matematik inte kan diskuteras utan att ha nämnt verket ”Nio böcker om räknekonsten”, vilket är en av de äldsta funna kopior av matematiska läroböcker från Kina. Verket är skrivet runt 200 e.Kr. och hade syfte att bilda befolkningen med matematik från första årtusendet f.Kr. Texten tros haft liknande betydelse i öst som Euklides ”Elementa” i västvärlden. Hodgkin fortsätter att nämna tydliga skillnader som ”Elementas” fokus på bevis och resonemang, kontrasterat ”Nio böcker om räknekonsten” praktiska tillämpningar.

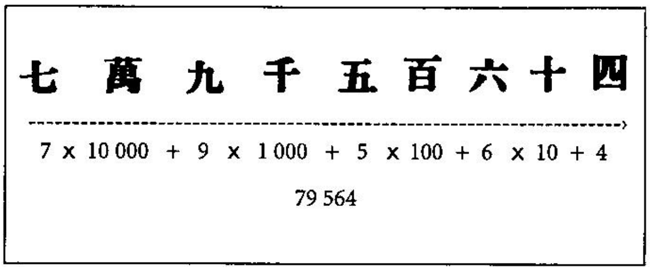
Kinesisk skrift har sina rötter i vad som ristades in i *orakelben* ca 1500 f. Kr. Dessa ben användes för att komma i kontakt med förfäders andar (Johansson, 2013b, s. 168). Johansson menar att de talsymboler som återfinns på benen är symboler för de nio första entalen, tiotal, hundratal, tusental och tiotusental. Det är här det kinesiska talsystemet börjar synas.

3.4.1 Talsystemets egenskaper

Som nämnt ovan började kineserna använda ett decimalt system bestående av tretton tecken. Ifrah (2001, s. 387) beskriver systemet som ett hybridsystem. Detta grundas i att både additionsprincipen och multiplikationsprincipen nyttjades för att skriva blandade tal, se avsnitt två. Figur 13 tillsammans med figur 14 illustrerar hur talsystemet används på samma sätt idag som förr.

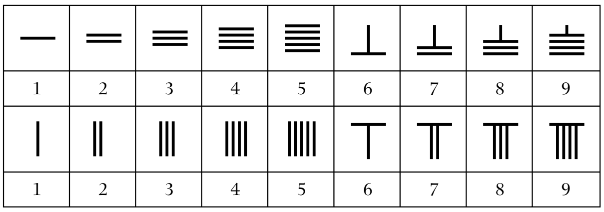


Figur 14: Hybridsystemets moderna tecken (Ifrah, 2001, s. 508).



Figur 15: Ifrah (2001, s. 387) illustrerar hur talet 79 564 byggs upp enligt kinesiska hybridsystemet.

Genom att studera figur 14 och figur 15 noggrannare syns att behovet av ”nolla” eller tom mängd inte finns (Ifrah, 2001, s. 389). Detta eftersom talen skrivs med motsvarande multiplar, vilket innebär att positionen inte var relevant (Johansson, 2013b, s. 168). Däremot utvecklades en stavaritmetik, ett nytt talsystem, ca 300 f.Kr. (Thompson, 1996, s. 76) vad som skulle kallas *suan zí*, räkning med ribbor. Systemet kombinerar regelmässigt lodräta och vågräta streck för att avbilda talen ett – nio, se figur 16.



Figur 16: De nio tecken som användes i talsystemet suan zí (Hodgkin, 2005, s. 86).

Suan zí var ett strikt positionssystem som påminner mycket om det moderna decimala. Den tydligaste skillnaden är avsaknaden av ”nollan” vilket markerades med en tom plats, likt Mesopotamiens system. I suan zí kunde dock talet avslutas med tomrum. För att undgå förvirring kunde tecken från det traditionella systemet användas för att beskriva vilken potens som används (Ifrah, 2001, ss. 407-409). Ytterligare metod som användes var att variera de horisontella och vertikala strecken, vilket även illustreras i figur 16 (Hodgkin, 2005, s. 85). Ifrah (2001, s. 490) påpekar att först från 700-talet e. Kr. har fynd hittats där den tomma platsen ersatts med en cirkel.

3.4.2 Tecknens utveckling

Ifrah (2001, s. 394) beskriver en hypotes att de första tecknen som användes troligen hade religiöst ursprung och att de kunde kopplas till kinesisk talmystik. Han fortsätter med att det taltecknen visade en början till att skapa abstrakta symboler:

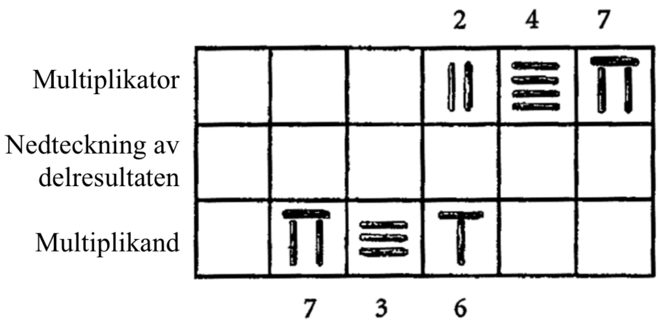
> Istället för att fortsätta denna primitiva uppställning, genom att – som till exempel egyptierna – para ihop tecknen eller – som babylonierna eller fenicierna – dela in dem … föredrog kineserna att för de följande fem entalen införa fem särskilda tecken som tycktes sakna all konkret anknytning. (Ifrah, 2001, s. 394)

Beräkningar gjordes i huvudet, och succesiva resultat antecknades på räknebräden. Dessa bräden var gjorda av trä och liknar visuellt ett större schackbräde (McLeish, 1994, s. 65). På schackbrädet placerades räknestavar, vissa för positiva och vissa för negativa tal, i de rutor som bestämde aktuellt potensvärde. Därefter flyttades stavarna i takt med beräkningarna. McLeish betonar den snabbhet stavarna flyttades med hos matematiker med år av erfarenhet. Han fortsätter även med hypotesen att räknemetoden säkerligen ligger till grund för positionssystemet suan zí. Ifrah (2001, s. 417) instämmer och poängterar att notationen inspirerade kineserna, senast runt 100 f. Kr., att formalisera en form av positionsprincip.

Tecknen i hybridsystemet fortsatte att utvecklas stilistiskt under tid och används idag, parallellt med det moderna decimala systemet vi använder i Sverige, i moderna Kinas normalskrift, *kai shu*. De nuvarande tecknen, som stiliseras i figur 13 och figur 14, har varit i bruk sedan 300-talet e. Kr. (Ifrah, 2001, ss. 387-390).

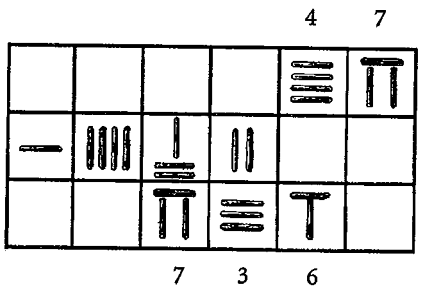
3.4.3 Beräkningar

Beräkningar gjordes som nämnt tidigare främst med hjälp av huvudräkning. Ett sätt att visualisera beräkning var med räknebrädet vilket illustreras av Ifrah (2001, ss. 415-416) nedan. Multiplikatorn 247 ska multipliceras med multiplikand 736. Beräkningen genom att talen läggs ut på brädet enligt figur 17.



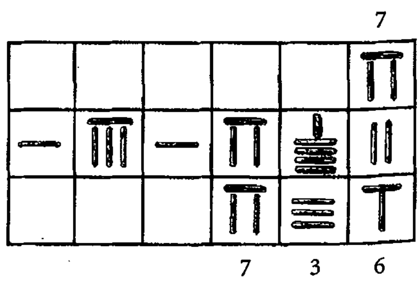
Figur 17: Utgångsläge för multiplikation mellan 247 och 736 (Ifrah, 2001, s. 415).

Multiplikandens tal multipliceras med multiplikandens första, vilket innebär att 7 multipliceras med 2. Svaret 14 delas upp i tiotal och ental. Entalen läggs ovanför sjuan och ettan en potens högre. Metoden upprepas och 3 multipliceras med 2 och till sist 6 med 2. Tvåan från multiplikatorn plockas bort och första steget är klart med ett delresultat i mellersta raden, vilket kan ses i figur 18. Delresultatet utläses till 147 200.



Figur 18: Första delresultatet efter 200 har multiplicerats med 736 (Ifrah, 2001, s. 415).

Metoden upprepas ytterligare för multiplikatorns fyra (40) och sjua (7). Dock skrivs delresultaten upp i rutor motsvarande multiplikandens tiotal och ental. Slutresultatet kan ses nedan i figur 19.



Figur 19: Slutgiltigt resultat efter multiplikation kan utläsas till 181 792 (Ifrah, 2001, s. 416).

3.4.4 Influenser idag

Influenser från kineserna kan hittas i flera olika delar av samhället. En av deras mycket uppskattade räkneverktyg, menar Johansson (2013b, s. 169) är räknebrädets vidareutveckling - abacus. Verktyget skulle senare introduceras i västvärlden och ta medeltidens Europa med storm och dess efterföljare kulramen används ännu idag (McLeish, 1994, s. 80).

Det finns teorier om att kineserna skulle influera det arabiska systemet, vilket är grunden i det moderna decimala. Prisbelönta Lam Lay Yong och Tian Se Ang (2004, ss. 173-181) diskuterar likheter mellan suan zí och det arabiska talsystemet utifrån tre nyckelegenskaper:

i) Nio tecken och ett koncept för noll.
ii) Ett positionssystem.
iii) En decimal bas.

De fortsätter även med att poängtera att båda systemen utvecklades för att utföra beräkningar med de fyra räknesätten, och hur slående lika metoderna är. Avslutningsvis berättar Yong och Ang att kineserna utvecklade sitt system tidigare än indierna, och att likheterna är för många för att kunna se dessa som en slump. Dock är det ännu en teori som svår att bekräfta, och flera är kritiska till tanken. Ifrah säger exempelvis:

> … bevisar alltså att nollan och indiernas decimala positionssystem … utesluter uppgifterna nästan helt varje möjlighet att Kina skulle haft något inflytande på tillkomsten av vårt moderna system (Ifrah, 2002, s. 87).

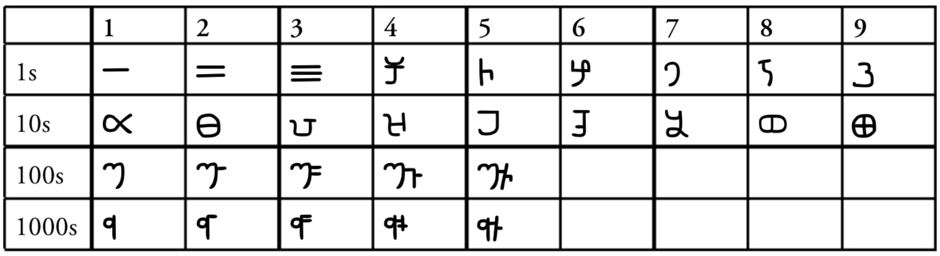
3.5 Indiska talsystemet

Den indiska civilisationen kan dateras tillbaka flera tusen år, men det återfinns ingen matematik förrän runt 800 f. Kr. Kline (1972, s. 183) menar att det var grundläggande matematik, bestående av mycket geometri med religiösa kopplingar. Ett känt exempel är läroboken *Sulbasutra* som beskriver olika mätmetoder i samband med ritualer (Johansson, 2013b, ss. 221-222). Ett teckensystem som skulle influera Indien samt dagens decimala system var *brahmi -alfabetet*.

Indien är präglat av att ha varit och är en stor region med mycket kulturutbyte, vilket även satt sina spår i utvecklingen av matematisk notation. Flera lokala system utvecklades (Ifrah, 2002, ss. 58-67), men denna text kommer framförallt diskutera utifrån *brahmi-skriften* som senare skulle utvecklas till *nagari –skriften*. Detta för att följa de system som påverkat det system vi har idag.

3.5.1 Talsystemets egenskaper

Det första systemet som dokumenterats är alltså brahmi. Systemet hade tio som bas och var ett additivt teckensystem. Väsentligt är att det inte nyttjades någon ”nolla” i systemet (Kline, 1972, s. 183). Nedan i figur 20 syns en stilisering av hur tecknen ett till femtusen såg ut, men det fanns tecken för alla multipler av tio upp till 90 000. Likt tidigare additiva system var det inte behändigt vid arbete med större tal. (Ifrah, 2002, ss. 68-72).



Figur 20: Stilisering av tidiga, ca 100 f Kr., notationer från brahmi (Chrisomalis, 2010, s. 201).

Efter spridning och vidare utveckling skulle indiska notationer utvecklas till ett fullständigt positionssystem. Runt 600 e. Kr. hittas nagari-skriftens talsystem vilket nyttjar samma egenskaper som vårt moderna decimala system. Thompson (1996, ss. 67-68) beskriver tre egenskaper som väsentliga för att hitta ett likvärdigt system: positionsidén, siffror och en nolla. Han betonar att det är tack vare de indiska siffrorna det inte längre behövdes additiv repetition av tecken. Osborn (2017) bygger vidare och betonar hur stort steg det var att hitta tecken som skiljde sig från en fysisk representation och som istället skulle representera tal. O'Connor och Robertson (2000b) nämner att idén gällande position var ursprungligen från Mesopotamien, och belyser samtidigt att indierna var de som applicerade idén i det decimala systemet.

Samtliga referenser i stycket ovan är överens i betydelsen av att inkludera nollan. De tidigare systemen hade inte behov av en nolla, men indierna valde att tolka siffran både som ett tomrum och som ett tal. Tack vare att noll nu behandlades som de andra talen är dess inkludering mycket väsentlig, eftersom det är tack vare nollan som effektiva algoritmen för aritmetiska operationer möjliggjordes (Chrisomalis, 2010, s. 208).

Figur 21: De tio siffror som nyttjades i nagariskriften runt elfte århundradet (O'Connor & Robertson, 2000b).

3.5.2 Tecknens utveckling

Brahmi-skriften, kallad ”moder till alla indiska skriftsysystem” av Ifrah, skrevs från vänster till höger och var direkt anpassat efter sanskrit. Brahmi användes från ca 250 f.Kr. och tros ha uppstått från kontakter med medelhavsområden, dock är ursprunget inte helt klarlagt (Johansson, 2013b, s. 226). Tecknen höggs in i klippor för att sprida kungöranden (Ifrah, 2002, ss. 36-37). Varför Ifrah kallar skriften ”modern till alla” är då det skulle överleva alla andra skrifter och bli grunden till samtliga skriftsystem i Indien med grannregioner. Dessa regioner kan kategoriseras till de nord- och centralindiska systemen, de sydliga systemen och de orientaliska systemen. Varför de utvecklades olika berodde främst på anpassning av språk, traditioner och skrivmaterial (Ifrah, 2002, ss. 36-37).

I samband med Guptadynastins intåg vid 400-talet i nordöstra Indien skulle skriften anpassas till den logiskt namngiva *gupta-skriften* (Johansson, 2013b, s. 226). Guptasiffror skulle påminna mycket om de från brahmi, dock med snabb utveckling kring dess egenskaper (Ifrah, 2002, s. 99). Guptadynastin spred sig över Indien och uppmuntrade till studier inom naturvetenskap och konst, vilket skulle ge några av Indiens mest kända matematiker (Mankiewicz, 2000). Under utvecklingen av gupta-skriften skulle ett system, från runt 600-talet, kallat nagari-skriften bildas. Tack vare en imponerande regelbundenhet skulle det senare även kallas *devanagari*, ”gudarnas skrift” (Ifrah, 2002, s. 42). Det är idag devanagri-siffrorna som är vanligast förekommande i Indien (Ifrah, 2002, s. 188).

Större tal skapades och i samband med att talen blev allt större menar Ifrah (2002, s. 107) att potenser började skriva ut om tio ut istället. Vid full utskrivning skulle alltså talet 321 kunna skrivas enligt $3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 1$. Johansson (2013b, s. 229) påpekar också att under de första århundradena var det vanligt att tal noterades med ord istället för siffror av poetiska skäl, se rubrik *beräkningar* nedan. Noterandet skulle kräva både mer tid och onödig konsumtion av dyrbara skrivmateriel. De indiska matematikerna nöjde sig kring början av 400-talet därför med att skriva ut siffrorna i strikt ordning beroende av potens. 321 skulle därför skrivas som *tre.två.ett.* i förkortad form, en början på ett decimalsystem vi känner igen (Ifrah, 2002, ss. 107-110).

Nollan skulle introduceras som en platshållare för tom plats i samband med utvecklingen ovan. Tomrummet valdes att markeras med en punkt eller ordet *sunya*, vilket översätts till just ”tomrum” eller ”himlavalv”. Cirkeln skulle sedan uttrycka noll eftersom cirkeln tolkats som himmelens tecken, vilket kan jämföras med översättningen av sunya (Ifrah, 2002, s. 119). Indierna skulle dock vidareutveckla idén om noll som siffra. Problem med tolkningen dök upp, varför matematikern Brahmagupta skapade räkneregler för nollan. Nedan ses ett utdrag från texten där han beskriver räknereglerna och därmed, i viss mening, definierar den:

> *A negative number subtracted from zero is positive, a positive number subtracted from zero is negative, zero subtracted from a negative number is negative, zero subtracted from a positive number is positive, zero subtracted from zero is zero ...* (O'Connor & Robertson, 2000a).

3.5.3 Beräkningar

Indierna var poetiska och lät detta påverka deras matematik genom namngivning och sättet att formulera för att nämna två sätt. Nedan är en uppgift som beskriver en poetisk fråga med den återkommande lösningsmetoden *inversion*.

> Sköna jungfru med strålande ögon, säg mig vilket tal, som, multiplicerat med 3, produkten därefter ökad med $\frac{3}{4}$ därav, summan dividerad med 7, kvoten minskad med $\frac{1}{3}$ därav, därefter multiplicerad med sig själv, produkten minskad med 52, kvadratroten därur ökad med 8 efter division med 10 ger 2? (Thompson, 1996, s. 69).

Thompson menar nu att uppgiften löstes genom att utföra beräkningarna i omvänd ordning, exempelvis ersätts en subtraktion med addition. Första steget är att dock reda ut vad texten säger. Ökning med $\frac{3}{4}$ innebär multiplikation med $1+\frac{3}{4}=\frac{7}{4}$, vars invers är $\frac{4}{7}$. Minskning med $\frac{1}{3}$ blir därmed multiplikation med $1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$, inversen innebär då multiplikation med $\frac{3}{2}$.

Nu införs inverser och beräkning sker bakifrån och mot början. Först multipliceras 2 med 10, vilket blir 20. Därefter ska 8 subtraheras från 20, vilket blir 12. Talet 12 kvadreras och 52 adderas vilket ger 196. Kvadratroten ur 196 är 14, vilket sedan multipliceras med $\frac{3}{2}$ och ger 21. Multiplikation med 7 ger 147 och därefter multipliceras $\frac{4}{7}$ och ger 84. Som sista del divideras 84 med 3 och svaret 28 ges.

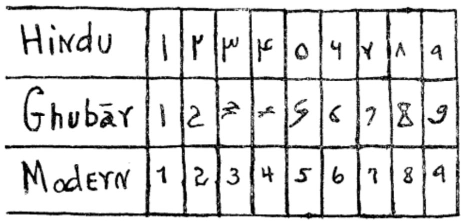
3.6 Arabiska talsystemet

De arabiska nomaderna levde främst på handel, med grundläggande räknekunskaper. Genom senare erövringar och framförallt handelsförbindelser skulle de stå i kontakt med regioner som perser, greker, kineser och indier. De upptäckte kulturer, vetenskaper och tekniker som de gärna lät sig influeras av (Ifrah, 2002, s. 262).

En ny religion skulle födas på den arabiska halvön. Året 622 flydde profeten Muhammad Ben al-Qasim till Medina, för att sedan komma tillbaka med en armé, nya uppenbarelser, koranen och islam. Ett arabiskt rike bildades kring huvudstaden Damaskus, och 100 år senare skulle det nya riket störtas och huvudstaden flyttar till Bagdad. Det är här forskningscentret Bait al-Hikima, Vishetens hus, grundas och i detta centrum araberna skulle börja översätta de insamlade vetenskapliga arbeten till arabiska för att öka dessas tillgänglighet. I de matematiska texterna kunde det tydligt synas tankegångar från bland annat Mesopotamien och Indien (Mankiewicz, 2000, s. 46). Utöver den insamlade kunskapen slöt dessutom folkslag upp i Bagdad för att få kunskapsutbyte (Johansson, 2013b, s. 271).

3.6.1 Talsystemets egenskaper

Araberna tog inte bara emot det indiska talsystemet, utan flera olika system nyttjades samtidigt. Ibland med bas 60, och ibland enklare fingerräkning (O'Connor & Robertson, 2001). Dock brukar det arabiska systemet delas upp i den västra områdets *ghubar-siffror* och östra kontinentens *hindu-siffror* (Gandz, 1931, s. 393). Studien kommer diskutera utifrån ghubar, då den västra arabskriften ska influera den europeiska notationen.

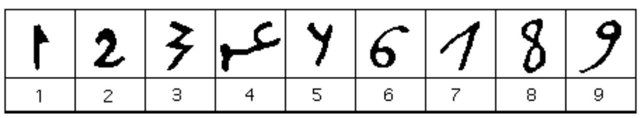


Figur 22: Stilisering av de olika tecknen (Gandz, 1931, s. 394).

Den arabiska matematikern Muhammad Ibn al-Khwarizmi verkade i Bagdad under tidigt 800-tal i Bait al-Hikima. Han ses som en nyckelperson i att araberna införde de indiska räknemetoder och siffror. Al-Khwarismi beskriver i ett av sina arbeten det arabiska talsystemet enligt följande: ”På den ’första platsen’ finns entalen, på ’den andra platsen’ tiotalen, på den ’tredje platsen’ hundratalen och så vidare”. Platserna räknades från höger till vänster vilket innebar att talen skrevs från höger till vänster. För att beskriva talet 10 fortsätter Al-Khwarizmi att en cirkel ska införas som markerar att entalens plats är tom (Johansson, 2013b, ss. 273-275).

3.6.2 Tecknens utveckling

Även om det indiska systemet skulle möta motstånd och även konkurrenter skulle aritmetiken och siffrorna spridas på flera olika sätt till araberna, antingen via handel eller direkt från vetenskapsmän, eftersom de var tvungna att förstå varandras beräkningar. Araberna började kopiera de indiska tecknen från nagari, men med andra verktyg var det problematiskt. De valde att börja anpassa texten utifrån deras förutsättningar, exempelvis att skriva från höger till vänster och därmed skulle det passa deras tidigare skrivsätt bättre. Anpassningar berodde även på olika underlag och verktyg (Ifrah, 2002, ss. 282-295).

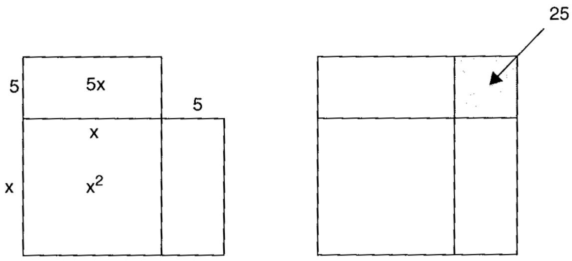


Figur 23: Nio siffror skrivna vid 900-talet av den västarabiska matematikern al-Banna al-Marrakushi (O'Connor & Robertson, 2001).

3.6.3 Beräkningar

Al-Khwarizmi nämns ovan och skulle göra tillräckligt stort intryck inom sina områden att han skulle senare ses som en av historiens viktigaste matematiker, tack vare sina texter där han bland annat namnger algoritm och algebra. Ett av hans viktigare arbeten kallas *al-Kitab al-mukhtasar fi hisab al-jabr wál muqabala*, vilket översätts till ”den koncisa boken om beräkning genom avslutning och balansering”. Läsaren bör observera ordet *al-jabr* vilket senare skulle ge upphov till ordet algebra. Boken behandlar ekvationslösning, mätningar och invecklade kalkyler. Nedan är ett exempel på hur Thompson tolkar en geometrisk lösningsmetod för ekvationen $x^2 + 10x = 39$ (Thompson, 1996, s. 313).

Kvadraten kompletteras med 25, som adderat till 39 ger 64. Men [man!] får x+5 lika med 8 och x lika med 3. Det välkända uttrycket 'kvadratkomplettering' har därjämte återfått sin ursprungliga mening. Ekvationen har … också lösningen $x = -13$. Eftersom al-Khwarizmi var obekant med räkning av negativa tal, förbisåg han denna lösning. Sådana saknar också en geometrisk tolkning. (Thompson, 1996, s. 313)



Figur 24: Geometrisk lösningsmetod i form av kvadratkomplettering.

3.7 Mot Europa och Sverige

I samma tid då ovan nämnda civilisationer blomstrade gör studien en avvikning till medeltidens Europa. Kring 100-talet beskrivs de germanska européerna som en primitiv civilisation; drickande och utan skriv- eller läsförmågor. Romarna gjorde entré och organiserade den katolska kyrkan. Européerna blev till skolade kristna tack vare skolorna de byggde. Romarnas inflytande skulle leda till att latin blev det dominerande språket i vetenskap och matematik (Kline, 1972, ss. 200-202).

Europas matematik utvecklades med inflytande från bland annat problemlösande Grekland. Vid 1100-talet börjar ett intensivt översättningsarbete av texter från antiken. Johansson nämner att kontakterna med de arabiska områdena blev mer vanligt, tack vare bland annat korståg, vilket innebar att fredliga kunskapsutbyten kunde äga rum. Leonardo av Pisa, senare kallad Fibonacci, skulle intressera sig för de indiska siffrorna och Al-Khwarizmis arbete (Johansson, 2013b, ss. 343-347). Trots att européer i århundraden såg ett decimalt system bestående av tio siffror som ett djävulens påfund endast utövat av trollkarlar och bedragare (McLeish, 1994, s. 153), skulle trenden vändas.

3.7.1 Arabiska talsystemet når Europa

Fibonacci var dock inte den första att integrera det arabiska talsystemet i den västerländska världen. Fransmannen Gerbert från Aurillac, sedermera kallad påve Sylvester II, skulle lyckas ta ett första steg att vänja européer vid nya siffror. Enligt legend ska han i slutet av 900-talet begett sig till arabiska Spanien, utklädd till muslimsk pilgrim för att lära sig arabiska beräkningsmetoder. När Gerbert kom tillbaka från sina resor skulle han introducera de arabiska siffrorna, dock utan någon nolla. Varför nollan uteblev berodde främst på den konservativa västvärlden som klamrade sig fast i gamla räknemetoder och romarnas talsystem. Siffrorna skulle dock spridas, via muntlig undervisning, med hjälp av det praktiska räkneverktyget abacus han tog med sig från sina resor. Att han senare skulle bli påve skulle även underlätta spridningen (Ifrah, 2002, ss. 339-342).

I avsnitt 3.6 nämns att översättningar intensifierades. Så gjorde även intresset för matematiken. Översättningarna skedde ofta på initiativ av individer. Flera är värda att nämna, men två texter Thompson beskriver som viktiga är *al-Jabr* översatt 1145 av Robert från England, och *Liber embadorum* översatt samma år av Platon från Italien. Texterna behandlar grundläggande algebra och geometri och skulle sedan beteckna startskottet för matematik i Europa. (Thompson, 1996, ss. 328,336)

Fibonacci skulle stå för det tredje och sista inflytande som skulle behövas för att den arabiska matematiken skulle anammas. Efter resor kring Afrika och Främre Orienten skulle han år

1202 publicera texten *Liber Abaci*, vilket översätts till ”boken om räknekonsten” (Johansson, 2013b, s. 347). Det är en förklaringstext för räkning med papper och penna med siffrorna 0–9 enligt positionsprincipen, med andra ord det system vi använder idag. Trots visst fortsatt motstånd skulle alltså talsystemet spridas och bli det mest använda i världen (Ifrah, 2002, ss. 353-355).

3.7.2 Siffrorna når Sverige

Den svenska matematiken före 1200-talet anses vara svår att dra slutsatser kring. Flera författare från tiden har lämnat arbete efter sig, men är svåra att styrka för att ge någon större betydelse. Det bör dock vara rimligt att dra slutsatsen att Norden, likt andra nationer, nyttjade matematik och astronomi för att hitta en någorlunda fullständig tideräkning i runskrift innan Kristendomens införande. Detta kan ses genom de runskrifter som lämnats kvar (Dahlin, 1875, ss. 7-9).

De hindu-arabiska siffrorna skulle nå Sverige redan vid 1300-talet, men skulle glömmas bort till 1500-talet. Ifrån det tidigare romerska inflytandet användes de romerska siffrorna fortfarande. Eftersom romerska siffror inte är lämpliga vid algoritmiska beräkningar användes fingrar och abacus (Rodhe, 2002, s. 3).

1 augusti 1538 sägs det med viss säkerhet att Gustav Vasa ska ha begärt att en svensk student vid Wittenbergs universitet: ”skulle skaffa … en förståndig man, den med både räknepenningar och i siffrorna, desslikes på mynt i allehanda räkenskaper rätt förfaren vore, och att denne man med det aldra måtte komma in i riket” (Dahlin, 1875, s. 18). Rodhe (2002, s. 3) förtydligar att Vasa sökte någon kunnig i konsten med abacus och algoritmer. Jakob Ziegler skulle senare anlända och bli kallad ”den förste matematikprofessorn i Uppsala” och benämns av Dahlin som ”läraren i siffror” (Dahlin, 1875, s. 19), vilket tyder på att siffrorna skulle göra sig påminda i Sverige.

Avslutningsvis kan det nämnas att de indo-arabiska siffrorna skulle ersätta de romerska och svenskan skulle börja användas i undervisning. Vad som behölls i matematiken var den decimala basen, men den skulle dock utmanas. År 1716 fick filosof och matematiker Emanuel Swedenborg i uppdrag av konung Karl XII att införa ett nytt talsystem, vilket skulle nyttja bas 64. Han fick uppdraget för att anpassa siffrorna efter de måttenheter som användes vid denna tid, exempelvis kanna och tunnland (Rodhe, 2002, s. 48). Swedenborg såg svårigheter i en så stor bas att han istället föreslog bas åtta, vilket han motiverade med fördelar att systematiskt kunna halvera till siffran ett utan bråk, samt att basen hade en geometrisk koppling till bas 64 (Dunér, 2002). Arbetet skulle dock gå i graven tillsammans med Karl XII:s död år 1719, när Swedenborg istället skulle förespråka bas tio igen (Rodhe, 2002, s. 48).

4 Koppling till matematiska förmågor

I detta kapitel introduceras de centrala innehåll och matematikens förmågor i enlighet med svenska skolans läroplaner från 2011. Därefter diskuteras hur talbaser och positionssystem kan kopplas till dessa. Dessutom ligger kapitlet till grund för kommande avsnitts resonemang.

4.1 Centralt innehåll och sju matematiska förmågor

Enligt det centrala innehållet (Skolverket, 2011a) införs positionssystemet i grundskolans årkurs 1 i och bearbetas fram till årkurs 1 på gymnasienivå (Skolverket, 2011c). Tabell 2 summerar det centrala innehåll vi anser som relevant gällande positionssystem och olika talbaser.

Tabell 2: De centrala innehåll som berör positionssystemet och talbaser.

Årkurs	Centralt innehåll
Grundskola	
1–3	Hur positionssystemet kan användas för att beskriva naturliga tal. Symboler för tal och symbolernas utveckling i några olika kulturer genom historien.
4–6	Positionssystemet för tal i decimalform. Det binära talsystemet och talsystem som använts i några kulturer genom historien, till exempel den babyloniska.
	Tal i bråk- och decimalform och deras användning i vardagliga situationer.
	Centrala metoder för beräkningar med naturliga tal och enkla tal i decimalform vid överslagsräkning, huvudräkning samt vid beräkningar med skriftliga metoder och miniräknare.
7–9	Talsystemets utveckling från naturliga tal till reella tal. Metoder för beräkningar som använts i olika historiska och kulturella sammanhang.
	Centrala metoder för beräkningar med tal i decimalform vid överslagsräkning, huvudräkning samt vid beräkningar med skriftliga metoder och digital teknik.
Gymnasiet	
Matematik 1b och 1c	Egenskaper hos olika talbaser.

Sammanfattningen hjälper oss att förstå hur innehållet för positionssystemet och olika talbaser fördelas och undervisas i olika åldrar. Begreppen ”positionssystem” och ”symboler” införs först vid lågstadiet. Symbolernas utveckling genom historien introduceras också direkt från låg ålder. I mellanstadiet introduceras tal och enklare beräkningar i decimalform. I högstadiet repeteras begreppen som undervisats tidigare med fokus på centrala metoder i beräkningar med tal i decimalform. Talbaser och olika system nämns till sist i årkurs 1 på gymnasiet genom att egenskaper hos olika talbaser ska behandlas.

Enligt ämnets syfte för både grundskola och gymnasium (Skolverket, 2011a) kan eleven genom undervisning i matematik, och därigenom positionssystemet samt talbaser, bygga en god grund för att utveckla sju förmågor; begrepp, procedur, problemlösning, modellering, resonemang, kommunikation och relevans. Elever i grundskolor behöver däremot enbart fokusera på de fem förmågorna begrepp, procedur, problemlösning, resonemang och kommunikation. Tabell 3 citerar Skolverkets styrdokument kring förmågorna.

Tabell 3: Förklaringar för förmågor enligt styrdokument (Skolverket, 2011a).

Förmågor	Förklaring
Begrepp	Att använda och analysera matematiska begrepp och samband mellan begrepp
Procedur	Att välja och använda lämpliga matematiska metoder för att göra beräkningar och lösa rutinuppgifter
Problemlösning	Att formulera och lösa problem med hjälp av matematik samt värdera valda strategier, metoder och resultat
Resonemang	Att föra och följa matematiska resonemang
Kommunikation	Att använda matematikens uttrycksformer för att samtala om, argumentera och redogöra för frågeställningar, beräkningar och slutsatser
Modellering	Att tolka en realistisk situation och utforma en matematisk modell samt använda och utvärdera en modells egenskaper och begränsningar
Relevans	Att relatera matematiken till dess betydelse och användning inom andra ämnen, i ett yrkesmässigt, samhälleligt och historiskt sammanhang.

Förmågorna är väsentliga i matematikundervisningen därför de är förutsättningar för eleverna att ”*fatta välgrundade beslut i vardagslivets många valsituationer och ökar möjligheterna att delta i samhällets beslutsprocesser*” (Skolverket, 2011a). Kopplingen mellan förmågorna och just det specifika området kring positionssystem och talbaser synliggörs dock inte i styrdokumenten. Skolverket påstår att de nämnda förmågorna är generella, det vill säga att de inte har kopplats till något specifikt innehåll (Skolverket, 2011b). För att diskutera hur positionssystemet och talbaser kan hjälpa elever förbättra deras matematiska förmågor, söker vi istället relevant forskning. I nästa avsnitt, presenteras publicerade artiklar som undersöker hur positionssystemet och talbaser kan bidra till förmågornas utveckling hos elever.

4.2 Påverkan av positionssystemet och talbaser

Begreppsförmågan består av fyra färdigheter (Skolverket, 2011b)

i. Att redogöra definitioner och egenskaper hos ett begrepp.
ii. Att presentera ett begrepp i olika uttrycksformer såsom ord, symboler och bilder.
iii. Att veta varför ett begrepp är viktigt.
iv. Att veta i vilka situationer ett begrepp kan vara användbart.

Hur elever kan lära sig talbegreppet och särskild positionssystemet har varit i fokus de senaste åren (Helenius, Johansson, Lange, Meaney, & Wernberg, 2016). Att positionssystemet fokuseras tidigt i lågstadiet spelar en central roll i utvecklingen hos elevers förståelse om talens struktur och egenskaper (Skolverket, 2017a). En tidigt utvecklad förståelse, enligt Vygotskij, kan naturligtvis förstärka begrepp bildningsprocessen (Lundgren, Säljö, & Liberg, 2014, ss. 304-305). Neuman (1989) betonar också betydelse av undervisningar om strukturen av talsystemet i de första skolåren. Att koppla fingrarna till räkneord och de vanliga notationerna är det första steget för att hjälpa små eleverna känna till uttryckformer hos positionssystemet (Helenius, Johansson, Lange, Meaney, & Wernberg, 2016, ss. 121-131). Tack vare den här kopplingen, är räkneorden och notationer inte abstrakta länge. Barnen kan oftast i så fall skapa en antalsuppfattning, vilken i sin tur är den väsentliga grunden för att räkna och jämföra (Anghileri , 2000).

Uppräkningar, beräkningar och jämförelse är vanliga uppgifter som brukar användas för att odla procedurförmågan med positionssystemet. En elev som har en hög procedurförmåga skall kunna välja en lämplig procedur eller algoritm för att lösa uppgifter av standardkaraktär (Skolverket, 2011b). Algoritmerna för fyra räknesätt i det decimala systemet tränas under samtliga årkurser i grundskolan, se tabell 2. Algoritmerna för räknesätten i de övriga systemen såsom det binära systemet undervisas varken i grundskolan eller gymnasiet. Med tanke på denna anledning, fokuserar vi mer på det decimala systemet istället för det generella positionssystemet.

Med hjälp av mängdträningen i decimalsystemet, kan eleverna på ett effektivt sätt hantera uppgifter av standardkaraktär i mätningar av exempelvis tider, längder, areor, volymer och priser (McIntosh, 2014b). En annan fördel med mer gedigen kunskap om decimalsystemet kan kopplas till procedurförmågan och att underlätta jobbiga algoritmer såsom substraktionsberäkningar. Larsson (2011) beskriver en beräkningsstrategi, som kallas talsortsvisa beräkningar, för substraktion där både *minuend* och *subtrahend* delas upp siffror enligt deras talpositioner. Författaren beskriver exemplet $64-26$ och delade upp båda talen i tiotal och ental. Beräkningsstrategin ser ut som följande $(60-20)+(4-6)=40+(-2)=38$.

Utöver uppgifter av standardkaraktär behöver elever också kunna hantera uppgifter som är av annan karaktär. En sådan uppgift definieras som ett problem och därmed kallas förmågan att lösa ett sådant problem för problemlösningsförmåga (Skolverket, 2011b). I många länder, rapporteras att denna förmåga är en av de viktigaste faktorer som grundar en framgångrik matematikundervisning (Skolverket, 2011b). I Sverige, omfattar problemlösningsförmågan i första hand de fem följande färdigheterna (Skolverket, 2011b).

i. Att analysera och tolka ett problem.
ii. Att använda problemlösningsstrategier.
iii. Att genomföra ett resonemang.
iv. Att värdera resonemang och resultat.
v. Att formulera egna problem samt vidareutveckla andras.

Eftersom problemlösningar inte följer en rigid ram, kan undervisningsmetoder i detta område varieras (Lester & Lambdin, 2007). Lärare utifrån sina synpunkter och erfarenheter vägleder elever inte bara till de listade färdigheterna utan tränar också elevernas kreativitet och kritiskt tänkande (Einarsson , 2003). Inom ramen för decimalsystemet och talbaser, hanteras ett brett antal problem som kan variera från universum ytterligheter till atomers inre (McIntosh, 2014b).

Ett exempel av problemlösningsuppgifter i detta område är att hitta delbarhetsreglerna (Petersson, 2008). Kriteriet som gäller för delbarhet med 9 är att talets siffersumma skall vara delbar med 9. Varför fungerar kriteriet? Att hitta ett fullständigt svar på frågan är en övning för att vässa elevers problemlösningsförmåga. I detta problem behöver eleverna först tolka nyckelord såsom ”siffersumma” och ”delbar”. Därefter hittar de en lämplig strategi, alltså att man kan pröva sig fram eller använda algebra. Nästa steg är att genomföra beviset. Petersson (2008) förslår ett algebraiskt bevis för ett femsiffrigt tal $abcde$ med hjälp av begreppet ”decimalsystemet” som följande

$$abcde = a \cdot 10^4 + b \cdot 10^3 + c \cdot 10^2 + d \cdot 10^1 + e \cdot 10^0$$

$$abcde = a \cdot 10000 + b \cdot 1000 + c \cdot 100 + d \cdot 10 + e$$

$$abcde = a \cdot (9999 + 1) + b \cdot (999 + 1) + c \cdot (99 + 1) + d \cdot (9 + 1) + e$$

$$abcde = (9999 \cdot a + 999 \cdot b + 99 \cdot c + 9 \cdot d) + (a + b + c + d + e)$$

$$abcde = 9 \cdot (1111 \cdot a + 111 \cdot b + 11 \cdot c + d) + (a + b + c + d + e)$$

Den första parentesen är en faktor av 9 och är därmed delbar med 9. Delbarheten av talet $abcde$ beror nu på siffersumman $(a + b + c + d + e)$. Om siffersumman också är en faktor av 9, kan slutsatsen vara att summan mellan de två parenteserna är också en faktor av 9. Det innebär att talet $abcde$ är delbart med 9.

Efter att ha genomfört beviset, kan eleverna värdera resultatet. De kan fråga sig själva om beviset även gäller för sexsiffriga tal, sjusiffriga tal och så vidare. Eleverna kan även diskutera vidare om möjligheten att formulera egna kriterier för delbarhet med 7, 11 och 13.

Bland annat de fem steg som motsvarar färdigheterna i problemlösningsförmågan är att genomföra ett resonemang en obligatoriskt synlig del. Utan den här delen är lösningen inte komplett. Skolverket betonar betydelse av att genomföra resonemang med att tillägna en hel förmåga för den här färdigheten. Resonemangförmågan, enligt Skolverket (2011b), kan tolkas på ett generellt sätt som ”att testa, föreslå, förutsäga, gissa, ifrågasätta, förklara, finna mönster, generalisera, argumentera”. I Peterssons exempel, är resonemangen hans bevis. Det presenterade beviset är ett typiskt exempel av ett matematiskt resonemang, där ”består av logiska slutsatser utifrån givna definitioner, axiom och satser” (Skolverket, 2011b). För att genomföra ett matematiskt resonemang, bör elever i första hand ha goda kunskaper om definitioner, axiom och satser. Till exempel, för att avgöra delbarhetskriteriet med 9, utgår Petersson (2008) från definitionen av det decimala systemet. På andra ord, är kunskapen och uppfattningen hur ett tal konstrueras i bas 10 en betydelsefull del i resonemanget.

Den sista matematiska förmåga som utvecklas i grundskolan är kommunikation. De kunskaper och idéer människan har kommer att vara värdelösa om den kan inte kommunicera dessa med sin omvärld (Anderson, 2011). Skolverket (2011b) definierar kommunikationsförmågan som en färdighet i att uttrycka matematiska kunskaper med hjälp av termer, symboler, tabeller, grafer, ord, bilder, ritningar, gestaltningar och modeller. Undervisningen i det decimala systemet erbjuder många möjligheter för elever att utveckla färdigheten. Enligt det utvalda centrala innehållet, se tabell 2, har eleverna tränat med kommunikationsförmågan sedan årkurs ett. Att lära sig att skriva och räkna sifforna 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 är en övning för att kommunicera med hjälp av symboler. Att placera tal på en tallinje är ett sätt att kommunicera genom grafer. Att lära sig talpositioner och förstå decimalernas platsvärden förbättrar uttal av tal när det gäller tal i decimalform (McIntosh, 2014b).

Med hjälp av förmågorna begrepp, procedur, problemlösning, resonemang och kommunikation i grundskolans kursplan kan elever tillämpa sina matematiska kunskaper i det vardagliga livet eller i andra skolämnen (Skolverket, 2011b). De fem förmågorna räcker inte till för gymnasieelever. För att förbereda gymnasieeleverna i deras samhälls- och yrkesliv och privatekonomi i framtiden, har två förmågor lagt till, alltså modelleringsförmågan och relevansförmågan (Skolverket, 2011b).

Modellering betyder kortfattat att formulera, från en realistisk situation, en matematisk beskrivning medan relevans skulle inbegripa att sätta en matematisk beskrivning i ett större sammanhang (Skolverket, 2011b). Trots att modelleringsförmågan och relevansförmågan kan låta som två motsatta förmågor, kompletterar de varandra för att relatera matematik till verkligheten. Att kunna koppla matematiken till omvärlden är en avgörande faktor för inlärningen eftersom eleverna kan reflektera matematikinnehåll parallellt med tidigare egna erfarenheter, förståelse och kunskaper (Wigforss, 1954).

Det är uppfattbart att förmågorna hos modellering och relevans bygger kunskapsvägar för elever att nå målet i sina framtida yrkesutbildningar. Positionssystemet, inklusive det decimala systemet och övriga system, tillämpas i ett vidsträckt antal yrken med olika svårigheter. Till exempel kan kunskapen i det decimala systemet användas enkelt av individer för att hantera vardagliga uppgifter (Wistedt, 1991). I en högre svårighet, är uppfattningen om det binära systemet nödvändigt för att förstå hur en dator fungerar (Aspvall & Pettersson, 2007). I en även högre nivå kan uppfattningen om växelverkan mellan olika talbaser utrusta säkerhetens tjänstemän eller kvinnor med algoritmer inom kodning och kryptering (Brzezinski, 2001b).

Modelleringsförmågan och relevansförmågan fortsätter utvecklas även efter genomförd utbildning i grundskola, gymnasium och högskola. Genom att själv reflektera kunskaper och tänker över egna erfarenheter, kan utvecklingen hos en individ styras inifrån av intresse, av kunskapshunger, av lust att utveckla (Lundgren, Säljö, & Liberg, 2014, ss. 230-232). Så småningom lägger förmågorna den första tegelstenen för elevers livslånga bildningsprocess. Inom uppsatsens ram, finns det ett egenvärde för eleverna att ha djupare förståelse i talbaser och positionssystemet? Varje elev kan ha sitt eget svar. Det är däremot troligt att svaret är ja om utifrån det historiska perspektivet utforskas hur mycket positionssystemet och talbaser har bidragit till människans revolution. Sedan positionssystemet föddes, har det blivit mer utvecklat och komplext (Guedj, 1997, s. 62). Flera talmängder föddes för att lösa människans problem. Negativa uppkom för att lösa problem i bokföringar (Guedj, 1997, s. 80). Bråk utvidgade människans förmåga från att kunna räkna till att kunna mäta (Guedj, 1997, s. 82). Irrationella tal dök upp för att visa geometriska mätningar som rationella tal, enligt Pythagoras, inte kan representera (Guedj, 1997, s. 90). Nyligen kom komplexa tal som lösningar till kvadratroten ur av ett negativt tal (Guedj, 1997, s. 96). Allt eftersom universum expanderar, är det möjligt att elever i nästa generationer ska trumfa den nuvarande begränsningen från positionssystemet.

Detta avsnitt har sammanfattat och beskrivit hur positionssystemet och talbaser kan få elevers förmågor att växa. Men hur har positionssystemet och talbaser undervisats i praktiken? Har undervisningsmetoder varit tillräckliga för att eleverna skulle förvärva färdigheter som de behöver? Svaren till frågorna presenteras i nästa kapitel.

5 Talsystem och talbaser i svensk undervisning

Tidigare i kapitel tre diskuteras matematikhistoria från ett världsperspektiv. Följande kapitel bygger vidare och kommer ge en inblick i hur talsystem och talbaser hanterats i svenska skolväsendet, med hjälp av en analys av läroplaner. Dessutom kommer en undersökning av nutida läromedel presenteras för att översiktligt representera hur talbaser och positionssystem undervisas idag.

5.1 Hur talsystem och talbaser undervisats i Sverige

Kunskaper kring svensk matematikundervisning lyser med sin frånvaro innan 1500-talet. Från detta århundrade har det dock hittats texter från bland andra matematikern och ärkebiskopen Laurentius Paulinus Gothus (Hatami, 2012, s. 17). Kyrkan hade vid denna tid makten över folkuppfostran och bildningen av folket (Lundgren, Säljö, & Liberg, 2014, ss. 42-43). Paulinus skulle inrätta kraven att prosttiteln enbart kunde ges när studier gjorts av Euklides bok *Elementa* samt fysik, geografi och lärdomsämne. Införandet av kravet gjordes för att de skulle ha goda förutsättningar att hantera sin roll som präst och styra undervisningen i sitt område (Dahlin, 1875, s. 52).

Kyrkan skulle senare dela rollen som huvudaktör för skolan med staten vid 1800-talets början. Folkskolan bildades 1842 och den första svenska läroplanen, då kallad *normalplan*, skapades 1878 (Dahlgren, 2009, ss. 25-26,30). Normalplanen skulle styra att skolan fick en tydlig riktning, oavsett skola. Normalplaner utvecklades och därmed skolans innehåll. Detta leder vidare till tankar kring hur styrdokument sett ut genom tiderna och hur de hanterat talsystem samt talbaser jämfört med de som används idag. De läroplaner från grundskolan som analyseras är Lgr62, Lgr80 och Lgr11. Från gymnasiet är det Lgy70, Lpf94 samt Gy11.

I Lgr62 finns en avsaknan av talsystem och talbaser. Det nämns att elever ska ha ”uppfattning av de hela talen” samt bearbetar momentet ”begreppet noll” från lågstadiet. Jämförs detta med Lgr80 finns ännu mindre anknytning till talsystem och talbaser. Fortfarande bör elever bearbeta hela tal som ökar i storlek desto äldre de blir. Kontrasteras de tidigare två läroplanerna med Lgr11 som används idag, syns ett tydligt tillägg med talsystem och talbaser. Dels har historiska sammanhan lagts till, men det har även konkretiserats gällande talsystem och dess egenskaper. Lgr80 beskriver att elever i mellanstadiet ska i första hand omfatta ”naturliga tal upp till en miljon samt tal i decimalform med upp till tre decimaler”. Jämförs detta med Lgr11 som skriver att elever i årskurs 4–6 ska ha uppfattning om ”Positionssystemet för tal i decimalform. Det binära talsystemet och talsystem som använts i många kulturer genom historien”. I Lgr11 har det alltså förtydligats att positionssystemets egenskaper ska gås igenom tillsammans med ytterligare historia.

I Lgy70 beskrivs varken talsystem eller talbaser. I Lpf94 beskrivs det dock att elever ska ”få förståelse för att matematiken har sitt ursprung i många äldre kulturer och få inblickar i hur matematiken utvecklats”, vilket exempelvis kan konkretiseras till en genomgång om hur talsystem utvecklats. Jämförs detta med den moderna läroplanen Gy11 har den historiska aspekten tappats, och ”egenskaper hos olika talbaser” har lagts till, vilket skulle kunna konkretiserats genom undervisning kring talsystems historia.

5.2 Nutida analys av svenskt läromedel

Skolverket (2015) rapporterar att läroboken traditionellt haft en styrande roll i ämnet matematik. De fortsätter med att betona att det inte är ovanligt att stoff vid genomgångar väljs ut utifrån vad boken behandlar.”Man är så rädd att de [eleverna] ska missa någonting tycker jag, särskillt med alla krav” berättar en lärare i Fröbergs studie kring läromedel (2013, ss. 20-21). Skolinspektionen (2009) bekräftar att läroboken ges stort utrymme. De bygger vidare genom att beskriva att läroboken används mycket redan vid tidiga åldrar för att senare i äldre åldrar bli mer dominerande.

Argumenten ovan belyser att läroboken är en väl nyttjad del i matematikundervisningen och att både elever som lärare använder den aktivt. Läroboken används alltså både för individuell beräkning men även i planering av undervisningsmoment. I följande avsnitt görs en kortare analys av populärt material som används i skolorna idag, vilket är menat att representera det innehåll som behandlas i undervisningen. Böcker som använts är Matte Direkt för årskurser 7–9 (Carlsson, Hake, & Öberg, 2012), samt Exponent för kurserna 1a och 1c (Gennow, Gustafsson, & Silborn, 2011). 1b har uteslutits på grund av liknande stoff med 1c.

Tabell 4: Överblick över läroböckers behandling av positionssystem, decimalsystem och andra talbaser i relation till styrdokumenten. Kryss innebär att innehåll behandlas.

	Läromedel				
	Matte Direkt 7	Matte Direkt 8	Matte Direkt 9	Exponent 1a	Exponent 1c
Decimala talsystemet					
Historia	☒	☒	☐	☒	☒
Definition	☒	☒	☐	☒	☒
Algoritm för beräkning	☒	☒	☒	☒	☒
Binära talsystemet					
Historia	☐	☐	☐	☐	☒
Definition	☐	☒	☐	☐	☒
Algoritm för beräkning	☐	☐	☐	☐	☐
Övriga talsystem					
Historia	☒	☐	☐	☒	☒
Definition	☐	☐	☐	☐	☒
Algoritm för beräkning	☐	☐	☐	☐	☒

Kommentarer till tabell 4:
I texten nedan kommer böckerna refereras efter deras årskurs/kursnamn. Informationen är främst hämtad från böckernas förklaringar.

Samtliga böcker, förutom bok 9, behandlar ett historiskt perspektiv kring det decimala systemet. Värt att nämna är att 7 och 1c gör en mer genomgående analys, genom att diskutera olika system med unika egenskaper och baser. I 8 och 1a konstateras snabbt att andra system funnits. Exempelvis motiveras det decimala systemet i bok 8 att bas 10 troligen används eftersom människan har tio fingrar. En potentiell problematik i bok 7 är att andra talsystem diskuteras sist i fördjupningskapitlet, vilket skulle kunna innebära att elever inte hinner behandla avsnittet. Detta är enda gången serien behandlar historiska talbaser vilket kan innebära missad kunskap som ska behandlas enligt det centrala innehållet.

Genomgående är att definiera det decimala systemet genom att hänvisa till talen som ental, tiotal … alltså med ord. I grundskolan bearbetas potenser i åk 8 samt åk 9, dock definieras enbart det binära systemet och system med bas fem i 8 med hjälp av potenser. I 1a behålls liknande taktik, medan i 1c utvecklas resonemanget och potenser används för att definiera större tal samt decimaltal. Nya baser fortsätter introduceras med hjälp av potenser i 1c.

Vidare kan nämnas att i samtliga böcker behandlas och repeteras det decimala systemets algoritmer. Först i kurs 1c förväntas eleven inte behöva någon grundlig repetition. Ytterligare en slutsats är att enbart en uppgift som behandlar algoritmer gås igenom för beräkning med tal i andra baser. Resterande uppgifter förväntas eleverna konvertera till decimalt system för att sedan utföra beräkningarna. Uppgiften som behandlar algoritmer handlar om addition mellan kiltecken i bas 60.

Tabell 5: Överblick över läroböckers övningar kring talbaser och positionssystem i relation till de sju förmågorna i ämnet matematik.

	Läromedel				
Förmågor	Matte Direkt 7	Matte Direkt 8	Matte Direkt 9	Exponent 1a	Exponent 1c
Begrepp	☒	☒	☐	☒	☒
Procedur	☒	☒	☒	☒	☒
Problemlösning	☐	☐	☐	☐	☒
Kommunikation	☒	☒	☐	☐	☒
Resonemang	☒	☐	☐	☐	☒
Modellering	☐	☐	☐	☐	☐
Relevans	☒	☒	☐	☐	☒

Kommentarer till tabell 5:
I texten nedan kommer böckerna refereras efter deras årskurs/kursnamn. Informationen är främst hämtad från de räkneövningar böckerna innehåller.

Relevanta begrepp hanteras i olika mån. I bok 7 behandlas grundläggande begrepp noggrant, dock diskuteras exempelvis att ”siffrans värde beror på vilken plats den har i talet”, utan att nämna att det därmed är ett positionssystem. Talbas definieras i fördjupningskapitlet. I bok 8 introduceras begreppet *binärt*. 1c behandlar samtliga relevanta begrepp och utvecklar tidigare tankegångar genom att exempelvis benämna *positionssystem* och *decimalt system* och diskutera *utvecklad form.* I 9 saknas övningar kring relevanta begrepp, och i boken 1a repeteras de som togs upp redan i sju.

Uppgifterna domineras av proceduruppgifter i samtliga böcker. Uppgifterna består av beräkning med de fyra räknesätten i det decimala systemet samt konvertering mellan olika baser. Dock finns det frågor som sticker ut. En tydlig resonemangsfråga i 7 handlar om att jämföra de egyptiska, mayanska och romerska talsystemen. Detta är en uppgift som dels kommer ta upp relevanta begrepp och öva elevens argumentationsförmåga kring olika talbasers egenskaper.

Uppgifter behandlar andra tecken, exempelvis romarnas taltecken för att kommunicera andra talbaser. Kommunikationsförmågan utmanas även genom att låta eleverna beskriva de olika tecknens betydelse och sina egna tankegångar. Exempel kan tas från 8, där eleverna ska beskriva hur de konverterar från bas 5 till tiosystemet.

Genomgående för samtliga läromedel är att modellering ej hanteras. Emellertid finns relevans i form av historisk koppling; dels i uppgifterna men även i texterna som går igenom olika delar.

6 Elevers svårigheter med positionssystem

Följande kapitel delas in i två avsnitt: svårigheter kring det decimala systemet samt svårigheter vid beräkning med övriga talbaser. Utifrån dessa kommer det redovisas dokumenterade hinder elever kan uppleva. Eftersom det decimala systemet väger tyngre än de andra talsystemen med övriga talbaser i det centrala innehållet, kommer det förstnämnda talsystemet prioriteras.

6.1 Svårigheter kring det decimala systemet

Elevers svårigheter kring det decimala systemet har dokumenterats och utpekats av genomgripande undersökningar. Bentleys (2008) djupanalys, av resultat hos svenska elever i TIMSS 2007, visar svårigheter hos elever i lågstadiet. McIntosh (2014b) listar flera typiska missuppfattningar och misstag i beräkningar som eleverna i olika ålder brukar göra. I följande analys sammanfattas elevers svårigheter utifrån Bentley (2008) och McIntosh (2014b) i följande fem kategorier.

6.1.1 Eleven har inte förstått platsvärde

Floberg och Löfström (2010) beskriver i sin kvalitativa studie att elever i årkurs 4 har en linjär uppfattning kring tal mellan 0 och 1000. Det vill säga att eleverna inte har utvecklat färdigt talfakta och inte fullständigt förstått platsvärde. McIntosh (2014a) ger ett exempel där elever har svårt att uppfatta hur tio objekt kan representeras av bara en siffra, 1. McIntosh ger även ett exempel där elever placerar talet 10,1 närmare 10 än 9,99 på en tallinje. Att inte kunna se skillnad mellan siffervärden i olika positioner leder till att siffror kan placeras på fel plats i beräkningar. Bentley (2008, s. 59) fortsätter genom att diskutera ett exempel från TIMSS 2007 där 461 elever i årkurs fyra ombads genomföra multiplikationen $53 \cdot 26$. Av de 461 eleverna, använde 246 elever (53,4%) talsortsvisa beräkningar där uppfattningen om talpositioner krävs. Bara 20 av 246 elever (8,1%) hade korrekt svar. Ett av de upptäckta misstagen var att ”talen i entals- och tiotalspositionerna multiplicerades separat, tiotal multiplicerades med tiotal och ental med ental” (Bentley, 2008, s. 59).

6.1.2 Svårigheter att växla mellan språklig kod och sifferkod

Räkneord och notationer är menat att vara uttrycksformer vilket hjälper elever att räkna fritt och obegränsat. Tio fingrar och tio tår är inte någon begränsning länge. Emellertid är växlingen mellan den språkliga koden (räkneord) och sifferkoden (notationer) ett problem (Bentley, 2008; McIntosh, 2014b).

Svenska elever i mellanstadiet kan översätta räkneord till skriftliga siffror inkorrekt om talen ligger mellan 15 och 19 (Bentley, 2008, s. 21). Till exempel, uttalas talet 15 ”fem-ton” med räkneord, alltså kommer ordet ”fem” först, medan med skriftlig notation läggs siffran 1 framför siffran 5. Att ordningen mellan räkneord och notationer inte överensstämmer kan orsaka ett återkommande problem, vilket kallas reversering.

När elever blir äldre, kan de utveckla sin talfakta och därmed är reversering inte ett större problem länge. Äldre elever har däremot problem med decimalform. McIntosh (2014b) kritiserar slarviga uttal av decimaltal i våra vardagliga aktiviteter. Till exempel, talet 6,25 uttalas oftast *sex* och *tjugofem* separat eller *sex komma tjugofem*. Detta sätt att uttala decimalform reflekterar inte siffrornas platsvärden och kan därmed leda till missförstånd. Vid jämförelse mellan 6,25 och 6,5 kan eleverna dra en felaktig slutsats att *sex komma tjugofem* är större än *sex komma fem* eftersom *tjugofem* är större än *fem*.

6.1.3 Svårigheter med ”osynliga” nollor och dess betydelse i stora tal

Å ena sida, har rollen av den tionde siffran 0 varit betydelsefull sedan siffran föddes, särskilt i decimalsystemet (Guedj, 1997, s. 47). Å andra sidan, kan inblandningen av nollor i skriftliga notationer förvirra elever. Resultat från undersökningar av Floberg och Löfström (2010) visar att många elever i årkurs 4 har problematik att skriva rätt antal nollor vid stora tal. McIntosh (2014b) pekade ut flera situationer där elever inte förstår rollen av nollor i decimalform. Till exempel är det i princip korrekt att skriva likheten $0{,}1000 = 0{,}1$ medan att likställa $0{,}0001 = 0{,}1$ inte stämmer alls. På samma sätt, kan det förvirra elever genom att konstatera att $0001 = 1$ och att skriva $1{,}000 = 1$. Elever kan ha ytterst små problem att hitta ett decimaltal liggandes mellan 0,20 och 0,30 men ha svårigheter att hitta ett decimaltal mellan 0,2 och 0,3. Edner (2014) rekommenderar att lärare inte bör ta för givet att elever ser siffran 0 som de andra siffrorna. Lärare bör inte heller motivera med påhittade ”osynliga” nollor utan i undervisningen försiktigt förklara siffrans värde i relation till siffrans position.

6.1.4 Svårigheter med notationer i decimalform och deras egenskaper

Nollor är inte det enda problem när elever hanterar decimaltal. Notationer och konventioner i decimalform är också hinder. I Sverige används kommatecknet som decimaltecken och kan ibland nyttja punkten som tusenavgränsare (Språkrådet, 2008). I andra länder, till exempel England, används kommatecknet som tusenavgränsare och punkten som decimaltecken (Språkrådet, 2014). Denna brist på överenskommelse mellan olika länder är en anledning till en smärre missuppfattning när elever kan använda miniräknare. Figur 25 visar ett tal presenterat av en miniräknare som är förinstallerad med engelsk notation. Det finns en risk att svenska elever tolkar kommatecknet i figuren som decimaltecknet, vilket inte är riktigt i detta fall.

Figur 25: Talrepresentation i en miniräknare med den engelsk standard.

Decimaltecknet misstolkas inte bara som en tusenavgränsare utan kan också, enligt McIntosh (2014b), misstolkas som en mittpunkt av ett tal. Författaren menar att elever kan missuppfatta att ett decimaltal har spegelsymmetri i platsvärden genom kommatecknet. Till exempel kan decimaltalet 12,34 feltolkas att bestå av tiotal 1, ental 2, endel 3 och tiondel 4. Eftersom kommatecken avgränsar ental och tiondel har decimaltal inte någon symmetrisk egenskap.

Bentley (2008, s. 130) påstår att elever kan ha flera parallella uppfattningar om ett och samma begrepp och det är möjligt att uppfattningarna blandas ihop. Detta problem dyker tydligare upp när eleverna försöker tolka betydelse av decimaltal vid olika sammanhang. Till exempel kan 6,25 kronor och 6,25 timmar absolut inte omvandlas till närmsta mindre enhet på samma sätt. 6,25 kronor motsvarar 625 öre medan 6,25 timmar inte är 625 minuter utan motsvarar enbart 375 minuter.

6.1.5 Svårigheter med algoritmer i olika beräkningar

Den sista kategorin betraktas som en oundviklig konsekvens av de ovan nämnda kategorierna. Om en elev inte har utvecklat tillräckligt talfakta, exempelvis gällande decimaltal, nollor och platsvärde, är det högt sannolikt att eleven även har svår att lära sig algoritmer för olika beräkningar. Bentley (2008), McIntosh (2014b), och Larsson (2011) presenterar i sina undersökningar många svårigheter hos elever; framförallt i multiplikationer och subtraktioner. Följande är två exempel som oftast förekommer i felaktiga beräkningar i de två nämnda räknesätten.

I uppställningen av en multiplikation, är det vanligaste misstaget att elever inte förskjuter till motsvarande positioner. I den tidigare diskuterade uppgiften från TIMSS 2007, alltså $53 \cdot 26$, glömde eleverna att förskjuta till tiotalsposition vid multiplicering av tiotalet 2 med 53. Den felaktiga uppställningen ser ut som följande:

$$\begin{array}{r} \times\ 53 \\ \underline{26} \\ 318 \\ \underline{106} \\ 424 \end{array}$$

I uppställningen av en subtraktion, är det vanligaste misstaget vid lodrätta algoritmer att elever inte växlar när en växling krävs. Bentley (2008) visar flera exempel från TIMSS 2007 såsom de tre följande subtraktionerna $91-59$, $151-126$, och $203-198$. Felaktiga resultat som rapporterades på grund av saknade växlingar är $91-59=48$, $151-126=35$, och $203-198=195$. Den gemensamma missuppfattningen är att "elever drar det mindre talet från det större talet oavsett det hör till minuend eller subtrahend" (Larsson, 2011, s. 7). Att betrakta minuend och subtrahend likadana leder till även ett större problem när elever börjar beräkna med negativa tal. Lodrätta algoritmer fungerar enbart vid subtraktionsberäkningar där minuend är större än subtrahend. En felaktig uppställning av subtraktionen $59-91$ skulle vara följande, där elever inte skulle kunna se något behov av en växling eftersom $9-1=8$ och $5-9=-4$.

$$\begin{array}{r} 59 \\ \underline{-91} \\ -48 \end{array}$$

6.2 Svårigheter vid beräkning med övriga talbaser

I princip är talsystemet med övriga talbaser fortfarande ett positionssystem och skulle ha samma grundläggande egenskaper som decimalsystemet. Som ett resultat av detta, möter elever liknande svårigheter som har diskuterats i avsnitt 6.1. McIntosh (2014a) instämmer att platsvärden i övriga baser är svåra att begripa för eleverna. Till exempel föredrar elever att räkna föremål var för sig, alltså ett och ett, istället för att räkna på ett effektivt sätt i grupper. Eftersom talbaser skiljt från tio inte synliggörs på samma sätt i elevers vardagliga aktiviteter, är det även besvärligare för elever att växla mellan den språkliga koden och sifferkoden. Ett exempel är det hexadecimala systemet, där sex bokstäver införs i notationen. A, B, C, D, E, F används för att representera den elfte, tolfte, trettonde, fjortonde, femtonde och sextonde siffran. Det vanliga svaret för frågan *"hur gammal är du? "* är *"jag är 12 år gammal"*. Att svara i hexadecimalsystemet *"jag är C år gammal"* skulle vara helt obegripligt i vardagen. Taub (2013) lyfter dessutom upp problemet med konventioner gällande nollor i potenslagar. Om elever har inte förståelse kring potenslagarna, kan dessa elever inte tillämpa definitionen av positionssystemet (se ekvation 3) oavsett talbas. Till exempel följer likheten $a^0 = 1$ inte elevers intuitiva förståelse angående potensform. I sin artikel ger Taub (2013) ett exempel där elev och lärare argumenterar fram ett felaktigt resultat av 3^0:

> *Elev:* 3^2 *betyder två treor, då är* 3^2 *lika med nio.*
> *Lärare: Bra. Och* 3^0 *då?*
> *Elev: Det är noll treor. Då måste* 3^0 *vara noll.*

Motsvarande decimalform och de fyra räknesätten i övriga talbaser undervisas enbart mycket kortfattat i gymnasiekurserna 1b och 1c, annars är det enbart omvandlingar som behandlas (se tabell 4). Därför utsätts eleverna inte för svårigheter i motsvarande decimalform och algoritmer för olika beräkningar.

7 Hur ska vi arbeta för att underlätta för eleverna?

I det tidigare avsnittet klassifierades elevers svårigheter i fem kategorier. Under kategorierna, finns tre svårigheter som kan mildras av simpla taktiker. Det betyder att elever inte behöver förstå positionssystemet och talbaser men kan fortfarande komma fram till korrekta svar tack vare taktikerna. För att åtgärda de andra två svårigheterna, platsvärde och rollen av nollor, krävs mer långsiktiga strategier.

7.1 Enkla taktiker som lindrar tidigare nämnda problem

Nedan listas förslag på olika taktiker som kan mildra de problem som nämnts i förgående kapitel. Svårigheterna delas upp som växelverkan mellan den språkliga koden och sifferkoden, notationer samt dess betydelse i decimalform, och beräkningar med subtraktion eller multiplikation.

7.1.1 Växelverkan mellan den språkliga koden och sifferkoden

Problemet med reversering kan dämpas genom att associera talets värde med summan av det språkliga namnet av varje siffra i talet. Till exempel består talet femton av fem och ton. Det innebär att talets värde är lika med fem plus ton, alltså på skriftliga notationer $5 + 10 = 15$. I denna taktik nyttjas den additiva egenskapen hos det decimala systemet och den kommutativa lagen hos en summa. Förutom att dämpa problemet med reversering, kan den första grunden byggas för elever att lära sig också de två viktiga egenskaper.

7.1.2 Notationer och deras betydelse i decimalform

Enligt svenska skrivregler (Språkrådet, 2008) rekommenderas att ett hårt mellanslag använda som tusenavgränsare istället för en punkt. På så sätt undviks kommatecknet och punkten att skrivas samtidigt i ett tal och därmed minskar risken för missförstånd mellan decimaltecknet och tusenavgränsare.

För att förstå betydelse av siffror i decimalform är den konkreta representationformen i undervisningar en nödvändig ingrediens (Hilling Drath, 2007). Konkreta representationsformer är fysiska material som kan användas för att representera matematiska begrepp. Hilling Drath (2007) föreslår, till exempel, att ett kvadratiskt papper med dimensionen 10×10 (hundraplatta) kan representera en hel. En kolumn med dimensionen 1×10 i kvadraten (tiostav) motsvarar en tiondel och en ruta med dimensionen 1×1 (entalskub) motsvarar en hundradel. Författaren använder de nämnda fysiska objekten vid sina undervisningstillfällen och upplevde att berörda elever har kunnat hantera operationer med heltal, tiondelar och hundradelar med en stor säkerhet.

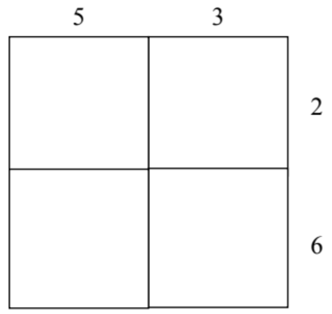
Utifrån Vygotskijs pedagogiska grundsatser ska kopplingen mellan matematiska begrepp och verkligheten argumenteras att ge stöd till elevers förståelse. Erfaranheter från verkligheten kan stimulera elevers tankeförmåga och träna dem på att tillämpa matematiska begrepp i olika situationer (Wistedt, 1991). Som ett resultat kan elever undvika att blanda ihop parallella uppfattningar och använder därmed kunskaperna i korrekta sammanhang.

7.1.3 Beräkningar med subtraktion eller multiplikation

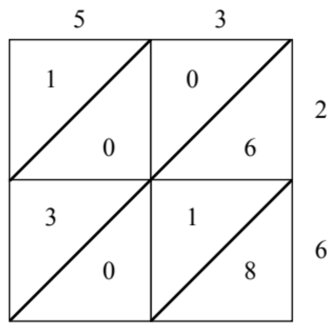
För att hjälpa elever med subtraktionsberäkningar, rekommenderar Larsson (2011) att lärare behöver betona skillnaden mellan minuend och subtrahend. I den elementära subtraktionen $a - b$ kan operationen åskådligt uppfattas som om man tog subtrahend b föremål från minuend a föremål (Thompson, 1991, s. 397). Att ta hänsyn till den här skillanden kan hjälpa elever att ha en bättre bedömning om differensen utan att genomföra fulltständiga beräkningar. Om minuenden är större än subtrahenden är differensen positiv. Om minuenden är mindre än subtrahenden är differensen negativ. Utöver denna nytta, signalerar minuend och subtrahend elever om att den lodrätta algoritmen fungerar som vanligt eller inte. Algortimen fungerar bara när minuend är större än subtrahend. I fall minuend är mindre än subtrahend, kan elever fortfarande använda den lodrätta uppställningen med hjälp av att byta plats på de två termerna men sen måste eleverna ta det motsatta värdet till resultatet.

Fortsättningsvis försöker Bentley (2008) förklara varför vissa elever har svårigheter med beräkningar i multiplikation. En av författarens argument är att eleverna har problem med arbetsminne. Nedan presenteras en taktik som heter *gelosiametoden* (eller på engelska lattice multiplication). Metoden minskar arbetsminnesbeslastningen i multiplikationsberäkningar genom att separera och isolera de partiella produkterna (Randolph & Sherman, 2001). Proceduren för att beräkna med *gelosiametoden* presenteras nedan genom att beräkna en uppgift från TIMSS 2007: $53 \cdot 26$.

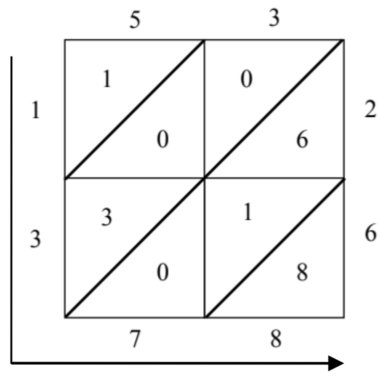
<u>Steg 1:</u> Rita en tabell som med lika antal kolumner som antalet siffror i varje faktor samt placera siffrorna från vänster till höger likt följande figur.



<u>Steg 2:</u> Dela rutorna med hjälp av diagonaler till tiotalsplats och entalsplats i varje ruta och sen multipliceras siffrorna parvis. Resultatet fylls i rutor där tiotal placeras i tioplats och ental i entalsplats enligt nedan.



<u>Steg 3:</u> Siffrorna adderas som läggs på samma diagonal. Resultat av multiplikationen läses från vänster till höger enligt pilen nedan. Produkten, i detta exempel är därmed 1378.



Randolph och Sherman (2001) konstaterar också att eleverna tycker om *gelosiametoden* inte bara för att den är enkel utan också för att designen är estetiskt tilltalande.

7.2 Att hjälpa elever förstå platsvärde

De rekommenderade taktikerna i avsnitt 7.1 räcker inte för att förbättra elevers förståelse. Till exempel, trots att *gelosiametoden* är effektiv, ger algoritmen inte stöd för förståelse av platsvärde i det decimala systemet. Därför är det inte tillräckligt att enbart undervisa taktiker. Det krävs ytterligare genomtänkta strategier.

Pedagogikforskaren Olav Lunde (2011) föreslår i sin artikel ”Mota matematiksvårigheter” en arbetsmodell som siktar mot att förebygga matematiksvårigheter hos elever i de tidiga skolåren. Författaren betraktar matematik från fyra perspektiv: räkning, kontext, tänkande och språk. I varje perspektiv, rekommenderas tre pedagogiska aktiviter. Tabell 6 listar aktiviteterna under de fyra ovannämnda perspektiven.

Tabell 6: Lundes arbetsmodell (Lunde, 2011)

Perspektiv	Pedagogiska aktiviteter
Räkning	Artimetik, problemlösning, talförståelse
Kontext	Lek, begrepp, vardagssitsuationer
Tänkande	Tyst kunskap, erfarenheter, nya situationer
Språk	Ordningsföljd, ord och uttryck, kommunikation

I följande text presenteras studier som förslår lämliga pedagogiska aktiviteter inom området positionssystem och talbaser för varje kategori i Lundes arbetsmodell.

Zhou, Peverly och Jiasui (2005) belyser upprepade resultat av flera olika undersökningar, till exempel Geary et al (1993), Stevenson et al (1993) och Zhou et al (2000), som visar att asiatiska grundskoleelever presterar bättre än amerikanska grundskoleelever inom aritmetik och talförståelse. I sin artikel ”Understanding early matematical compentencies in American and Chinese children” (2005) diskuterar författarna hypoteser för att förklara fenomenen. En av de utpekade faktorerna är hur arbetsområdet undervisas. I de länder som har bättre resultat ställer lärare högre krav på precision och rationalitet bakom aritmetiken. Lärarna uppmuntrar också eleverna att komma på egna logiska resonemang och beräkningsprocedurer för att lösa ett probem. Jämför med de amerikanska lärare visar de definitioner samt procedurer och eleverna ska enbart memorisera dessa. Undervisningsmetoden menar författarna är en av anledningarna till att de undersökta amerikanska eleverna skulle prestera generellt sämre än de asiatiska.

Larsson & Larson (2011) kopplar begreppen positionssystemet och talbaser till ett (kultur)-historisk kontext. I sin artikel listade författarna ”kula” historier från det gamla Egypten till datorns era. Begreppen upplevdes inte lika tråkiga länge utan skulle bli mycket levande med flera transformationer under olika tidsperioder. Författarna uppmuntrar dessutom att visa den roliga sidan av positionssytemet och talbaser som är dolda i det vardagliga livet. ”Titta efter så ser ni att Kalle Anka och hans vänner bara har **fyra fingrar** på varje hand. Detta talsystem kanske dina elever kan beskriva och hitta på tecken till?” (Larsson & Larson, 2011, s. 52). Lärare kan även stimulera den aktiva inlärningsprocessen med pedagogisk lek. En ”levande räknedisplay”, där elever räknar upp en arm för att visa en etta och låter armarna falla nedåt för att visa en nolla, är en vanlig lek för att undervisa det binära systemet.

Trygg (2008) öppnar nyanserade tankar inom det binära systemet med ett matematiktrick ”binär tankeläsning”. Trick som följande väcker enligt Trygg (2008) elevers nyfikenhet och resulterar en lust för att förstå och avslöja hur tricket fungerar. Trickets material och framträdande sammanfattas enligt följande:

<u>Steg 1:</u> Skriv ut fem tabeller enligt figurerna nedan och namnge tabellena, till exempel Ana, Birgitta, Cecilia, David och Edvin.

Ana

1	3	5	7
9	11	13	15
17	19	21	23
25	27	29	31

Birgitta

2	3	6	7
10	11	14	15
18	19	22	23
27	26	30	31

Cecilia

4	5	6	7
12	13	14	15
20	21	22	23
28	29	30	31

David

8	9	10	11
12	13	14	15
24	25	26	27
28	29	30	31

Edvin

16	17	18	19
20	21	22	23
24	25	26	27
28	29	30	31

<u>Steg 2:</u> Be en elev att tänka på ett heltal mellan 1 och 31 och för att sedan ge korten och välja alla tabeller (eller vänner) som innehåller elevens tal. Läraren ser nu inte korten.

<u>Steg 3:</u> Eleven berättar för läraren vilka vänner har valts och läraren kan avslöja det dolda talet.

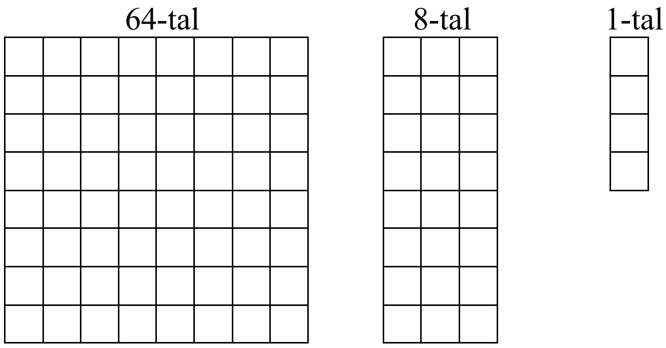
Läraren kan ”läsa tankarna” eftersom elever omedvetet har berättat för läraren det dolda talet i binär form. Tabellen *Ana* innehåller alla tal mellan 1 och 31 som behöver ett sista ental i det binära systemet. På samma sätt innehåller tabellerna Birgitta, Cecilia, David och Edvin alla tal som behöver två-tal, fyra-tal, åtta-tal och sexton-tal. Om en elev exempelvis valde talet sex, ska eleven välja alla de tabeller som innehåller sexan, därmed Birgitta och Cecilia. Eftersom läraren vet att Birgitta är ett två-tal och Cecilia är ett fyra-tal, kan hen konvertera till binärt tyst för sig själv till $(00110)_2$ och vet därmed att eleven har valt en sexa. Om eleven, i ett annat fall, plockar ut alla tabellerna, måste det valde talet vara $(11111)_2$ i det binära systemet, vilket därmed motsvarar $(31)_{10}$ i decimalsystemet.

Många forskare, såsom Bentley (2008) och Lunde (2011) är överens om att det matematiska språket är en av de viktiga nycklarna till undervisningens framgång. Hur effektivt lärare kommunicerar med elever i sin undervisning avgör hur mycket kunskap elever kan lära sig.

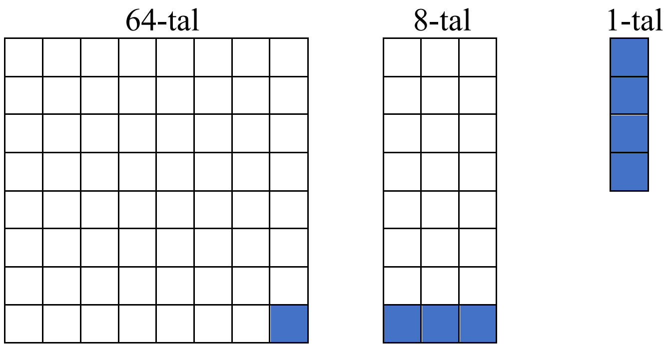
Carden och Cline (2015) hävdar att en avgörande roll är kommunikation via visualisering mellan lärare och elever i matematikundervisningen. Enligt deras studie minskar visualiseringen minnesbeslastningen för elevers inlärningsprocess men även höjer elevers förmåga i att analysera och organisera abstrakt och komplicerad information.

Ett exempel med visualiseringsmetoden som presenterades i Hilling Draths artikel (2007) användes för att förklara delbarskriteriet för 7 i talbasen 8. En vanlig fråga skulle vara om $(134)_8$ är delbar med 7. Lösningen består av tre steg.

Steg 1: Låt en 8x8-kvadrat representera 64-tal i basen 8. Varje kolumn med dimensionen 1×8 representerar 8-tal och varje liten ruta motsvarar ett ental. Talet $(134)_8$ kan presenteras enligt följande figur.



Steg 2: Måla sifforna i talet. I detta fall är $1,3 \; och \; 4$.



Steg 3: Avgör om talet är delbar med 7 med hjälp av siffersumman.

Summan av de vita rutorna som är kvar är en faktor av sju eftersom alla rutor kan grupperas i grupper om sju. Om summan av de målade rutorna också är en faktor av sju, är talet delbart med sju. I detta fallet är summan av de målade rutorna åtta och därmed är talet $(134)_8$ inte delbart med sju.

8 Diskussion och slutsats

För att avrunda studien kommer vi föra en diskussion i tre delar. Till att börja kommer en metoddiskussion föras kring hur arbetet gått till. Vidare kommer resultatdiskussionen innehålla en överläggning kring vårt resultat tillsammans med förslag till vidare forskning. Kapitlet avslutas med en slutsats som kommer summera studiens resultat.

8.1 Metoddiskussion

Till att börja kan det nämnas att en tydlig styrka med föreliggande litteraturstudie är att resultatet kan presenteras lättöversiktligt för läsare inom det utvalda området. Dock finns en vanlig svaghet i att litteraturstudier eventuellt kan presentera en begränsad del av all tillgänglig forskning (Forsberg & Wengström, 2015, s. 26). Vår studie gjorde en systematisk sökning i valda vetenskapliga databaser, med upp till fem sökord som ska finnas i texten, vilket resulterade i att en avgränsning av databaserna gjordes gentemot valt område. Efter flera sökningar hittades lämpliga nyckelord, vilka underlättade sökarbetet och antalet sökord kunde minska. Därefter identifierae vi ytterligare texter genom att jämföra specifika texters tillhörande referenslista. Tillvägagångssättet har resulterat i flera relevanta texter med tanke på den tidsbegränsning som gavs. Däremot är det väsentligt att påpeka, som ovan nämns, att vissa texter kan förbisetts med tanke på att sökningarna enbart omfattar den ram författarna skrev. Trots att författarna slutligen skulle referera till varandra utan inkludering av nya relevanta texter, var vi medvetna om risken att eventuellt ha missat någon relevant text. Risken skulle dock inte vara alltför angelägen eftersom funna texter besvarade ställda frågeställningar, samtidigt som de tillfredsställde de källkritiska frågorna.

Att inte inkludera samtliga stora regioners talsystem i studien kan ses som en begränsning. Exempelvis skulle aztekernas talsystem med bas 20 kunna komplettera. Dock kunde inte alla inkluderas av tid- och utrymmesskäl. Vi gjorde vårt urval utifrån dess betydelse i utvecklingen till det talsystem som används av oss idag. En förbättringspotential skulle därmed kunna vara att vidare analysera de talsystem vi exkluderat.

Vidare har studien har gett en överskådlig bild över hur talsystem utvecklats i olika delar av världen för att sedan resa mellan olika kulturer. Genom att analysera utvalda talsystems historia har vi förstått att berättelsen är komplex och har fler historier än vad som hinns berättas. Med nyckelpersoner och egenskaper från öst till väst har talsystemet visat att det är välutvecklat och sofistikerat. Allt eftersom text bearbetades tolkade vi hur författarna redogjorde olika varianter av liknande fakta utifrån hur de hittat informationen. Studien kan eventuellt ge intrycket att historien varit relativt enkelspårig, emellertid är inte det fallet. Texten är skriven för att ge en överskådlig syn när och hur talsystemen utvecklats för att underlätta för läsaren. Dock är framstegen levande och sker i samklang med ytterligare kulturell och vetenskaplig utveckling, vilket betyder att utvecklingen aldrig riktigt stått still.

Analysen av styrdokument och läromedel gav en översiktlig bild hur talsystem och talbaser hanterats i skolan nu och i tidigare skolformer. En eventuell brist i att enbart tolka äldre läroplaner kan vara deras kortfattade karaktär. Trots att kommentarer bearbetats finns det fortfarande möjlighet till tolkning för pedagogerna. Detta skulle kunna gett utrymme att bearbeta talsystem och talbaser, utan att det finns specifierat i läroplanen. Gällande läroboksanalysen inkluderades den för att ge en översiktlig syn hur talsystem och talbaser skulle kunna undervisas i skolan. En uppenbar begränsning är analysens magnitud. Fler böcker skulle behöva undersökas tillsammans med diskussioner med pedagoger. Dessutom kan online-material, såsom videor tillsammans med interaktivt material nyttjas, vilka tar större plats i klassrummet (NCM, 2013) behöva analyseras. Metoden att studera läroböcker var arbetssam och långsam. Detta eftersom varje textdel och övning noggrant behövde analyseras.

Vissa texter, framförallt från de sista kapitlen, redovisar resultat från en yngre målgrupp än vad vi egentligen riktar in oss på. En anledning kan vara att talsystem främst behandlas i grundskolan, vilket reflekterar forskningsunderlaget. Beslut att inkludera dessa texter gjordes mot bakgrund att liknande problematik fortfarande existerar i högre åldrar om de inte åtgärdas i lägre. Dock kan detta vara en begränsning då elever har andra förutsättningar i äldre åldrar.

En del av relevanta artiklar har hämtats från tidskriften ”Nämnaren” som publiceras av Nationellt Centrum för Matematikutbildning. Artiklarna skrevs bland annat av forskare och lärare med direkt koppling till matematikdidaktik. Däremot är inte artiklarna direkta forskningsartiklar, utan snarare sammanfattningar av en eller flera forskningsarbeten. Emellertid har författare i listade artiklar från Nämnaren inte alltid refererat till någon specifik forskning, utan författarna argumenterar utifrån deras egna emperiska erfarenheter eller egna forskningar. Vi har valt att inkludera dessa då vi anser att det å ena sidan varit problematiskt att hitta relevanta forskningsartiklar. Å andra sidan anser vi dem lämpliga eftersom de överensstämmer med forskning vi hittat och dessutom utgår från svensk skolmiljö.

8.2 Resultatdiskussion

Frågan om hur talsystem och talbaser definieras har besvarats i kapitel två. Tre kategorier av talsystem har definierats och en allmän formel för positionssytem med en godtycklig talbas har också presenterats. Definitioner för kategorier är tydliga men att klassifiera ett visst talsystem i en viss kategori inte är lika uppbenbart. Det romerska talsystemet togs tidigare upp som ett exempel av det additiva systemet, där värdet inte beror på notationernas position. Det visar sig däremot i flera fall att talets värde är faktiskt är beroende av notationernas position. Till exempel är VI lika med sex samtidigt som IV är lika med fyra. Med denna kunskap är det mer besvärligt att svara på hur det romerska systemet ska klassas. Med tanke på att tecknens position faktiskt spelar roll bör det inte tillhöra det additiva systemet. Det kan heller inte klassas som ett hybridsystem eftersom egenskapen multiplikation saknas. Det sista alternativet, positionssystemet, skulle heller inte inte vara lämpligt, eftersom enbart operationen mellan notationer ändras medan notationers värde fortfarande är samma. V kommer alltid betyda fem och I kommer alltid betyda ett. Ifrah (2001, ss. 483-484, 498) nämner tre underkategorier för det additiva systemet. Dock saknas en lämplig underkategori för egenskaper likt den som beskrivs ovan. Denna avsaknad skulle exempelvis kunna besvaras med ytterligare forskning kring talsystems underkategorier, exempelvis kring vad som kännetecknar olika additiva system och hur dessa kan kategoriseras.

Gällande historiska texter så kunde även de vara otydliga eller rent ut motstsridiga. Två tydliga exempel kommer diskuteras för att beskriva detta. Det första handlar om de egyptiska tecknen vilket illustrerar hur författarna inte alltid varit överens. Thompson (1996, s. 27), McLeish (1994, s. 48), och Kline (1972, s. 16) beskriver hur tecknen skrivs från höger till vänster, medan Ifrah (2001, s. 246) och Johansson (2013b, s. 32) betonar att texten följer läsriktningen, att de alltså kan läsas i olika riktningar. I fall likt detta var fortsatt undersökning tvunget att göras kring vilka som skulle följas. Eftersom Ifrahs text ofta nämns i vetenskapliga texter samt att McLeish uppvisar osäkerhet i detta unika fall valdes alternativet att notationer följer läsriktningen. Det andra exemplet som ska diskuteras är Yongs och Angs (2004) förslag att det nuvarande positionssystemet har rötter i det kinesiska talsystemet. Exemplet illustrerar att all fakta ännu inte är på plats och att matematikens historia fortfarande är ett aktuellt område för vidare forskning. Vi väljer att ställa oss kritiska till att det kinesiska talsystemet står som grund till det decimala. Anledningen är att det idag finns tydliga bevis på indisk influens, dock är kopplingarna i dagsläget svaga kring Kinas inblandning.

Vidare, angående historian, inser vi efter studien att det kan finnas ett värde i att diskutera talsystemens bakgrund i undervisningen. En tydlig styrka är hur olika egenskaper hos talsystem presenteras var för sig. Att exempelvis tydliggöra den additiva egenskapen genom det egyptiska talsystemet skulle kunna hjälpa elever förstå den unika egenskapen. Dessutom kan även andra talbaser än det decimala bearbetas med hjälp av ett kinesiskt räknebräde. En tydlig visualisering med olika tecken, istället för antal, kan underlätta för elever att förstå positionsvärde. Vi har även sett nya möjligheter att undervisa de problem elever tidigare stött på. Att dividera med liggande stolen har tidigare kunnat vara problem hos elever, däremot är egyptisk division en alternativ metod som kan hjälpa elever att tydligare se sambandet mellan täljare, nämnare och kvot genom multiplikation.

Att inkludera talsystemens historia i undervisning kan även ge möjligheten att diskutera hur lärdomar kan resa över kontinenter. Talsystemens utveckling är ett ämnesöverskridande exempel där eleverna för möjligheten att tolka huruvida kulturella utbyten är en viktig byggsten i människans utveckling.

Förutom det historiska perspektivet, vilket omfattar bidraget av talsystemet och talbaser på samhällelig nivå, beskriver denna studie dessutom deras påverkan på individnivå genom elevers förmågor. Avsnitt fyra kopplar det relevanta centrala innehåll med sju förmågor som elever behöver utveckla i den matematiska undervisningen. Genom kopplingen, har en diskussionsfråga lyfts upp angående om gymnasieelever kan utveckla yrkesrelaterade förmågor tillräckligt när enbart egenskaper hos olika talbaser ska undervisas i matematik 1b och 1c, se tabell 2. Med förutsättningen att en gymnasieelev har en stark taluppfattning i decimalsysstemet från grundskolan, kan undervisningarna i matematik 1b och 1c uppfylla de flesta vanliga yrkens krav. Däremot räcker det inte i vissa yrken att enbart lära sig egenskaper. De kräver en djupare kunskap om såsom algoritmer för att kalkylera beräkningsoperationer hos olika talbaser. Brezezinski (2001a) har gett flera exempel på sådana algoritmer hos det binära talsystemet i säkerhetens tjänster, och ett ytterligare exempel kan ses hos industrielektriker, vilka oftast läst kursen ma1a, som arbetar dagligen i det binära systemet.

Vidare gav läromedelsanalysen idéer hur talsystem och talbaser kan hanteras i klassrummet. Enligt tabell 4 och tabell 5 ovan finns det flera hål som skulle behöva fyllas av idéer från pedagogen. Exempelvis hanterar ingen av de studerade böckerna någon form av modellering. Dessutom hanteras problemlösning enbart i en bok. Trots att läroboksanalysen gav en överblick kan vidare forskning göras för att ge en ytterligare klarare bild över hur området faktiskt bearbetas i klassrummet. Speciellt i samband med den digitala inkludering som sker i klassrummen.

I samband med analysen av läromedel märktes att positionssystemet enbart definieras med potenser i böckerna 8 och 1c. Detta ser vi som en brist i läromedlen. Eftersom potenser introduceras i bok 8 skulle den antingen där eller bok 9 bygga vidare på potensidén och låta eleverna gå från att beskriva positionssystemet med ord till siffror. Detta skulle eventuellt kunna underlätta förståelse kring det moderna positionssystemet och basskiften skulle kunna uppfattas smidigare.

Vi har även redovisat elevers svårigheter med decimalsystemet och övriga talbaser. Svårigheterna summerades i fem kategorier. Trots att kapitel sex definitivt kan svara på vår frågeställning ”vilka svårigheter kan elever uppleva i arbetet med talsystem och talbaser?”, finns det fortfarande utrymme att vidareutveckla. En diskussionfråga skulle vara om elever som inte har svenska som modersmål har liknande svårigheter i växelverkan mellan sifferkoden och den språkliga koden. Det visar sig att problemet varierar i olika språk. Till exempel, har engelska elever också problemet gällande reversering medan vietnamesiska elever inte känns vid svårigheten. Vidare förskning kring växelverkan mellan sifferkoden och den språkliga koden i olika språk behövs med hänsyn till att sverige har mottagit tiotusental ensammkommande barn under flyktingkrisen de senaste åren (Migrationsverket, 2017).

En annan diskussionfråga handlar om taluppfattningar hos gymnasie- och vuxenelever. Svårigheterna riktas gentemot elever som är i yngre årskurser eftersom eleverna är målgruppen i de refererade studierna. Det är nödvändigt för gymnasielärare att vara medvetna om hur svårigheter hos elever i förskolan, lågstadiet, och mellanstadiet påvekar deras uppfattningar kring talsystemet och talbaser i högstadiet, gymnasiet och även utanför skolan. Däremot behövs ytterligare forskning kring taluppfattningar och inlärningen kring området hos gymnasie- och vuxenelever eftersom eleverna har annorlunda förutsättningar än yngre elever.

Vi kan även nämna att våra lösningsförslag till de listade svårigheterna är värdefulla att läsa, dock är de inte tillräckliga. Till exempel, är Hilling Draths (2007) visualiseringmetod användbar för att beskriva abstrakta begrepp såsom tiondelar och hundrationdelar men fortfattaren medger att metoden inte fungerar lika bra med tusendelar och så vidare. En annan visualeringmetod bör sökas för att överkomma begränsningen. Abacus, å ena sidan, är ett bra lärverktyg men å andra sidan är den nuvarande generationen mer intresserad av digitala medel. Detta leder till en möjligen ny frågeställning för vidare arbete: hur/på vilka sätt kan digitala lärverktyg hjälpa elever förstå positionssystemet och talbaser?

Slutligen vill vi nämna att vi kommit fram till viktiga utvecklingsmöjligheter hos oss som lärare gällande elevers svårigheter med talsystem och talbaser. Området vi behandlat i studien är väsentligt, både enligt kursplaner och läroplaner, och bearbetas av elever från tidigare åldrar till senare. Vad vi under arbetets gång förstått är att många ytterligare problem, som illustreras i kapitel sex, kan enklare lösas om elever har en gedigen grund att stå på gällande positionssystemet och dess egenskaper. Om vi förlitar oss på läromedel som liknar de som analyserats ser vi att det finns brister, vilka kan ge farliga följder för elever om de inte behandlas. Exempel kunde vara historiska talbaser som, om eleven inte hinner behandla i årskurs åtta, kan missa helt innan gymnasiet. Lärare behöver anta en aktiv roll och komplettera de områden som saknas i litteraturen och förtydliga egenskaperna hos positionssystem och talbaser.

8.3 Slutsats

Denna studie har skapat en överskådlig summering kring talbaser och talsystem. Detta har gjorts genom att först redovisa tre olika kategorier av talsystem för att sedan exemplifiera dessa. Vidare har historiska perspektiv getts för att spegla hur talsystem och talbaser utvecklats i olika delar av världen samt varför talsystemet vi främst använder idag har de egenskaper det har. Dessutom har en historisk tillbakablick gjorts kring talsystem och talbaser i svensk undervisning, tillsammans med en kortare kartläggning kring hur området skulle kunna behandlas. Slutligen har problematik hos elever och undervisningssituationer getts tillsammans med lösningstaktiker och strategier. Mot denna bakgrund anser vi att frågeställningarna är besvarade.

Från svaren vi fått på våra frågeställningsfrågor anser vi att talsystem och talbaser splelar en betydelsefull roll i matematikundervisningen. Området är inte bara ett kunskapkrav i styrdokument utan det bidrar även till att utveckla elevernas förmågor i vardags- och yrkesliv. Undersökningen av läroplaner och läromedel alarmerar däremot brister. Läroplaner beskriver inte nödvändigt innehåll och kunskapsmål vissa yrken kräver och aktivt använt läromedel möjliggör inte för elever att träna alla nödvändiga förmågor. Förutom bristerna har elever även olika svårigheter i talsystem och talbaser. Att, som pedagog, vara medveten om dessa svårigheter är nödvändigt för att kunna anpassa undervisningen och hjälpa eleverna.

Utvecklingen av talsystem och talbaser från det historiska perspektivet ger inspiration till den livlånga bildningen hos eleverna. Dessutom berättar historierna hur människor, oavsett från vilka kuluter eller religioner, har bytt kunskaper, löst probelm och vuxit tillsammans. I vår kaotiska värld idag där segregation och konflikt orsakar fördomar och separerar mänskligheten, är det viktigare än någonsin att undervisa vår historiska utveckling till kommande generationer.

9 Referenslista

Anderson, P. V. (2011). *Technical Communication: A reader-Centered Approach* . Boston : Wadsworth, Cengage Learning .

Anghileri , J. (2000). *Teaching number sense* . New York: Continuum .

Aspvall, B., & Pettersson, E. (2007). Från datornas värld. *Nämnaren*(Nr 2).

Bentley, P.-O. (2008). *Svenska elevers matematikkunskaper i TIMSS 2007.* Stockholm: Skolverket .

Boyer, C. B. (1944). Fundamental Steps in the Development of Numeration. *The University of Chicago Press, 35*(2), ss. 153-168.

Boyer, C. B., & Merzbach, U. C. (2011). *A History of Mathematics* (3rd edition uppl.). Hoboken, New Jersey: John Wily & Sons Inc.

Brezezinski, J. (2001a). Om felkorrigerande koder-Matematik i säkerhetens tjänst. *Närmnare*(Nr 3).

Brzezinski, J. (2001b). Om krypteringen - Matematik i säkerhetens tjänst. *Nämnaren*(Nr 4). Hämtat från http://ncm.gu.se/media/stravorna/1/a/1a_brzezinski.pdf den 23 09 2017

Carden, J., & Cline, T. (2015). Problem solving in mathematics: the significance of visualisation and related working memory. *Educational Psychology in Pratice, 31*(3), 235-246.

Carlsson, S., Hake, K.-B., & Öberg, B. (2012). *Matte Direkt.* Stockholm: Sanoma Utbildning.

Chalmers Teknologiska Universitet. (2008). Bitar, bytes och sånt. Göteborg, Sverige. Hämtat från http://www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/GU/MMG410/V08/FAQ/bytes.html den 10 09 2017

Chrisomalis, S. (2010). *Numerical notation: A comparative history.* New York: Cambridge University Press.

ComputerSweden. (u.d.). *it-ord.idg.se*. Hämtat från teckensträng: https://it-ord.idg.se/ord/teckenstrang/ den 12 10 2017

Dahlgren, H. (2009). *Matematikundervisningen för 100 år sedan.* ICMI, International Centre of Mathematical Instruction.

Dahlin, E. M. (1875). *De matematiska vetenskapernas historia i Sverige före 1679.* Uppsala: Uppsala Universitet.

Dohrn- van Rossum, G. (1996). *History of the Hour: Clocks and Modern Temporal Orders.* Chicago: The University of Chicago Press.

Dunér, D. (den 1 12 2002). *Talsystem på kunglig befallning*. Hämtat från Forskning & Framsteg: http://fof.se/tidning/2002/8/talsystem-pa-kunglig-befallning den 6 10 2017

Edner, T. (2014). *Att undervisa multiplikation och division med 10,100,1000 - Learning study i praktiken.* Stockholm: Pedagog Stockholm.

Einarsson , M. (2003). *Historiska Matematikberättelser - introduktionsberättelse till nio olika matematikområden.* Örebro.

Floberg, A., & Löfström, H. (2010). *Matematiska begrepp inom positionssystemet - vilka är svårigheter?* . Linnéuniversitetet.

Forsberg, C., & Wengström, Y. (2015). *Att göra systematiska litteraturstudier* (Fjärde uppl.). Stockholm: Natur & Kultur.

Fröberg, B. (2013). *Lärobokens roll i matematikundervisningen.* Specialpedagogiska institutionen. Stockholm: Stockholms Universitet.

Fredriksson, A., Larsson, E., & Torstensson, S. (2014). Tio fingrar . Göteborg: Göteborg Universitet .

Göteborgs Universitetsbibliotek. (den 22 6 2017). *Källkritiska frågor*. Hämtat från Göteborgs Universitetsbibliotek: http://www.ub.gu.se/skriva/kallkritik/fragor/ den 13 10 2017

Gandz, S. (november 1931). The Origin of the Ghubār Numerals, or the Arabian Abacus and the Articuli. *16*(2), ss. 393-424.

Geary, D. C., Bow-Thomas, C. C., Fan, L., & Stiger , R. S. (1993). Even Before Formal Instruction, Chinese Children Outperform American Children in Mental Addition. *Child Development, 8*, 517-29.

Gennow, S., Gustafsson, I.-M., & Silborn, B. (2011). *Exponent.* Malmö: Gleerups Utbildning AB.

Glaser, A. (1971). *History of binary and other nondecimal numeration.* Michigan: Tomash Publishers .

Guedj, D. (1997). *Numbers:The universal languange.* (L. Frankel, Övers.) New York: Harry N.Abrams, Inc.

Hatami, R. (2012). Recknekonsten. *Nämnaren*(1), ss. 17-20.

Helenius, O., Johansson, M. L., Lange, T., Meaney, T., & Wernberg, A. (2016). Räkna. i *Matematikdidaktik i förskolan.* Malmö: Gleerups.

Hilling Drath, M. (2007). Konkretion av decimaltal - en nödvändig ingrediens för förståelse. *Nämnaren*(Nr 1).

Hodgkin, L. (2005). *A History of Mathematics: From Mesopotamia to Modernity.* New York: Oxford University Press Inc.

Ifrah, G. (2001). *Räknekonstens kulturhistoria - Från forntiden till dataåldern, del 1.* (B. Ellenberger, Övers.) Smedjebacken, Sverige: Wahlström & Widestrand.

Ifrah, G. (2002). *Räknekonstens kulturhistoria - Från forntiden till dataåldern, del 2.* (B. Ellenberger, Övers.) Smedjebacken, Sverige: Wahlström & Widestrand.

Johansson, B. (2013b). *Matematikens historia* (Andra upplagan uppl.). Lund: Studentlitteratur AB.

Kline, M. (1972). *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times* (Fourth printing uppl.). New York: Oxford University Press.

Knuth, D. E. (1997). *The Art of Computer Programming: Positional Number Systems* (3 uppl., Vol. Volume 2: Seminumerical Algorithms). Boston, MA, USA: Addison-Wesley Professional. Hämtat från http://www.informit.com/articles/article.aspx?p=2221791 den 10 09 2017

Lam, L. Y., & Ang, T. S. (2004). *Fleeting Footsteps: Tracing the Conception of Arithmetic and Algebra in Ancient China.* Singapor: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.

Larsson, K. (2011). *Varför ska man "göra olika"?: En litteraturstudie om beräkningsstrategier för subtraktion.* Stockholm: Institutionen för matematikämnets och naturvetenskapsämnenas didaktik, Stockholm Universitet.

Larsson, K., & Larson, N. (2011). Räkning-en kul historia. *Nämnaren*(Nr 2).

Lester, F., & Lambdin, D. (2007). Undervisa genom problemlösning. i J. Boesen (Red.), *Lära och undervisa i matematik - internationella perspektiv* (ss. 95-108). Göteborg: NCM, Göteborg Universitet.

Lombardi, M. A. (den 5 Mars 2007). Why is a minute divided into 60 seconds, an hour into 60 minutes, yet there are only 24 hours in a day? *Scientific American*.

Lunde, O. (2011). Mota matematiksvårigheter. i G. Berit Bergius, L. Emanuelsson, & R. R. Emanuelsson, *NTema8: Matematik - ett grundämne* . Göteborg: Nationellt Centrum för Matematikutbildning.

Lundgren, U. P., Säljö, R., & Liberg, C. (2014). *Lärande, Skola, Bildning* (3 uppl.). Stockholm: Natur& Kultur.

Mankiewicz, R. (2000). *Matematiken genom tiderna.* (L. Olofsson, Övers.) London: Albert Bonniers Förlag.

McIntosh, A. (2014a). Positionssystemet. i *Förstå och använda tal - en handbok.* Göteborg: Nationellt Centrum för Matematikutbildning.

McIntosh, A. (2014b). Tal i decimaform. i *Förstå och använda tal-en handbok.* Göteborg: Nationellt Centrum för Matematikutbildning.

McLeish, J. (1994). *Matematikens Kulturhistoria* (2:a upplagan uppl.). (J. Wahlén, Övers.) Falun: Bokförlaget Forum AB.

Migrationsverket. (07 2017). *Migrationsverket.se.* Hämtat från Aktuell om ensamkommande barn och ungdomar:

https://www.migrationsverket.se/download/18.4100dc0b159d67dc614c82e/1499252053243/Aktuellt+om+juli+2017.pdf den 17 10 2017

Nationalencyklopedin. (2017). *noll*. Hämtat från http://www.ne.se/uppslagsverk/encyklopedi/l%C3%A5ng/noll den 08 09 2017

NCM. (den 12 10 2013). *US: 50.000 studenter följer online-kurs i matematik*. Hämtat från Nationellt Centrum för Matematikutbildning: http://ncm.gu.se/node/6327 den 15 10 2017

Neuman, D. (1989). *Landet Längesen : matte för 2000-talet. Lärarhandledning : [till elevhäfte 1-4].* Stockholm: Utbildningsförl.

O'Connor, J. J., & Robertson, E. F. (November 2000a). *A history of Zero*. Hämtat från MacTutor History of Mathematics archive: http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/HistTopics/Zero.html den 19 September 2017

O'Connor, J. J., & Robertson, E. F. (2000b). *Indian numerals*. Hämtat från MacTutor History of Mathematics archive: http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Indian_numerals.html

O'Connor, J. J., & Robertson, E. F. (januari 2001). *The Arabic numeral system*. Hämtat från MacTutor History of Mathematics archive: http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Arabic_numerals.html den 4 10 2017

Osborn, D. (2017). *The history of numbers*. Hämtat från Vedic Sciences: http://vedicsciences.net/articles/history-of-numbers.html#History-Numbers den 3 10 2017

Petersson, J. (2008). Delbarhetsregler. *Nämnaren*(4).

Randolph, T. D., & Sherman, H. J. (2001). Alternative algorithms: Increasing options,reducing errors. *Teaching Children Mathematics, 7*(8), 480-484.

Rodhe, S. (2002). *Matematikens utveckling i Sverige fram till 1731.* Uppsala: Uppsala universitet.

Skolinspektionen. (2009). *Undervisningen i matematik i gymnasieskolan.* Stockholm: Skolinspektionen.

Skolverket. (2011a). *Läroplaner ämnen och kurser.* Hämtat från Matematik: https://www.skolverket.se/laroplaner-amnen-och-kurser/grundskoleutbildning/grundskola/matematik#anchor3 den 14 09 2017

Skolverket. (2011b). *Om ämnet matematik.* Hämtat från Skolverket: https://www.skolverket.se/laroplaner-amnen-och-kurser/gymnasieutbildning/gymnasieskola/mat/comment.pdf?subjectCode=MAT&commentCode=ALL&lang=sv den 20 09 2017

Skolverket. (2011c). *Skolverket*. Hämtat från Läroplaner, ämnen och kurser på gymnasiet: https://www.skolverket.se/laroplaner-amnen-och-kurser/gymnasieutbildning/gymnasieskola/mat#anchor2 den 14 09 2017

Skolverket. (den 27 1 2015). *På vilket sätt kan läromedel styra undervisningen?* Hämtat från Skolverket: https://www.skolverket.se/skolutveckling/forskning/didaktik/tema-laromedel/pa-vilket-satt-kan-laromedel-styra-undervisningen-1.181693 den 8 10 2017

Skolverket. (2017a). *Förskoleklassens matematik*. Hämtat från https://goo.gl/YGK5tc den 16 09 2017

Skolverket. (2017b). *Nära examen.* Stockholm: Skolverket.

Skolverket. (den 28 09 2017c). *Stora skillnader i gymnasiebehörighet mellan elevgrupper.* Hämtat den 16 10 2017

Språkrådet. (2008). *Svenska skrivregler.* Stockholm : Liber.

Språkrådet. (2014). *Myndigheternas skrivregler.* Stockholm: Norstedts Juridik AB.

Stevenson, H. W., Chen, C., & Lee, S. (1993). Mathematics Achievement of Chinese, Japanese, and American Children: Ten Years Later. *Science, 259*, 53-58.

Taub, D. (2013). Den dolda ettan. *Nämnaren*(Nr 1).

Thompson, J. (1991). *Wahlström & Widstrands Matematik Lexikon.* Stockholm: Wahlström & Widstrand.

Thompson, J. (1996). *Matematiken i historien.* Lund: Studentlitteratur.

Trygg, L. (2008). Tankeläsare. *Nämnaren*(Nr 4).

Wigforss, F. (1954). *Den grundläggande matematikundervisningen.* Stockholm: Bergvalls förlag.

Violatti, C. (den 24 9 2013). *Ancient*. Hämtat från Greek Mathematics: https://www.ancient.eu/article/606/greek-mathematics/ den 25 9 2017

Wistedt, I. (1991). Om vardagsanknytning av skolmatematiken. i G. Emanuelsson, B. Johansson, & R. Ryding, *Problemlösning.* Lund: Studentlitteratur.

Zhou, Z., Perverly, S. T., Boehm, A. E., & Lin, C. D. (2000). American and Chinese Children's Understanding of Distance, Time, and Speed Interrelations. *Cognitive Development, 15*(2), 215-40.

Zhou, Z., Peverly, S. T., & Jiasui, L. (den 1 Oktober 2005). Understanding Early Mathematical Competencies in American and Chinese Children. *School Psychology International, 26*(4), ss. 413-427.

10 Bilaga

MA - Topplista

Period: 20170101–20171003
Sålt fler än: 200

Artikelnummer:	Titel:	Antal	
Sanoma Utbildning			
9789152338261	Koll på matematik 3B	979	st
9789152308806	Matte Direkt Safari 3A Elevbok NY UPPLAGA	957	st
9789152308783	Matte Direkt Safari 2A Elevbok NY UPPLAGA	877	st
9789152335390	Koll på matematik 6B	864	st
9789152308820	Matte Direkt Borgen 4A Grundbok (2011)	834	st
9789152308813	Matte Direkt Safari 3B Elevbok NY UPPLAGA	746	st
9789152308790	Matte Direkt Safari 2B Elevbok NY UPPLAGA	719	st
9789152308851	Matte Direkt Borgen 4B Grundbok (2011)	699	st
9789152308769	Matte Direkt Safari 1A Elevbok NY UPPLAGA	640	st
9789152338230	Koll på matematik 3A	637	st
9789152308882	Matte Direkt Borgen 5A Grundbok NY UPPLAGA 2012	591	st
9789152308943	Matte Direkt Borgen 6A Grundbok NY UPPLAGA 2012	580	st
9789152302484	Matte Direkt 9 Grundbok uppl 2 från 2011	536	st
9789152303696	Prio matematik 7 Grundbok	532	st
9789152308837	Matte Direkt Borgen 4A Läxbok (2011)	525	st
9789152308974	Matte Direkt Borgen 6B Grundbok NY UPPLAGA 2012	521	st
9789152308912	Matte Direkt Borgen 5B Grundbok NY UPPLAGA 2012	501	st
9789152308776	Matte Direkt Safari 1B Elevbok NY UPPLAGA	500	st
9789152333785	Koll på matematik 2B	500	st
9789152333754	Koll på matematik 2A	493	st
9789152320396	Koll på matematik 1A	480	st
9789152333051	Koll på matematik 5A	460	st
9789152320518	Prio matematik 8 Grundbok	455	st
9789152328408	Koll på matematik 1B	437	st
9789152333709	Koll på matematik 5B	423	st
9789162299064	Matte Direkt 8 Grundbok uppl 2 från 2010	421	st
9789162292553	Matte Direkt 7 Grundbok Uppl 2 från 2009	394	st
9789152335383	Koll på matematik 6A	389	st
9789152317259	Koll på matematik 4A	379	st
9789152316474	Bryggan Grundläggande matematik	355	st
9789152329214	Koll på matematik 4B	326	st
9789152308899	Matte Direkt Borgen 5A Läxbok NY UPPLAGA 2012	312	st
9789152339961	Fokus på Matematik 2 - grundläggande nivå	302	st
9789152343180	Matte Direkt 8 Grundbok uppl 3 från 2017	285	st
9789152308929	Matte Direkt Borgen 5B Läxbok NY UPPLAGA 2012	278	st
9789152327951	Fokus på Matematik 1 - grundläggande nivå	276	st
9789152332757	Matematik Origo 1a	259	st
9789152337486	Matte Direkt 7 Grundbok Uppl 3 från 2016	254	st

9789152327203	Bryggan Bas	233	st
9789152324721	Prio matematik 9 Grundbok	233	st
9789152308950	Matte Direkt Borgen 6A Läxbok NY UPPLAGA 2012	219	st
9789152309063	Matte Direkt Safari 3A Läxbok NY UPPLAGA	216	st
9789152331156	Koll på matematik 4A Läxbok	205	st
Gleerups			
9789140678966	Prima Matematik 3A Grundbok, 2:a uppl	1947	st
9789140678973	Prima Matematik 3B Grundbok, 2:a uppl	1907	st
9789140678959	Prima Matematik 2B Grundbok, 2:a uppl	1836	st
9789140678935	Prima Matematik 1B Grundbok, 2:a uppl	1815	st
9789140678942	Prima Matematik 2A Grundbok, 2:a uppl	1756	st
9789140678911	Prima Matematik 1A Grundbok, 2:a uppl	1310	st
9789140689849	Mondo Matematik 2B Elevbok	260	st
9789140688514	Prima Matematik 2 Extrabok 2:a uppl	252	st
9789140689801	Mondo Matematik 1B Elevbok	239	st
9789140693570	Prima Formula 5 Elevbok 2:a uppl 2017	219	st
9789140677129	Prima Matematik 2 Utmaning	204	st
Natur & Kultur			
9789127438040	Eldorado, matte 1A Grundbok, NY UPPLAGA 2015	486	st
9789127438064	Eldorado, matte 2A Grundbok, NY UPPLAGA 2016	483	st
9789127438088	Eldorado, matte 3A Grundbok, NY UPPLAGA 2016	476	st
9789127438057	Eldorado, matte 1B Grundbok, NY UPPLAGA 2015	465	st
9789127438071	Eldorado, matte 2B Grundbok, NY UPPLAGA 2016	460	st
9789127421615	Matematik 5000 Kurs 1b Grön Lärobok	402	st
9789127423640	Matematik 5000 Kurs 2b Grön Lärobok	360	st
9789127438095	Eldorado, matte 3B Grundbok, NY UPPLAGA 2016	332	st
9789127433717	Pixel FK Grundbok, NY upplaga	307	st
9789127421585	Matematik 5000 Kurs 1a Gul Lärobok	253	st
9789127426320	Matematik 5000 Kurs 4 Blå Lärobok	236	st
9789127422537	Matematik 5000 Kurs 2c Blå Lärobok	200	st
Studentlitteratur			
9789144078779	Favorit matematik 1A - Elevpaket (Bok + digital produkt)	4968	st
9789144078793	Favorit matematik 2A - Elevpaket (Bok + digital produkt)	4059	st
9789144084435	Favorit matematik 3A - Elevpaket (Bok + digital produkt)	3887	st
9789144078601	Favorit matematik 1B - Elevpaket (Bok + digital produkt)	3787	st
9789144084428	Favorit matematik 2B - Elevpaket (Bok + digital produkt)	2652	st
9789144084442	Favorit matematik 3B - Elevpaket (Bok + digital produkt)	2412	st
9789144081588	Favorit matematik Förskoleklass	1742	st
9789144087801	Mera Favorit matematik 2A - Elevpaket (Bok + digital produkt)	1521	st
9789144087832	Mera Favorit matematik 3A - Elevpaket (Bok + digital produkt)	1374	st
9789144087825	Mera Favorit matematik 2B - Elevpaket (Bok + digital produkt)	1024	st
9789144087849	Mera Favorit matematik 3B - Elevpaket (Bok + digital produkt)	949	st
9789144087795	Mera Favorit matematik 1B - Elevpaket (Bok + digital produkt)	793	st

9789144104744	Bas Favorit matematik 4A - Elevpaket (Bok + digital produkt)	678	st
9789144088020	Mera Favorit matematik 1A - Elevpaket (Bok + digital produkt)	608	st
9789144096919	Mera Favorit matematik 4B - Elevpaket (Bok + digital produkt)	599	st
9789144104751	Bas Favorit matematik 4B - Elevpaket (Bok + digital produkt)	528	st
9789144096896	Mera Favorit matematik 4A - Elevpaket (bok + digital produkt)	506	st
9789144104768	Bas Favorit matematik 5A - Elevpaket (Bok + digital produkt)	421	st
9789144101088	Mera Favorit matematik 6B - Elevpaket (Bok + digital produkt)	303	st
9789144104775	Bas Favorit matematik 5B - Elevpaket (Bok + digital produkt)	289	st
9789144101026	Mera Favorit matematik 5A - Elevpaket (Bok + digital produkt)	228	st
9789144104782	Bas Favorit matematik 6A - Elevpaket (Bok + digital produkt)	228	st
9789144104799	Bas Favorit matematik 6B - Elevpaket (Bok + digital produkt)	222	st
Liber			
9789147085507	Matematikboken Z Lärobok, Lgr 11	390	st
9789147102532	Matematikboken Beta Grundbok	382	st
9789147124206	Livet i Mattelandet Arbetsbok Förskoleklass	333	st
9789147085477	Matematikboken Y Lärobok, Lgr 11 (från 2012)	304	st
9789147085460	Matematikboken X Lärobok, (från 2011)	303	st
9789147109883	Matematikboken Gamma Grundbok	273	st
9789147115938	Matematik X (NY upplaga 2017)	271	st
9789147102600	Tummen upp! Matte kartläggning åk 6	271	st
9789147116010	Start matematik - Matematik för nyanlända	225	st
9789147102778	Nya Matematikboken 2A Grundbok	216	st
9789147102341	Matematikboken Alfa Grundbok	211	st