INSTITUTIONEN FÖR DIDAKTIK OCH PEDAGOGISK PROFESSION

”JAG RÄKNADE MED FINGRARNA”

- en studie om elevers beräkningsstrategier i subtraktion i årskurs 3

Britt Holmberg

Uppsats/Examensarbete:	30p
Program och/eller kurs:	Masterprogrammet i ämnesdidaktik, DIM 70Ä
Nivå:	Avancerad nivå
Termin/år:	VT/2018
Handledare:	Angelika Kullberg
Examinator:	Eva Reimers
Rapport nr:	VT18-2930-DIM70Ä-001

Abstract

The aim of the study is to investigate how students in third grade solve subtractions problems and what strategies they use. Earlier research (Neuman, 1987; Svenson & Sjöberg, 1982) has shown that students leave third grade without sufficient knowledge in simple arithmetic. After a diagnose with 43 students in two classes, the students with many incorrect answers or using long time to solve the problems were selected for an interview. 18 students from the two classes were interviewed and videotaped during the last semester in grade 3 (nine years old). In the study the student's strategies solving subtraction problems with and without fingers were studied. Semi structured interview was used as method in the study. The student's strategies were analyzed with variation theory (Marton, 2015). Variation theory as a theoretical tool makes it possible to analyze how students experience numbers in different ways.

Result of the study show that 60 % of the students are using "double counting"/"keeping track" with fingers as strategy for solving simple subtraction problems. When using double counting the students tend to see numbers as single units instead of groups of number that can be composed or decomposed. Double counting/keeping track as the only strategy for solving addition and subtraction problems indicate that students can have difficulties developing advanced computational skills. Seven of the 18 students did not use fingers for computation but showed difficulties in solving the subtraction problems. There was no difference among the students using or not using fingers, both groups had problems and did not use effective strategies.

Keywords: subtraction, finger use, part-whole relations, primary school, variation theory

Uppsats/Examensarbete:	30 hp
Program och/eller kurs:	Masterprogrammet i ämnesdidaktik
Nivå:	Avancerad nivå
Termin/år:	VT/2018
Handledare:	Angelika Kullberg
Examinator:	Eva Reimers
Rapport nr:	VT18-2930-DIM 70Ä-001

Förord

Drivkraften i mitt arbete som lärare är och har alltid varit elevernas och nu de senaste åren mina studenters lärande. På vägen har den drivkraften utvecklat mitt eget lärande, en fantastisk resa genom kunskapens snåriga landskap.

”För att till fullo förstå elevernas svårigheter med att lära måste läraren inta en undersökande attityd och betrakta sig själv som elev. Om varje lärare tar elevernas sätt att uppfatta lärandeobjektet på allvar och antar ett forskande förhållningssätt för att identifiera de kritiska dragen hos lärandeobjektet kommer eleverna att få bättre förutsättningar att lära” (Lo, 2014, s. 99).

Utan fantastiska elever, kollegor och stöd från min handledare docent Angelika Kullberg hade detta arbete inte blivit gjort. Ett stort tack till er alla och ett särskilt tack till professor Ference Marton som initierade denna studie och kom med goda råd.

Innehållsförteckning

Tabell- och figurförteckning

1. Inledning

Under mina år som lärare på låg- och mellanstadiet har jag mött elever som haft svårigheter med aritmetiska beräkningar och då speciellt i subtraktion. En del av eleverna använder fingrarna trots att de fått undervisning om olika och mer effektiva strategier under sina tidigare år i skolan. Många av de elever jag mött i årskurs fyra, har automatiserade kunskaper medan andra inte har upptäckt hur talen är kopplade till varandra och inte heller utvecklat effektiva strategier för beräkningar inom talområdet 1-20. En iakttagelse jag gjort under mina år som lärare på mellanstadiet, är att elever som använt fingrarna när de räknat, har fortsatt att använda fingrar när vi gått vidare i högre talområden och i multiplikation. Elevernas beroende av fingrar har medfört att beräkningarna tagit lång tid och en del elever har upplevt matematikuppgifterna som svåra. Neuman (2013) insåg i sitt arbete som speciallärare, att elever med matematiksvårigheter alltid räknade på fingrarna långt upp i åldrarna. *Hur* eleverna använder fingrarna är något jag aldrig tidigare funderat över, därför är jag tacksam för utmaningen från Ference Marton att undersöka på vilka olika sätt eleverna använder fingrar i sina beräkningar i subtraktion. Enligt min uppfattning är det viktigt för oss som lärare att tidigt identifiera vilka strategier eleverna använder för att kunna utforma undervisning som ger eleverna möjlighet att utveckla effektiva beräkningsstrategier. Enligt styrdokumenten i Lgr 11 (Skolverket, 2017) ska eleverna i årskurs 3 nått följande kunskapskrav:
”Eleven kan använda huvudräkning för att genomföra beräkningar med de fyra räknesätten när talen och svaren ligger inom heltalsområdet 0–20, samt för beräkningar av enkla tal i ett utvidgat talområde” (Skolverket, 2011 rev. 2017, s.62).
Når alla elever dessa mål? Forskningsresultat (Neuman, 1987; Löwing, 2016) visar att många elever inte når målen i årkurs 3. Löwing (2016) menar, utifrån en kartläggning av 2000-5000 elever som gjort Diamantdiagnoser (Skolverket, 2013) att endast ett fåtal elever som lämnar årskurs 1 utan att ha befäst baskombinationerna i addition och subtraktion, lär sig detta under årkurs 2-3. ”Andelen som har alla rätt är endast 35 % i årskurs 3. Denna andel borde ligga runt 90 % ” (Löwing, 2016, s.196). Elever, som inte behärskar flexibla strategier inom det lägre talområdet 1-20, kan få svårigheter med aritmetiska beräkningar längre fram när talområdet utvidgas (Reys & Reys, 1992; McIntosh, 2008).
Föreliggande uppsats bygger på en empirisk studie av 18 elevers beräkningsstrategier i subtraktion. Datamaterialet utgörs av videoinspelade intervjuer av elever i årkurs 3. Texten inleds med en bakgrund där tidigare forskning inom forskningsfältet beräkningar i addition, subtraktion och fingerräkning beskrivs. Hur elever använder fingrar i beräkningarna har ett eget avsnitt i texten. Efter problemformulering, syfte och forskningsfrågor beskrivs metoden i studien. Under teori redogörs hur variationsteorin (Marton, 2015) har använts som analysverktyg. Texten fortsätter med resultat och en avslutande diskussion med implikationer för fortsatta studier.

1.1 Syfte och frågeställning

Syftet med studien är att identifiera elevers olika beräkningsstrategier i subtraktion genom att i detalj analysera de sätt eleverna använder för att lösa aritmetikuppgifter. Uppgifter i subtraktion valdes ut eftersom subtraktion upplevs som ett svårare räknesätt än addition av många elever och lärare (Neuman, 1989; Fuson, 1992).

Forskningsfrågor

- Vilka beräkningsstrategier använder elever i subtraktion?
- Vad medför elevernas beräkningsstrategier för hur de behandlar tal?

2. Tidigare forskning och teoretiskt ramverk

En systematisk litteraturöversikt (Hart, 1998) har genomförts för att få en överblick av tidigare forskning och forskningsluckor. Enligt Hart (1998) definieras i en systematisk litteraturöversikt nyckelreferenser inom ett specifikt fält och artiklarna är skrivna under de senaste åren. Nyckelreferenser i studien är; Neuman (1987, 1989, 2013), Svenson och Sjöberg, (1982), Marton och Booth (1997, 2000), Marton (2015) samt Marton och Tsui (2004). Sökningen av forskningsartiklar som behandlade sökorden addition, subtraktion, subitizing och variationsteori, gjordes i databasen ERIC, Education Research Complete och Google scholar. I läsningen av litteratur inom forskningsområdet skapades trådar av referenser och ytterligare artiklar användes i arbetet med studiens forskningsfält.
Syftet med studien är att identifiera elevers olika beräkningsstrategier i subtraktion genom att i detalj analysera de sätt eleverna använder för att lösa aritmetikuppgifter. Studiens upplägg är inspirerat av två forskningsprojekt (Neuman, 1987), som undersökt elevers beräkningsstrategier i början av årskurs ett och forskningsprojektet FASETT[1] där 5-åringar ingår. De två nämnda studierna innefattar yngre barn, som inte fått formell undervisning, därför är det angeläget att intervjua elever i årskurs tre som fått undervisning. Föreliggande studie kompletterar de två tidigare studierna och bidrar till forskningsfältets kunskaper om elevers beräkningsstrategier i subtraktion.

2.1. Elevers lärande av subtraktion

Elevers beräkningsstrategier i addition och subtraktion av hela tal, har studerats under flera årtionden av forskare inom undervisning i matematik, utvecklingspsykologi och kognitiv psykologi (Gelman & Gallister, 1978; Svenson & Sjöberg, 1982; Carpenter & Moser, 1984; Fuson, 1992, 1988; Gray & Tall, 1994; Baroody, 1999; Clements, & Samara, 2007; Moeller *et al.*, 2011).
Kardinalitet och ordinalitet är viktiga begrepp i den grundläggande taluppfattningen (Gelman & Gallister, 1978). Kardinalitetsprincipen innebär att ett barn pekar på ett föremål i taget i en grupp föremål och visar att det sist sagda räkneordet representerar antalet föremål. ”The tag applied to the final item in the set represents the number of items in the set” (Gelman & Gallister, 1978, s.80). För att förstå vad det innebär att räkna antal, är kunskapen om att det inte har någon betydelse i vilken ordning föremålen räknas viktig (Gelman & Gallister, 1978). Ordinalitet beskriver varje föremåls plats i förhållande till övriga föremål ”a linear ordering exists on the entities” (Fuson, 1988, s.5).
Begreppet ”strategi” i texten syftar till att beskriva olika sätt elever använder för att komma fram till rätt svar.

[1] FASETT, studie på Göteborgs universitet 2015-2018 med prof. Camilla Björklund som vetenskaplig ledare.

Hur elever utvecklar räknestrategier har studerats av Fuson (2003) som menar att elever utvecklar sitt räknande från att räkna alla (counting all) till att räkna vidare, termen (counting on) i en addition (2+4) ”three, four, five, six” i stället för att börja på ett (one, two….,six) (Fuson, 1992, s.248). Cheng (2012) menar att strategierna att räkna alla och att räkna vidare inte är den bästa vägen för att lösa uppgifter i addition då de inte förbereder eleverna till att utveckla mer komplexa och avancerade räknefärdigheter. Enligt Cheng (2012) är det mer önskvärt att elever utvecklar kunskaper om talens delar, hur talen kan delas upp (decompose) och sättas ihop (compose). Ett exempel är uppgiften 8+3=? “decompose 8 into 7 and 1 or decompose 3 into 2 and 1, then calculate 3 + 7 = 10 and 10 + 1 = 11 or calculate 8 + 2 = 10 and 10 + 1 = 11.” (….) “is considered a more desirable mental operation because it involve making use of problem relationships through decomposing and regrouping” (Cheng, 2012 s. 29).

Fuson (1988) har identifierat tre aspekter av utvecklingssekvenser i addition- och subtraktionsoperationer hos barn. De tre sekvenserna beskrivs som: 1) addition och subtraktion som en situation/händelse, 2) lösningsprocedurer som används för att lösa additions eller subtraktionsuppgiften, 3) relationen mellan att räkna och den kardinala principen som nödvändig i lösningsproceduren (Fuson, 1988).

Carpenter och Moser (1984) undersökte i en longitudinell studie hur 88 elever i årskurs 1-3 löste problemuppgifter i addition och subtraktion. I addition identifierades tre nivåer: på första nivån använde eleverna objekt, som kan vara föremål eller fingrar och ”räknar alla” (counting all), på den andra nivån använder eleverna strategierna ”räkna från första” (counting from first) eller ”räkna från största” (counting from larger) och på den tredje nivån använder eleverna ”talfakta” från långtidsminnet (recall) utan att räkna eller tidigare kunskaper (derived facts) (Carpenter & Moser, 1984).

Samma tre nivåer som för addition, identifierades i subtraktion (Carpenter & Moser, 1984). Subtraktionsstrategierna i studien identifierades utifrån uppgifter där en del saknas medan en del och helheten är känd som: $a - b = c$ och $b + ? = a$. Den första gruppen av subtraktionsstrategier med rubriken ”strategier utifrån direkta modeller” (direct modeling strategies) utgörs av tre undergrupper av strategier där föremål/fingrar används i beräkningarna. I den första strategin där någonting ska ”tas bort” (separation from), separeras b från helheten a och svaret är de kvarvarande föremålen från mängden c. I den andra strategin ”räkna uppåt” (adding on) arrangeras en grupp av föremål b sedan läggs föremål till så att antalet a har uppnåtts. Svaret är det antal av föremål som lagts till. I den tredje strategin jämförs två grupper av föremål grupp a med grupp b genom ”en till en” paras ihop tills att alla föremål har jämförts parvis, svaret är de kvarvarande föremålen i den gruppen där inga föremål finns kvar som matchar den andra gruppen av föremål (Carpenter & Moser, 1984).

Den andra gruppen av subtraktionsstrategier, ”räknestrategier” (counting strategies) utgörs av två undergrupper. I den första strategin ”räkna neråt” (counting down) startar beräkningen på a, sekvensen innefattas av b genom att antalet räkneord räknas. Det sist sagda talet i sekvensen av antalet räkneord är svaret. ”Ett exempel är när en elev räknar 8–5 =? genom att säga ”8,7,6,5,4, (paus) 3, eleven uppfattar att svaret är 3” (Carpenter & Moser 1984, s.182). I den andra strategin ”räkna uppåt, (counting up from given) startar beräkningen från *a* och fortsätter upp till *b,* svaret är antalet uppräknade ord i räknesekvensen. Eleven börjar med det lägre talet och säger ett tal i taget uppåt till det högre talet ”3+?= 8 räknar eleven 3 (paus), 4,5,6,7,8, svaret är 5” (Carpenter & Moser, 1984, s.182). Jämförelse (matching) existerar bara när föremåls mängder ska jämföras, därför finns det ingen räknestrategi med jämförelse i gruppen ”räknestrategier”. Resultaten i studien visar att eleverna inte är konsekventa i val av strategi och använder inte alltid den mest effektiva strategin (Carpenter & Moser, 1984). Cheng (2012) menar att uppmuntra elever till att enbart använda strategin att räkna ett föremål eller ett finger i taget, kan försena elevernas möjligheter att utveckla mer avancerade matematiska strategier som till exempel förmågan att använda del-del-helhetsrelationer mellan tal och då speciellt i höga talområden.

I utvecklingen av effektiva strategier är sambandet mellan addition och subtraktion en viktig kunskap (Baroody, 1999; Carpenter & Moser, 1984). Elever bör få syn på att 5–3 kan lösas som 3+_= 5. I en studie (Baroody, 1999) undersöktes hur inlärning av kombinationer i addition kunde hjälpa i beräkningar av subtraktionsuppgifter. Genom träning och användning av olika kombinationer i addition, kan eleverna sedan utnyttja kunskaper om additionerna i subtraktion, förutsatt att kombinationerna i addition är väl befästa. Baroody (1999) betonar att eleverna behöver få syn på kommutativiteten i addition och ger exempel på uppgiften 12–7 där det är viktigt att använda talens *del-del-helhetsrelation* och se 7, 5 och 12 som delar och en helhet. Tidigare träning av additionerna 7+5 och 5+7 är en hjälp för eleverna att förstå subtraktionen 12–7. Resultatet i studien (Baroody, 1999) visade att övning är ett viktigt verktyg för undervisning, men att det bör användas med försiktighet så att förståelsen av talens helhet och delar kommer samtidigt, till exempel att eleverna utan uträkning direkt ser svaret på uppgifterna 5+3=8 och 8–3=? Eleverna behöver få undervisning eftersom sambandet addition/subtraktion inte alltid är tydligt för eleverna. Baroody (1999) menar att om eleverna inte förstår kombinationerna använder de strategier där de räknar upp eller ner utan att se delarna, vilket även Cheng (2012) menar.

Fuson *et al.,* (1997) beskriver elevers beräkningsstrategier av flersiffrig addition och subtraktion i nivåer. Elever på den första nivån, som kan räkna högre tal än 10, kan addera två tvåsiffriga tal genom att göra grupper av objekt för varje tal och sedan räkna alla objekten. Eleverna kan subtrahera genom att samla en grupp av objekt, ta bort från denna grupp och räkna de återstående objekten. På den andra nivån kan eleverna räkna antal ett i taget, lägga till genom att ta ett objekt i taget eller muntligt räkna ett i taget för att addera. Vid subtraktion kan eleverna på nivå 1, som kan räkna tal över 10, räkna bakåt genom att subtrahera ett objekt i taget och räkna de kvarvarande objekten. Elever på nivå 2 räknar enstegsräkning neråt eller uppåt. Strategin att hålla reda på antalet tal som räknas upp eller ner kan vara svårt för elever i ett högre talområde (Fuson *et al.,* 1997).

Tals uppdelning i delar ”the Break-Apart-to-make-Ten (BAMT) method” beskrivs av (Murata & Fuson, 2006) som en metod använd i Japan. Eleverna undervisas i att se uppdelning av tal med tiotalet som hållpunkt (benchmark). Uppgiften 9+4 löses i fyra steg. Steg 1: se att 9 behöver 1 för att få 10; steg 2: dela upp 4 i 1+3 och se att 3 är kvar; steg 3: addera 9+1 för att få 10; steg 4: addera 10 och 3 för att få 13. Murata och Fuson (2006) menar att BAMT är en kraftfull, effektiv och generell metod, jämfört med andra metoder elever använder. Elever i Japan har en fördel i sitt sätt att räkna genom det japanska språket med tal över tio:” 11 is *ten one,* 12 is *ten two,* 13 is *ten tree”* (Murata & Fuson, 2006, s.430). Strategin att dela upp tal i delar och använda tiotalet som hållpunkt (benchmark) är en strategi som även Cheng (2012) menar är effektiv.

Elever i Europa, USA och Canada har inte samma språkliga hjälp med tal över tio som japanska elever och det är vanligare att eleverna använder ”dubblor” i beräkningar. Uppgiften 6+7 löses genom att 6+6=12 och 1 till är 13 till skillnad mot elever i Asien där elever lär sig att dela upp talen (recompose) i en tiostruktur (ten-structured triplets) och subtrahera från tiotalet 13–7 genom 10–7=3 och 3+3=6 (Fuson *et al.,* 1997). Att använda dubblor är enligt (Murata & Fuson, 2006) inte en generell metod eftersom tiotalet inte synliggörs i processen. ”However, using doubles (even doubles $\pm$2) is not a general method, nor does this method give the teen number ready for regrouping as one 10 and some ones because it does not highlight the 10 in the process” (Murata & Fuson, 2006, s.432). Elevers svårigheter med beräkningar i subtraktion har dokumenterats i litteraturen (Fuson, 1992, 1997, 2003; Neuman, 1987, 2013, Svenson & Sjöberg, 1982). Enligt Fuson (2003) gör elever i USA ett vanligt misstag i subtraktion när de i uppgifter som 62 – 48 subtraherar både tiotal och ental från det största talet, vilket ger det felaktiga svaret 26. Elever, som lärt sig att utföra beräkningar utan att förstå att 2–8 ger ett negativt tal, gör den här sortens fel (Fuson, 2003; Fuson *et al.,* 1997).

Marton och Booth (2000) ifrågasätter ett stort antal forskares samförstånd om att barn lär sig matematik genom att: ”Först räknar de saker, sedan gör räkneövningar med symboler och så småningom lär de sig talfakta utantill” (s.83), något som Marton och Booth (2000) , McIntosh (1992) och Neuman (1989, 2013) inte håller med om. Neuman (1989, 2013) argumenterar för att elever som inte utvecklat föreställningar om tal och relationer inte heller gör det med hjälp av tabellträning. Även Fuson (2003) menar att bara lära sig talfakta utantill, som har varit vanligt i USA, inte hjälper elever att utveckla taluppfattningen. McIntosh *et al.,* (1992) menar att elever behöver förstå hur tal är inbördes är relaterade till varandra. Det räcker inte att lära sig tabellerna utantill om eleverna ska kunna utveckla en god taluppfattning. Elever behöver kunskap om hur tal kan delas upp (decompose) och sättas ihop (compose) för att kunna göra effektiva beräkningar (Neuman, 1987; McIntosh *et al.,* 1992; Baroody, 1999; Cheng, 2012).

I en studie (Neuman, 1987) med 103 elever vid skolstarten av årskurs 1, identifierades att en del elevers sätt att ta sig an uppgifterna kunde leda till problem. Syftet med studien var att ta reda på hur eleverna uppfattade talen inom talområdet 1-10 innan de fått undervisning.

Neumans (1987) intervjuer av 103 nybörjarelever syftade till att undersöka om äldre elever, som hade problem med matematik, använde samma strategier som alla elever använde på ett tidigt stadium i den matematiska utvecklingen. De 103 nybörjarelevernas förståelse inom talområdet 1-10 studerades och då speciellt elevers förmåga att lösa uppgifter där helheten och en del var kända, 2+_= 9 och i subtraktion 9–7 i stället för 9–2 (Neuman, 1986). Neuman valde uppgifter som äldre elever upplevde som svåra. Resultaten av intervjuerna delades upp i ”Uppfattningar och Strategier” (Neuman, 1987, s.91). Studiens resultat visade att barn redan före skolstart utvecklar metoder att lösa vardagsproblem på ett effektivt sätt utan att de fått formell undervisning. Det som mest verkar förorsaka matematiksvårigheter är att en del elever saknar föreställningar om tal samt förståelse för de fyra räknesätten till skillnad mot andra elever som redan vid skolstarten hade föreställningar om bastalen och insikt om relationen mellan addition och subtraktion (Neuman, 2013).

Neuman (1989) kunde i sina undersökningar urskilja två grupper av elever där den ena gruppen kunde *se* lösningar på problemuppgifter de fick att lösa medan den andra gruppen inte såg lösningar utan uppfattade att matematik handlade om *räkning* och använde krångliga beräkningar för att lösa uppgifterna. Neuman (1989) menar att det bara finns två uppfattningar av hur man ska göra för att uppfatta antal: *se* och *räkna* där förmågan att *se* leder till en förståelse för de fyra räknesätten medan *räkna* leder till matematiksvårigheter, vilket är i enlighet med Cheng (2102).

Enligt Neuman (1987, 1989, 2013) är det nödvändigt att elever får utveckla förståelse för relationerna mellan talen 1-10 något som Neuman kallar ”Bastalens 25 kombinationer”, se bild 1.

Två	**Tre**	**Fyra**	**Fem**	**Sex**	**Sju**	**Åtta**	**Nio**	**Tio**
1|1|**2**	2|1|**3**	3|1|**4**	4|1|**5**	5|1|**6**	6|1|**7**	7|1|**8**	8|1|**9**	9|1|**10**
		2|2|**4**	3|2|**5**	4|2|**6**	5|2|**7**	6|2|**8**	7|2|**9**	8|2|**10**
				3|3|**6**	4|3|**7**	5|3|**8**	6|3|**9**	7|3|**10**
						4|4|**8**	5|4|**9**	6|4|**10**
								5|5|**10**

Bild 1 De tio bastalens kombinationer (Neuman, 2013, s.16)

Kunskaper om bastalen innebär att veta hur talen förhåller sig till varandra genom kommutativa lagen samt sambandet mellan addition och subtraktion: 2+7=9, 7+2=9, 9–7=2 och 9–2= 7

9	
2	7

Elever som inte förstår att om 9–7 är 2, så måste 2+7 vara 9, har svårigheter med att välja om de ska räkna framåt eller bakåt i subtraktionen och får då svårt att lösa uppgifter som 2+_=9 eller 9–7 (Neuman, 2013). De elever som ser 2+_=9 som en addition måste räkna alla ord för

att ta reda på den okända delen ”tre, fyra, fem, sex, sju, åtta, nio-och samtidigt hålla reda på hur många de är, i stället för att bara tänka 9–7=2” (Neuman, 2013, s. 9).
Neuman (1987, 1989, 2013) menar att elever som inte *ser* kombinationerna utan måste *räkna* varje gång kommer att får svårigheter i arbetet med de fyra räknesätten och riskerar att fastna i *räkning* resten av sin skoltid ända upp på gymnasiet. ”De 25 kombinationer de första 10 talen kan delas upp i, är nyckeln som låser upp porten till talens värld, om man opererar med ett 10-bassystem” (Neuman, 1989, s.56). I stället för att fokusera på räknefärdigheter och minneskunskap argumenterar Neuman (2013) för en undervisning där eleverna *ser* och *reflekterar* och menar att de yngre barnen kan visa med sina händer eller rita hur de *ser* lösningen på ett problem.
Anledningen till att några elever kan lösa problemet medan andra inte kan beror på att de uppfattar olika aspekter av uppgiften och ser talen på ett specifikt sätt (Marton & Tsui, 2004). “Seeing the problem as a part–whole relation enables the child to act in a powerful way, in the sense of having a capability to deal with different problems” (Marton & Tsui, 2004, s.11).

2.1.1 Subitizing

Subitizing innebär att *se* och uppfatta antal utan att räkna. Flera forskare (Gelman & Gallister, 1986; Clements, 1999, 2007, 2014; Jung, 2011; Hannula Sormunen *et al.*, 2015; Aunio & Niemivirta, 2010; Sayers, Andrews & Boistrup, 2014) menar att subitizing är en betydelsefull del av den grundläggande taluppfattningen. Subitizing beskrivs som en förmåga att snabbt och korrekt uppfatta ett litet antal objekt utan att räkna (Kaufman *et al.*, 1949).
Begreppet subitizing kommer från det latinska ordet *subitus* som betyder plötslig. Fosnot och Dolk (2001) menar att små mängder som två, tre eller fyra kan ses som en helhet och att små barn kan uppfatta antal utan att räkna. McIntosh (2008) skriver att förmågan att uppfatta upp till fyra enheter kallas på engelska subitizing och på svenska subitisering. I denna text kommer den engelska benämningen subitizing användas. Clements (1999) beskriver två typer av subitizing, *Perceptual subitizing* och *Conceptual subitizing*, och menar att mycket små barn kan uppfatta två till tre föremål utan ännu ha utvecklat förmågan att räkna till tre. Exempel på *Perceptual subitizing* är enligt Clements (1999) när ett litet spädbarn, som hör tre trumslag vänder, sitt huvud mot den bild som visar tre prickar trots att det fanns två ytterligare bilder där en visade en prick och en annan två prickar. Ett annat exempel är när ett barn kan visa tre fingrar som svar på en fråga utan veta hur man använder räkneorden för att beskriva antalet. Exempel på *Conceptual subitizing* är enligt Clements (1999) när en person tittar på en dominobricka och direkt kan säga att det är åtta prickar eftersom prickarna är uppdelade i två grupper med fyra som sätts ihop till en helhet av åtta prickar. Före skolåldern menar Clements (1999) att barn räknar en prick i taget på till exempel en tärning och först i skolåldern har förmågan att se antalet utan att räkna prickarna och har då möjlighet att utveckla en begreppslig subitizing, *Conceptual subitizing*. Clements (1999) argumenterar för att elever

ska få möjlighet att utveckla begreppslig subitizing genom att lärare använder subitizing i undervisningen. Clements (1999) menar att begreppslig subitizing är en viktig förmåga för att kunna utveckla en god taluppfattning.

Jung (2011) och Clements (1999) är eniga om att elever behöver erfarenheter både av att räkna och av subitizing genom att lärare utmanar eleverna att se olika mönster av antal och att de får möjlighet att diskutera vad de ser med varandra för att utveckla kunskap. Clements (1999) menar att användningen av subitizing är grunden till utveckling av taluppfattning och till att förstå strategier i matematiska beräkningar.

Både Jung (2011) och Clements (1999, 2007) argumenterar för att elever ska få möjlighet att utveckla begreppslig subitizing genom att lärare tränar tillsammans med eleverna. Det räcker inte bara med subitizing, utan eleverna bör uppmuntras att undersöka tal och antal med hjälp av laborativt material i olika situationer, för att utveckla förmågan att förstå relationer mellan tal (Jung, 2011).

Bermejo *et al.,* (2004) menar att kardinalitet och förmågan att räkna inte är samma sak eftersom barn kombinerar subitizing och räkning när de uttrycker kardinalitet. Kardinalitet är målet och subitizing och uppskattning av antal är olika sätt för att nå detta mål. Bermejo *et al.,* (2004) använde uppgifter som testar elevers förmågor av kardinalitet i en studie med 48 spanska elever i åldrarna 4-6 år samt en kontrollgrupp. Syftet med studien var dels att ta reda på elevers kunskaper om kardinalitet med hjälp av förtest-intervention-eftertest och dels att utvärdera effekterna av ett utbildningsprogram. Resultatet av studien (Bermejo *et al.,* 2004) visar att elever använder sig av subitizing och först senare förmår att använda kardinalitet såsom att räkna och uppskatta antal. Studien visar att subitizing föregår räknandet. Elever i studien avgjorde ibland antal genom subitizing och därför menar Bermejo *et al.,* (2004) att de får stöd för sina påståenden att kardinalitet och räknande är två olika saker. De elever som ingick i programmet lärde sig kardinalitet på några dagar medan kontrollgruppen inte nådde lika långt vilket var något som forskarteamet (Bermejo *et al.,* 2004) hade väntat sig.

2.1.2 Beräkningar med fingrar

Fingrar används både av barn och vuxna som en representation av ett antal (Clements 1999, 2007). Fingerräkning vid aritmetiska beräkningar har studerats inom neuropsykologi och utbildningsvetenskap. Moeller *et al.,* (2011) menar att det finns olika syn på om beroendet av fingrar som representationsform är till nytta eller förfång. Soylo *et al.,* (2017) menar att fingrar används av barn initialt tills de uppnått en mer avancerad aritmetisk förmåga där fingrar inte längre behövs och att barns användning av och tidiga beräkningar med hjälp av fingrar kan vara avgörande för utveckling av mer avancerad matematik. Moeller *et al.,* (2011) argumenterar för att det finns bevis för att barn med goda fingerbaserade numeriska representationer uppvisar bättre kunskaper inom aritmetik och att träning i räkning med fingrar förbättrar matematiskt tänkande (Moeller *et al.,* 2011). Yngre barn använder fingrar för att visa antal, även utan kunskaper om räkneorden (Gray & Tall, 1994; Clements, 1999).

Argument för att elever ska uppmuntras att använda fingrarna har framförts av Boaler och Chen (2017) som menar att fingrar troligen är ett av våra mest användbara visuella hjälpmedel och att eleverna utvecklar kapaciteten i hjärnan genom att räkna med hjälp av fingrarna ”Teachers should celebrate and encourage finger use among younger learners and enable learners of any age to strengthen this brain capacity through finger counting and use” (Boaler & Chen, 2017, s.78). Berteletti och Booth (2015) beskriver utifrån sin forskning att fingrar spelar en stor roll i lärande och förståelse för aritmetik. ”Evidence suggest that finger representation and finger-based strategies play an important role in learning and understanding arithmetic” (Berteletti & Booth, 2015, s.1). Aktiviteter i hjärnan hos elever 8-13 år visar att subtraktionsproblem aktiverar områden i hjärnan för fingermotorik och antyder vikten av fingerbaserade strategier (Berteletti & Booth, 2015). En intressant iakttagelse var att vid ökade prestationer att lösa subtraktionsuppgifter noterades lägre aktivitet i områden i hjärnan kopplade till användningen av fingrar (Berteletti & Booth, 2015).

Argumentet att fingerräkning utvecklar elevernas matematiska utveckling delas inte av alla forskare. I en studie av Cheng (2012) framkom att elever i USA hade svårigheter med addition av tal högre än 10 när de använde fingrarna och endast 36,5 % av uppgifter eleverna testas på löstes korrekt. En slutsats som dras är att fingrar endast ska användas under en begränsad tid i den inledande undervisningen (Cheng, 2012).

Neuman (1989) menar att det är en hjälp för yngre barn att titta på fingrarna och avläsa antalet utan att räkna. Berteletti och Booth (2015) menar att användning av fingrar i beräkningar är ett verktyg som utvecklar förmågan att uppfatta tal och uppmanar till ytterligare forskning.

2.1.3 Fingermönster

I föreliggande studie har begreppet *fingermönster* valts, som en översättning och samlingsnamn för de olika begreppen, ”fingertal” (Neuman, 1989), ”finger pattern”, (Clements, 1999) och ”perceptual pattern” (Clements & Samara, 1992). Svenson och Sjöberg (1982) använder *finger apprehension solution* ”Instead of counting the numbers on the fingers the whole number is immediately represented by the simultaneous making of, for instance 7 by showing all 5 fingers on one hand and 2 fingers on other” (Svenson & Sjöberg, 1982, s.94). Begreppet *fingermönster,* används för att beskriva hur en elev använder fingrar för att representera antal och synliggöra relationer mellan tal, utan att räkna ett finger i taget (Marton, manuskript).

Resultatet av en studie (Gray & Tall, 1994) med elever 6-12 år visar att de elever som har god taluppfattning, använder fingrarna som en bild av antal, medan elever som presterar sämre i aritmetiska beräkningar använder svårare beräkningsmetoder med och utan fingrar “The counting process has been compressed to the stage where only the fingers need to be held up and the number facts recalled from the finger layout” (Gray & Tall, 1994, s.16).

Neuman (2013) använder begreppet ”fingertal” när eleverna använder fingrarna för att *se* antal utan att behöva räkna. I studien (Neuman, 1987) identifierades elever som använde fingrarna när de räknade, trots att de intuitivt tillägnat sig ”de tio första bastalen” (se bild 1). Nybörjareleverna som intervjuades i studien (Neuman, 1987, 2013) använde fingrarna som en bild av antalet och *såg* antalet med hjälp av subitizing utan att räkna, om antalet fingrar var fem eller sex. Den ena handens fem fingrar räknades inte medan antalet upp till tio formades som ”fingertal”: ”fyra” = handen minus ett finger, ”fem” = handen, ”sex” = handen plus ett finger, ”sju” = handen plus två fingrar och så vidare” (Neuman, 2013, s.19).
Elever i Neumans (1987) studie, som använde ”fingertal” utvecklade sitt abstrakta tänkande genom att övergå till att ”tänka med sina händer” och använde fingrarna som en representation av hela antalet uppdelat i två delar. De elever som dubbelräknade uppvisade svårigheter i aritmetiska beräkningar och ”formade sina fingertal genom att sätta upp ett finger för varje räkneord de räknade upp” (Neuman, 2013, s.20).
Vid beräkningar är användningen av *fingermönster* en hjälp för yngre barn att se talens helhet och delar inom talområdet 1-10 medan *dubbelräkning (keeping track)* med hjälp av ett finger i taget, kan orsaka att elever får problem särskilt om det är den enda beräkningsstrategi eleven använder (Neuman, 1987, 1989, 2013; Svenson & Sjöberg, 1982).
Då Neumans (1987) och Svenson och Sjöbergs (1982) studier gjordes för mer än 30 år sedan är det angeläget att ta reda på om elever använder fingrar i subtraktionsberäkningar på liknande sätt eller om andra strategier utvecklats.

2.1.4 Dubbelräkning

Begreppet *dubbelräkning* eller *keeping track*, används som beskrivning av beräkningar där elever har två talrader samtidigt i huvudet. Eleverna räknar de uppräknade räkneorden eller använder fingrar för att hålla reda på antalet steg uppåt eller neråt, samtidigt som de håller reda på var på talraden de befinner sig vid additions och subtraktionsberäkningar (Svenson & Sjöberg, 1982; Gray & Tall, 1994; Fuson, 1992; Neuman, 1987, 1989, 2013; Marton, manuskript). Dubbelräkning och keeping track används här synonymt. Dubbelräkning beskrivs som: ”Instead of using numbers for counting fingers they are using fingers to count numbers” (Marton, s.7 manuskript). Vid dubbelräkning, får ett finger i taget representera talen, ett objekt i taget, i stället för att använda tal för att räkna antalet fingrar. Svenson och Sjöberg (1982) beskriver beräkningar med fingrar som ”One-unit step counting up with use of fingers as memory aid” och ”One–unit step counting N steps down with fingers as memory aid” som i uppgiften 11–7 där eleven registrerar antalet steg med hjälp av ett finger taget ”When the child reaches M the answer D can be read from the fingers” (s.94). Att räkna ner ett steg i taget från 11 till 7 genom att hålla reda på antalet steg i minnet är mer komplicerat än att använda ett finger i taget och räkna ner till 7 menar Svenson och Sjöberg (1982). Antalet fingrar räknas eller uppfattas med hjälp av subitizing.

Fuson (2003) beskriver keeping track som att eleven håller reda på antalet ord som räknats med hjälp av att visa ett finger i taget eller i sekvenser som uppfattas auditivt. "However, keeping track of the number counted on, up, or back may be difficult because it will be so large. These methods are constrained only by how high a child can count and keep track accurately" (Fuson *et al.*, 1997, s.145-146).

Fuson (1992) beskriver att ”räkna på” (counting on) som en procedur, är samma som att räkna objekt. “Children use auditory or visual patterns, sequential extended fingers, and double counting to keep track of the second addend” (Fuson, 1992, s.248). Elever använder fingrarna och börjar räkna på olika fingrar, pekfinger, tumme eller lillfinger och Fuson (2003) menar att ”Any of these arrangements are effective ways to keep track of the second addend while counting on….Counting on is a powerful, general, and sufficiently rapid method for most purposes” (Fuson, 2003, s.75). Cheng (2012) menar att ”counting on” inte är en effektiv metod eftersom elever kan fastna i ”räkning” i stället för att se talens delar. Fuson (1988) menar att det finns tre sätt som elever kan hålla reda på det antal (keep track) som ska adderas genom: 1) att säga räkneorden så att rytmen av tre tal i taget av 6 hörs: ”9,10,11 12,13,14”, 2) genom ett känt fingermönster som en hand och ytterligare ett finger och att matcha varje räkneord till ett finger när ordet sägs, 3) genom dubbelräkning ”8, 9 is 1, 10 is 2, 11 is 3, 12 is 4, 13 is 5, 14 is 6” (Fuson, 1988, s.275).

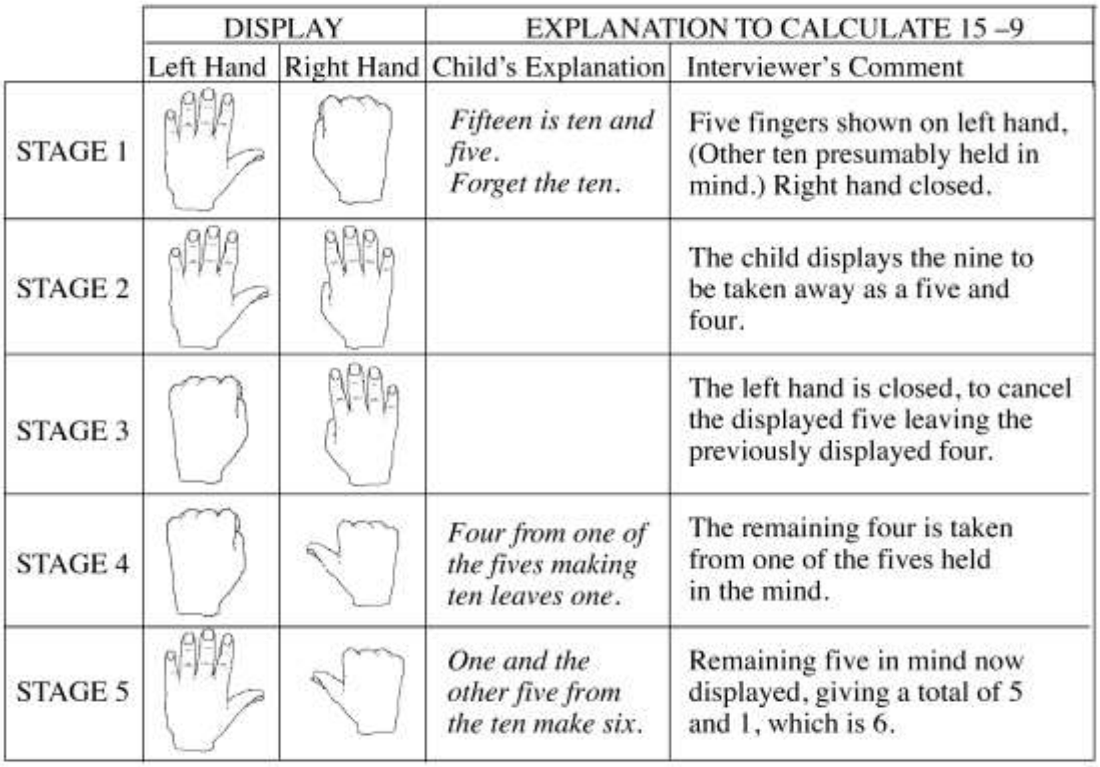
Fuson (2003) ser på double counting och keeping track på ett annat sätt än Marton (manuskript) och Neuman (1987, 1989, 2013). Fuson (1988) beskriver keeping track som: ”Secquence counting all”. I uppgiften 8+6 kan eleven säga ”1,2,3,4,5,6,7,8 (paus) 9,10,11 (paus) 12,13,14” (Fuson, 1988, s.276). De första 8 talen säger eleven snabbt för att bli klar att börja beräkningen och lägger till sex räkneord för att komma till svaret 14. Marton (manuskript) håller inte med om att detta är keeping track eftersom eleverna kan höra tre räkneord i taget, som två mängder, utan att räkna dem. Fuson (1988) beskriver nästa del som:”Secquence counting on” där eleverna räknar de sagda räkneorden och hör antalet eller använder fingrar för att hålla reda på antalet räkneord. ”For keeping track by doublecounting, the sequense word are entities to be counted” (Fuson, 1988, s.276). Eleverna håller reda på var på talraden de befinner sig för att kunna stanna på rätt ställe, antingen genom att räkna (höra) antalet steg eller använda fingrarna för att hålla reda på antalet steg. Här är Fuson (1988) och Marton (manuskript) överens om att det är keeping track eller dubbelräkning. I ”Secquence counting down” beskriver Fuson (1988) dubbelräkningen i uppgiften 14-6 som: ”say a word (14), say 6 more words (13,12,11,10,9,8), and the last word said is the answer (8)” (Fuson, 1988, s.277). Eleven räknar ner och håller reda på antalet sagda räkneord på samma sätt som i ”Secquence counting on” och räknar från 14 ner till 6 och håller med hjälp av fingrarna reda på antalet sagda räkneord, vilket enligt Marton (manuskript) också är keeping track eller dubbelräkning. Enligt Marton (manuskript) är dubbelräkning inte ett naturligt steg i utvecklingen av aritmetiska färdigheter utan en början till matematiksvårigheter.

Gray och Tall (1994) ser problem med matematiska beräkningar för en del elever och använder både begreppen double counting och keeping track. Gray och Tall (1994) menar att ”räkna vidare” (counting on) är en mer sofistikerad strategi än ”räkna alla” (count all). När det första talet är *en* del och det andra talet ses som en procedur räknar eleven uppgiften 3+2 och säger: ”fyra”, ”fem”. Eleven håller samtidigt reda på att ”två extra tal” har räknats, ”double counting”, keeping track (Gray & Tall, 1994, s.9) i stället för att se tre och två som två delar i en process av addition och produkten av processen som en summa. I subtraktion blir svårigheterna stora när eleverna räknar bakåt och använder “double counting”. “The child must count the number sequence in reverse starting from the larger number and keep track simultaneously of how many numbers have been counted. A sum such as 16–13 by count-back requires the recitation of 13 numbers in reverse order from 16 down. Such procedures, especially when carried out by less successful children, are highly prone to error” (Gray & Tall, 1994, s.11).

I en undersökning (Svenson & Sjöberg, 1982) studerades 12 elever vid fem olika tillfällen från årskurs ett till tre. De elever som använde fingrarna och räknade neråt i uppgiften 11–7 sa: ”(11) 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4” för att komma fram till svaret (Svenson & Sjöberg, 1982, s.94). Fingrarna används för att hålla reda på hur många steg som räknats ner från 11. Det som förvånade forskarna var att så många elever sista terminen i årskurs tre fortfarande löste uppgifter med fingrarna och att utvecklingsgången hos en grupp elever avvek från de övriga. Det var få elever i årskurs ett som använde fingrarna för att hålla reda på antalet steg men elevantalet som använde fingrarna ökade i årskurs tre (Svenson & Sjöberg, 1982).

Gray och Tall (1994) har studerat processen när elever använder symboler i beräkningar. De elever som inte hade utvecklad matematisk tänkande använde svårare matematiska beräkningar för att komma fram till svaret än de elever som hade ett mer flexibelt tänkande i matematik. Ett exempel de ger var en elev (se bild 2, egen översättning) som använder fingrar när hon räknar ut 15–9 i fem steg med hjälp av fingrarna för att få fram svaret:

1. *Säger:* Femton är tio och 5. Glöm tiotalet. *Visar* hela vänsterhanden och en knuten högerhand.
2. *Visar* talet 9 med hela vänsterhanden och fyra fingrar på högerhanden. Barnet visar de nio som tagits bort som fem och fyra.
3. *Visar* en knuten vänsterhand och fyra fingrar på högerhanden. Vänster han är knuten för att visa att 5 tas bort från 9 och då är det 4 kvar.
4. *Säger:* 4 från 1 av de 5 som ger 10 lämnar kvar 1. *Visar* en knuten vänsterhand och enbart tummen på höger hand. De kvarvarande 4 tas från en av de 5 som finns i minnet.
5. *Säger:* 1 och de andra 5 från de tio är lika med 6. *Visar* en hel högerhand och bara tummen på högerhanden. De kvarvarande fem i minnet som nu visas ger totalt 5 och 1 som är 6. (Egen översättning från Gray & Tall, 1994, s.17).



	DISPLAY		EXPLANATION TO CALCULATE 15 –9	
	Left Hand	Right Hand	Child's Explanation	Interviewer's Comment
STAGE 1			*Fifteen is ten and five. Forget the ten.*	Five fingers shown on left hand, (Other ten presumably held in mind.) Right hand closed.
STAGE 2				The child displays the nine to be taken away as a five and four.
STAGE 3				The left hand is closed, to cancel the displayed five leaving the previously displayed four.
STAGE 4			*Four from one of the fives making ten leaves one.*	The remaining four is taken from one of the fives held in the mind.
STAGE 5			*One and the other five from the ten make six.*	Remaining five in mind now displayed, giving a total of 5 and 1, which is 6.

Bild 2. Beräkning av 15–9 med hjälp av fingrar (Gray & Tall, 1994, s.17).

Även om eleven löser uppgiften 15–9 korrekt, kan eleven få svårigheter när talområdet utökas eftersom beräkningen består av många steg och eleven använder en ineffektiv strategi.
Enligt Neuman (1989) använder nybörjarelever fingrar under en kortare period som en hjälp att visa antal, men börjar sedan tänka med sina händer och övergår till sist till ett mer abstrakt tänkande. En del elever fortsätter att använda fingrarna och löser aritmetiska uppgifter med hjälp av till exempel *dubbelräkning*. Elever som dubbelräknar (Fuson 1988; Neuman, 1987, 1989, 2013) räknar de uppräknade orden när de löser uppgifter som 2+_= 9 och säger: ”tre-ett, fyra-två, fem-tre, sex-fyra, sju-fem, åtta-sex, nio-sju och svarar sedan sju” (Neuman, 2013 s.10). Eleverna har två talrader samtidigt i huvudet, en för antalet steg och en för den talrad de arbetar på uppåt eller neråt, en dubbel ordinalitet. En del barn upptäcker att det är svårt att hålla två talrader samtidigt i huvudet och använder fingrar för att hålla reda på antal (Svenson & Sjöberg, 1982; Neuman, 2013). Andra barn räknar ett finger i taget en gång till medan en annan grupp elever ”hör” till exempel ”tretalet” i antalet uppräknade tal. Elever som dubbelräknar får svårigheter i subtraktion när de både ska hålla reda på antalet steg 1,2,3…, samtidigt som de räknar bakåt på talraden 15,14,13,…. (Neuman, 2013).

Neuman (2013, s.12) har identifierat fyra olika svårigheter för elever:

1. Den okända termen blir ofta så stor att de inte kan uppfatta den utan dubbelräkning.
2. I dubbelräkning bakåt går den sekvens som utgörs av de uppräknade orden åt ett håll och den fingersekvens som räknar orden åt ett annat.
3. Bakåträkning kan genomföras med två olika metoder. Barn som ”räknar bort” börjar i det valda exemplet, 9–7, med ordet nio och slutar med ordet tre, varvid det sist uppräknade ordet inte blir rätt svar. Barn som ”räknar bakåt” börjar däremot med ordet åtta och slutar med ordet ”två, varvid det sista ordet blir det rätta svaret, men utan att förstå varför.
4. De två metoderna blandas samman vilket resulterar i ett ± ett fel. ”

Neuman (1987, 1989, 2013) menar att speciellt subtraktion, där eleverna räknar bakåt med hjälp av sina fingrar, är komplicerat. De elever, som räknar ner ett steg i taget med hjälp av fingrarna riskerar att tappa bort sig. ”I uppgiften 9–7=_ kan dubbelräkning se ut så här: nio$^{\text{1finger}}$, åtta$^{\text{2fingrar}}$, sju$^{\text{3fingrar}}$, sex$^{\text{4fingrar}}$, fem$^{\text{5fingrar}}$, fyra$^{\text{6fingrar}}$, tre$^{\text{7fingrar”}}$ (Neuman, 2013, s.11). Eleven räknar bakåt och får svårt att hålla reda på vilka ord som representerar den del som tas bort och vilka som representerar den del som återstår, ordsekvens och fingersekvens går åt olika håll. De sju fingrarna representerar det antal som tagits bort inte det sist uttalade ordet (Neuman, 2013).

Den form av dubbelräkning, som beskrivs ovan, är krävande för barn och i stort sett omöjlig i multiplikation då eleverna i så fall behöver ”trippelräkna”, ”man måste dels räkna det antalet ord man gång på gång adderar och dels räkna hur många gånger man adderat dem” (Neuman, 2013, s.15). Det är inte dubbelräkningen i sig som är anledningen till matematiksvårigheter utan att eleverna inte utvecklat strukturer i det decimala talsystemet menar Neuman (1989). ”Det är således bara om barn skapar ”dubbelräknings”-strategier *i stället för* talföreställningar och tankestrategier som dubbelräkning leder till matematiksvårigheter” (Neuman, 1989, s.160).

Fuson (1992) jämför elevers användning av fingrarna i USA med Neumans (1987) beskrivning av hur svenska elever använder fingrarna och pekar på olikheter. Hon efterlyser forskning från olika länder och olika kulturer för att öka kunskaperna om elevers strategier. Fuson (1992) uppmuntrar lärare att vara uppmärksamma på de strategier elever har med sig hemifrån för att förstå och förhindra en blandning mellan egna och skolans strategier.

Neuman (1987) beskrev i sin studie hur nybörjarelever använde fingrar i sina beräkningar och menar att eleverna inte utvecklar effektiva strategier när de dubbelräknar med hjälp av fingrarna. ”Problemet med dubbelräkning är inte främst att svaren blir fel utan att det är en strategi som aldrig leder till abstrakt matematiskt tänkande” (Neuman, 1989, s. 239). Svenson och Sjöberg (1982) var överraskade att fingrar användes i så stor utsträckning av elever i årskurs 3 ”However, many more problems than a teacher would like, were solved with the aid of the children’s fingers as late as in the last term of the third schoolyear” (Svenson & Sjöberg, 1982, s.99).

Summering av tidigare forskning

Av tidigare forskning framkommer att det finns olika syn på hur elever lär sig addition och subtraktion. Fuson (1992, 1988) beskriver räknestrategier medan Neuman (1989, 2013) och Cheng (2012) betonar del-del-helhet som en viktig kunskap för elevers matematiska utveckling.

Forskare inom neuropsykologi och utbildningsvetenskap har olika syn på om fingerräkning hjälper elever att utveckla effektiva beräkningsstrategier (Moeller *et al.,* 2011). Neuman (1987, 1989, 2013) argumenterar för att det inte handlar om *att* elever använder fingrar, utan *hur* eleverna använder fingrarna och hävdar att de elever, som använder fingrar som representation, ”fingermönster” för att representera ett antal, har möjlighet att utveckla en god taluppfattning och effektiva strategier för aritmetiska beräkningar, medan de elever som använder fingrar för att hålla ordning på antal och dubbelräknar, får problem och hamnar i en återvändsgränd (Neuman, 1987; Gray & Tall, 1994).

Fingrar, som hjälpmedel vid beräkningar, ses både som något som utvecklar elevers aritmetiska utveckling samtidigt som fingerräkning kan bli ett hinder för ett mer abstrakt tänkande, därför är det angeläget att studera *hur* eleverna använder fingrar i sina beräkningar.

2.2. Teoretiskt ramverk

Variationsteorin, (Marton, & Tsui, 2004; Marton, 2015) en teori om lärande, utgör studiens teoretiska ramverk. Variationsteorin har sina rötter i en fenomenografisk forskningstradition (Marton, Dahlgren, Svensson & Säljö, 1977). Fenomenografi, som kvalitativ empirisk ansats, är utvecklad vid Göteborgs universitet under fyra decennier och grundar sig i ett intresse att beskriva fenomen i världen så som andra personer ser den och att beskriva variation i personers olika sätt att erfara samma fenomen (Marton, 1981; Marton & Booth, 1997). Fenomenografin grundar sig i *Fenomenologi* (Husserl, 2004). Fenomenologi är läran om fenomenen och *fenomenografi* beskrivning av fenomenen.

Den ontologiska grunden inom fenomenografi och variationsteori är icke-dualistisk eftersom lärandet varken finns i personen, eller i världen den studerar, utan uppstår i relationen mellan dem (Marton & Booth, 1997) .”Den enda värld som finns är just denna, den av människor förstådda världen” (Emanuelsson, 2001, s.33). Det matematiska problemet i till exempel subtraktion och talens delar, finns inte i problemet i sig eller i huvudet på eleven utan i mötet mellan dem. Det är den inbördes relationen som studeras, hur någonting förstås av någon. Om elever behandlar en matematisk uppgift på olika sätt kan eleverna erfara talen i uppgiften på olika sätt. Marton och Tsui (2004) ger exempel på en studie där de gav eleverna följande matematiska problem: ”I didn’t have much money this morning when I went to school. Bob gave back 4 kronor that he had borrowed from me last week, and with that I could buy a green chocolate bar for 7 kronor. How much money did I have this morning when I came to school?” (Marton, & Tsui, 2004 s.11). Några elever löste uppgiften direkt och såg talens helhet och delar, medan andra hade problem att lösa uppgiften, såg det som en addition och visste inte hur de skulle komma vidare. Eleverna, menar (Marton, & Tsui, 2004), agerar utifrån hur de ser uppgiften och de ingående talen. ”Again, there are two different ways of understanding the same situation and hence two ways of acting, one of which is more powerful than the other (Marton, & Tsui, 2004 s.11). Föreliggande studie är inspirerad av liknande studier till exempel FASETT där antagandet är att elever agerar utifrån hur de erfar tal i en specifik situation. ”A fundamental idea is that how a person experiences a phenomenon, e.g. a subtraction task, affects how she acts in regard to the phenomenon. How a child experiences the task has to do with what aspects of subtraction have been discerned simultaneously. Hence, if a child fails to solve a particular subtraction problem, there are necessary (critical) aspects the child has not yet discerned” (Björklund, Kullberg & Runesson Kempe, accepted).

2.2.1 Erfara

Begreppet *erfara* är ett centralt begrepp inom variationsteori och fenomenografi (Marton & Booth, 2000). Inom fenomenografi är det ”vad som erfars och hur det erfars som står i centrum” (Marton & Booth, 2000 s.150). Fenomenografin beskriver personers kvalitativt olika sätt att erfara samma fenomen i sin omvärld medan variationsteorin är en lärandeteori och ett teoretiskt redskap för att analysera och planera undervisning (Marton & Booth, 2000; Runesson Kempe, 2016). Gemensamt för fenomenografin och variationsteorin är att man tar ett andra ordningens perspektiv. Det innebär att man försöker tolka hur någon annan, till exempel en elev, erfar ett fenomen (Marton, & Tsui, 2004; Marton , 2015).

”Vad innebär det att erfara något på ett visst sätt?” (Marton & Booth, 2000, s.117). Om en person ser aspekter av något och en annan person ser delar av eller andra aspekter av till exempel ett fenomen, säger vi att personerna ser/erfar samma fenomen på olika sätt (Marton & Tsui, 2004). Förmågan att agera återspeglar hur någon erfar någonting (Marton & Booth, 2000). ”Man kan bara agera i relation till världen så som man uppfattar den” (Marton & Booth, 2000, s.146). Utgångspunkten i föreliggande studie är att eleverna använder strategier utifrån hur de erfar de ingående talen i subtraktionsuppgifterna de arbetar med under intervjun. I nedanstående text används erfar/ser synonymt. När eleven visar att den ”ser” talen i en uppgift på ett visst sätt beskrivs det av (Marton & Booth, 2000) som en intern relation mellan eleven och världen. Eleverna agerar och hanterar uppgifterna utifrån hur de erfar situationen och de ingående talen i uppgifterna. Pang (2003) menar att hur elever behandlar tal beror på om de ser tal som en mängd/månghet (manyness) eller som tal i en talrad (sequential ordering of numbers) ”the different ways in which children understand numbers have been described in terms of ‘manyness’ and sequential ordering of number. Some children discern and focus on the ‘manyness-aspect’ of numbers, others discern the sequential aspect; some discern and focus on both at the same time, while others discern none of these aspects” (s.151).

2.2.2 Lärandeobjekt och kritiska aspekter

Lärandeobjektet syftar på vad eleverna behöver lära sig för att kunna nå de av läraren uppsatta lärandemålen (Lo, 2014, s.34). ”Lärandeobjektet har två aspekter: den specifika aspekten som gäller själva ämnet och den kompetens som vi vill att eleverna lär sig och den generella aspekten som gäller färdigheter som kan utvecklas tack vare att vi lär oss specifika aspekter” (Lo, 2014, s.34). I en studie (Venkat *et al.*, 2014) undersöktes undervisning med uppdelning av tal i årskurs 3 med variationsteorin som analysverktyg. Resultatet i studien visar att det har betydelse hur uppdelningen av talen representeras för att lärandeobjektet ska bli tydligt för eleverna. Om läraren visar alla delar av talet 7 och låter uppdelningarna av talet finnas kvar på tavlan under hela lektionen ges möjlighet för eleverna att urskilja talens olika delar, till exempel 3+4, 2+5, 1+7, vilket inte ges möjlighet till om läraren stryker ut beräkningar från tavlan under lektionens gång, eller inte visar alla uppdelningar (Venkat *et al.*, 2014).

Begreppet *kritisk aspekt* (Marton & Pang, 2006) används inom variationsteorin för att beskriva aspekter av ett innehåll som eleven behöver urskilja för att lära sig det avsedda lärandeobjektet. När lärare planerar undervisning är det enligt Lo (2012, 2014) viktigt att lärare empiriskt undersöker vilka de kritiska aspekterna kan vara för ett lärandeobjekt. Detta kan göras till exempel genom test och intervjuer där man kan analysera vilka svårigheter eleverna har och därigenom dra slutsatser om vilka de kritiska aspekterna kan vara. Enligt Lo (2012, 2014) är det ovanligt att samtliga kritiska aspekter kan belysas i en studie.

I en tidigare studie (Kullberg & Runesson, 2013) har till exempel elevers förståelse av bråk undersökts. Studiens resultat visade att elever hade svårigheter att förstå innebörden av täljare och nämnare i arbetet med stambråk. En kritisk aspekt som framkom var elevernas svårigheter att uppfatta storleken på delarna i bråken i jämförelse med antalet delar. När undervisning planeras är det enligt Lo (2012, 2014) nödvändigt att fokusera på vissa aspekter, *kritiska aspekter,* som är avgörande för ett lärandeobjekt.

Ett sätt att erfara något kan definieras utifrån vilka aspekter som samtidigt urskiljs vid en viss tidpunkt, dessa aspekter kan definieras som kritiska aspekter av objektet (Marton & Tsui, 2004). Ett objekt kan ses på olika sätt beroende på vilka aspekter en person fokuserar på. Personer erfar olika aspekter av samma fenomen utifrån tidigare erfarenheter (Marton & Booth, 1997). Vi kan använda en vas som exempel. Det är möjligt att se en vas som att det är en liten, blå vas av keramik. Den som har kunskaper om kinesiskt porslin kan dessutom se att vasen är gammal och kan urskilja egenskaper, som inte framträder för den som inte har erfarenheter. Färg, storlek och material är exempel på dimensioner av variation (DoV). I matematik kan det vara olika strategier och uppgifter som används för att lösa uppgifter som öppnar upp dimensioner av variation, DoV (Marton & Tsui, 2004). Om elever har problem med att lära sig något i matematik, kan det bero på att de ännu inte urskilt det som är nödvändigt att urskilja för att ett lärande ska ske (Runesson Kempe, 2016). I föreliggande studie, är det ur variationsteorins perspektiv, hur eleverna erfar talen och de olika strategierna eleverna använder för att räkna en uppgift, som ger insikt om vilka aspekter som urskilts. Runesson Kempe (2016) menar att “Ett specifikt kunnande innefattar att vissa aspekter måste bli urskilda eller uppmärksammade” (Runesson Kempe, 2016, s.66)

I en studie (Ekdahl, Venkat & Runesson, 2016) undersöktes elevers uppfattningar av tals del-del-helhetsrelation med variationsteorin som teoretiskt ramverk. I analysen av studien utnyttjades ramverket som en hjälp att se på lärande och för att dra slutsatser om elevernas lärande i subtraktion. Resultatet i studien visar betydelsen av att lärare använder flera olika representationer av del-del-helhets relationer för att utveckla elevernas lärande.

I föreliggande studie analyseras elevers beräkningsstrategier i subtraktion. Elevernas olika sätt att erfara tal blir synliga när eleverna beskriver sina lösningar av uppgifterna de arbetar med under intervjun.

3. Metod

I nedanstående text redogörs för studiens design och metod. I analysprocessen har variationsteorin (Marton & Booth, 2000) används. En närmare beskrivning av de delar av variationsteorin som använts i studien har beskrivits under kapitlet teoretiskt ramverk. Validitet, reliabilitet och forskningsetiska aspekter diskuteras avslutningsvis.

För att besvara forskningsfrågorna används en kvalitativ metod där datamaterialet utgörs av semistrukturerade intervjuer (Bryman, 2004, 2011). Frågorna i föreliggande studie lästes upp av forskaren från ett frågeformulär och forskaren ställde följdfrågor när eleverna förklarade sina lösningar. I en semistrukturerad intervju ställs frågor efter ett formulär men frågorna kan komma i olika ordning och forskaren har möjlighet att ställa kompletterande frågor om intressanta svar kommer upp under intervjun (Bryman, 2004, 2011; Cohen & Manion, 1994). I semistrukturerade intervjuer är det viktigt att vara flexibel och följa upp intressanta svar och i förekommande fall ställa följdfrågor för att förtydliga eventuella otydligheter i svaren (Bryman, 2004, 2011; Cohen & Manion, 1994). Semistrukturerade intervjuer skiljer sig från strukturerade intervjuer genom att samtliga respondenter i den strukturerade intervjun får exakt lika frågor och den intervjuade förväntas svara på ett specifikt sätt (Bryman, 2004, 2011). I föreliggande studie är barn respondenter och därför valdes en semistrukturerad intervju där följdfrågor och förtydliganden av elevernas svar möjliggjordes.

3.1 Studiens design

Studiens design är inspirerad av två tidigare studier (Neuman, 1987) och FASETT (se fotnot 1), där videoinspelade elevintervjuer utgör datamaterial i båda studierna. Syftet med studien är att identifiera elevers olika beräkningsstrategier i subtraktion genom att i detalj analysera de sätt eleverna använder för att lösa aritmetikuppgifter.

Datamaterialet till studien samlades in under perioden december 2016 till och med februari 2017. Eleverna i de båda klasserna informerades av klassläraren om att forskaren skulle komma och genomföra en diagnos och videoinspelade intervjuer. Vid forskarens första besök på skolorna informerades klassens elever om studiens upplägg och ett brev skickades hem till vårdnadshavare med en blankett för godkännande till medverkan i studien, (se bilaga 3). Klasslärarna ansvarade för insamling av blanketterna. Studien inleddes med en Diamantdiagnos (Skolverket, 2013) som genomfördes och kodades av forskaren. Utifrån en analys av diagnosen gjordes ett urval av elever inför intervjuerna. De elever som klarade diagnosen snabbt och med rätt svar, kan antas ha automatiserat uppgifterna och valdes därför inte ut. Fokus i studien var de elever som inte kunde lösa uppgifterna snabbt och hade flera fel, eftersom det kunde vara så att de använde tidskrävande strategier som finns beskrivna i litteraturen. Vid sex olika tillfällen genomfördes videoinspelade intervjuer av forskaren i de båda klasserna.

3.2 Genomförande

Urval av undersökningsgrupp gjordes genom att två lärare i årskurs tre, som tidigare varit med i lärarfortbildning, kontaktades och fick frågan om de var intresserade att av låta eleverna i klasserna delta i studien. Urvalet betecknas enligt (Bryman, 2004, 2011) som ett bekvämlighetsurval. Ett problem med bekvämlighetsurval är att urvalet inte är representativt för en större population, vilket medför svårigheter att generalisera resultaten. Studien genomfördes tidigt på vårterminen i årskurs 3 på två olika skolor, här beskrivna som skola A och skola C. Skolorna ligger i olika områden i ett storstadsområde där Skola A har en något större andel elever med utländsk bakgrund än skola C. Läraren i skola C har lång erfarenhet att undervisa i årskurs 1-3 medan läraren i skola A endast har arbetat några få år som lärare. Båda klasserna använde samma läromedel i matematik. I analyserna av intervjuerna har elevernas namn anonymiserats utan hänsyn till kön.

3.2.1 Urval

I urvalet av elever som skulle delta i studien gjordes en kartläggning med hjälp av en diagnos. Vid diagnostillfället berättade forskaren för eleverna om hur diagnosen skulle genomföras och eleverna fick möjlighet att ställa frågor. Syftet med diagnosen var att ta reda på elevernas förmåga att under en begränsad tid lösa huvudräkningsuppgifter i addition och subtraktion inom talområdet 1-20, vilket ingår i kunskapskraven för årskurs 3 (Skolverket 2011, rev. 2017). Halva diagnosen av de två diagnoserna (AG3 och AG2, från Diamant Skolverket, 2013) sattes ihop samt kompletterades med uppgifter på baksidan av bladet (se bilaga 4). Diamantdiagnos AG 2 testar addition och subtraktion inom talområdet 10-19 utan tiotalsövergång och AG 3 testar addition och subtraktion inom talområdet 10-19 med tiotalsövergång (Skolverket, 2013 s.12). Eftersom studiens syfte är att identifiera elevers olika beräkningsstrategier i subtraktion genom att i detalj analysera de sätt eleverna använder för att lösa aritmetikuppgifter, valdes uppgifter som innehöll både växling och utan växling över tiotalet.

Alla elever i båda klasserna deltog i diagnosen förutom två elever från respektive klass som var frånvarande den aktuella dagen. 20 elever i skola A och 23 elever i Skola C gjorde diagnosen, (se tabell 1). Under diagnostillfället instruerades eleverna att byta penna efter den tid, som det står i instruktionerna till Diamantdiagnoserna att testet skulle ta, om eleverna hade automatiserade kunskaper. Eleverna skulle sedan fortsätta att räkna tills de fick veta att diagnostillfället var över. Det gav eleverna möjlighet att fullfölja testet utan stress. När eleverna var klara med första sidan av bladet med de två diagnoserna arbetade de med extrauppgifterna på baksidan för att alla elever skulle vara sysselsatta hela tiden och inte störa varandra. Efter fem minuter bytte eleverna penna och efter tolv minuter avbröts arbetet med diagnosen. I anvisningarna till Diamantdiagnoserna (Skolverket, 2013) står att elever som har flyt i sitt räknande klarar en AG 2 diagnos på 3-4 minuter. Forskaren samlade in alla diagnoserna och analyserade resultaten. Elevernas svar på diagnosen skrevs in i en tabell för

respektive klass för att få en översikt över om och hur alla elever i de båda klasserna löst uppgifterna i diagnosen.
Efter bearbetning av resultatet på diagnoserna gjordes ett urval av de elever, som skulle ingå i intervjustudien, utifrån två kategorier:

1. Elever som inte hann klart på den planerade tiden av 12 minuter.
2. Elever som hade flera fel på diagnosen.

På de båda skolorna deltog 43 elever i kartläggningen. Antalet elever som var frånvarande vid diagnostillfället är i tabell 1 markerade inom parentes. 20 elever valdes ut för intervju, tio elever från skola A och tio från skola C, vilket var något mindre än hälften av eleverna. Alla 10 elever i skola A hade tillstånd från vårdnadshavare att delta i videofilmade intervjuer medan två av de tio utvalda eleverna i skola C inte hade tillstånd och deltog inte. Efter bortfall av två elever intervjuades och videofilmades totalt 18 elever, 10 elever i Skola A och 8 elever i skola C, 11 flickor och 7 pojkar, (se tabell 1).

Tabell 1. Undersökningsgruppen fördelad på skola och kön, inom parentes bortfall.

Skola	**Diagnos**	**Intervju flickor**	**Intervju pojkar**
Skola A	20 (1)	6	4
Skola C	23 (1)	5	3 (2)
Totalt	**43**	**11**	**7**

Lång tid och flera fel på diagnosen, kan indikera att elever har svårighet att lösa uppgifterna på ett effektivt sätt. De elever som inte valdes ut för intervju hade få fel och gjorde diagnosen snabbt och kunde därför antas ha effektiva strategier i subtraktion.

3.2.2 Intervju

Eleverna deltog i intervjuerna under ordinarie lektionstid och lämnade klassen vid intervjutillfället. Intervjuerna genomfördes ostört och varje intervju varade mellan 15-30 minuter, endast en intervju var längre och varade i 45 minuter. Eleverna i skola A hade träffat forskaren tidigare eftersom klassläraren medverkat i fortbildning, medan eleverna i skola C inte hade träffat forskaren.
Eleverna fick sammanlagt elva additions- och subtraktionsuppgifter att lösa under den videoinspelade intervjun. Forskaren läste upp frågan för eleven som fick tid att tänka ut ett svar. Intervjufrågorna ställdes så att elevernas svar var i fokus och intervjuarens frågor kunde omformuleras för att ge eleverna möjlighet att återberätta innehållet i frågan (Cohen & Manion, 1994). Under intervjun uppmuntrades eleven att berätta hur hen kommit fram till ett svar genom att forskaren ställde frågan: ”Hur vet du det?” Eleven gavs möjlighet att utveckla sitt svar och berätta om tillvägagångssättet. Om eleven inte förstod uppgiften lästes den igen med någon liten korrigering för att säkerställa att eleven förstått frågan. Eleverna gavs tid till att fundera utan att forskaren avbröt, om det inte var uppenbart att eleven inte kunde eller ville avge något svar. Vid behov ställdes följdfrågor för att förtydliga att forskaren uppfattat eleven

korrekt och eleven gavs möjlighet att utveckla sitt svar. I en kvalitativ forskningsintervju produceras kunskap i samspel mellan intervjuare och respondent, fokus riktas mot forskningsämnet genom öppna frågor och respondenten bestämmer vad som berättas (Kvale, 2009). Intervjuerna gav möjlighet att ta reda på hur och på vilket sätt olika elever berättar att de löser uppgifterna. Enligt Kvale (2009) är det viktigt att intervjuaren är öppen och lyhörd inför vad som sägs och inte sägs samt är kritisk mot sina egna antaganden och hypoteser. I en kvalitativ intervju är forskaren intresserad av både *vad* respondenten svarar och *hur* de svarar, därför är det viktigt att allt material från intervjun ingår i analysen (Bryman 2004, 2011). Vi kan aldrig veta hur en elev ”tänker” när den utför beräkningar i matematik men genom intervjuer kan vi tolka de strategier de använder. Enligt Bryman (2004, 2011) kan det finnas problem vid intervjuer eftersom svaren är beroende av hur frågan ställts av intervjuaren och hur den svarande förstår frågan. Ett problem i elevintervjuerna är, att svaret kan vara anpassat till att försöka tillfredsställa forskaren genom att forskaren och eleven påverkar varandra ömsesidigt under intervjun (Kvale, 2009).
Eleverna fick frågor från ett formulär (se bilaga 3) med uppgifter som lästes upp, utom en uppgift som skrevs ner med siffror och eleverna fick möjlighet att själva välja hur de ville svara. Bryman (2004) menar att det är viktigt hur frågorna ställs och att det är en fördel med öppna frågor där respondenten kan svara på sitt eget sätt utan krav på olika svarsalternativ. En nackdel med intervju som datainsamlingsmetod är enligt Bryman (2004, 2011) är att intervjuerna tar lång tid och ger mycket material att bearbeta.

3.2.3 Uppgifter

Fem av uppgifterna i intervjuerna handlade om subtraktion och har analyserats i studien (se bilaga 2). Alla uppgifter innehåller tiotalsövergångar eftersom subtraktioner med flersiffriga tal anses vara svårare för elever än additioner (Fuson *et al.*, 1997; Löwing, 2016). Valet av uppgifternas kontexter är inspirerade av FASETT (se fotnot 1). Uppgift 82-7 har ingen kontext och ingår tillsammans med talen i uppgifterna 14–6, 13–7, 15–9 i fyra kombinationer, som Neuman (1989) menar ingår i tio huvudräkningsuppgifter, som är särskilt intressanta, ”de som bäst visar elevernas uppfattningar av hur man ska lösa huvudräkningsuppgifter…” (Neuman, 1989, s.237). Uppgiften 32–27 valdes för att få kunskap om elevernas strategier där talen ligger nära varandra jämfört med uppgiften 82–7 där talen ligger långt från varandra. Kontexterna i uppgift 13=7+_ och 6+_=14 skiljer sig åt genom att i uppgift 13=7+_ ges summan först och frågan om den saknade delen kommer sist och i uppgift 6+_=14 beskrivs den kända delen först och frågan om den saknade delen kommer sist. Alla uppgifterna provar om och hur eleverna använder *talfakta* och *tals del-del-helhetsrelation*

Uppgift 13=7+_: *Du och en kompis har samlat 13 snäckor tillsammans. Du har hittat sju, hur många har din kompis hittat då?*
I uppgiften är helheten 13 känd samt en av delarna 7 och eleven ska ta reda på den saknade delen 6.
Uppgift 6+_=14: *Tänk dig att du ska duka till mellanmålet. Du sätter ut 6 glas på bordet. Ni är 14 barn. Hur många glas behöver du hämta?*
I uppgift 6+_=14 är en del känd 6, samt helheten 14 och eleven ska ta reda på den saknade delen 8.
Uppgift 32–27: *En annan dag har du samlat 32 stenar och din kompis 27. Hur många fler har du då?*
Uppgift 32–27 handlar om skillnaden mellan två närliggande tal.
Uppgift 15–9: *En lördag får du 15 godisar och äter genast upp 9. Hur många har du kvar då?*
Uppgift 15–9 provar hur eleverna behandlar tal som ligger nära 10.
Uppgift 82–7:
Uppgift 82–7 handlar om skillnaden mellan två tal som ligger långt från varandra.

Alla de analyserade uppgifterna handlar om subtraktion och har olika karaktär, där uppgifterna 13=7+-, 6+_=14, 15–9 och 32–27 har en kontext och uppgift 82–7 är utan kontext. Situationerna/händelserna (Fuson, 1988) i kontexterna, beskrivs som ”ta bort” i uppgifterna 15-9 och 82-7, som en ”jämförelse” i uppgift 32-27 och som ”komplettera/lägga” till i uppgifterna 13=7+-, 6+_=14. Kontexten i uppgifterna 13=7+-, 6+_=14 kan göra att eleverna ser subtraktionen som en addition (inverterad addition). Tre av uppgifterna är inom talområdet 1-20: 13=7+-, 6+_=14 och 15-9 och två uppgifter inom det högre talområdet 32–27, 82–7. Frågorna ställdes muntligt till eleverna men i något fall ville en elev läsa frågan själv också. Den sista uppgiften 82–7 fanns nedskrivet på en lapp och lästes av eleverna tillsammans med forskaren.

3.2.4 Video
I föreliggande studie har videoinspelning använts vid intervjutillfällena för att samla in datamaterial. “For decades, researchers in mathematics education have been using technology to capture and study audio and then audio coupled with visual images of teachers and students engaged in mathematical activity” (Powell *et al.*, 2003). Innehållet i de videoinspelade intervjuerna har studerats och analyserats upprepade gånger för att få möjlighet till en fördjupad analys. Videoinspelning ger forskaren möjlighet till en grundlig analys av innehållet i intervjun genom att titta på filmerna vid upprepade tillfällen samt att innehållet i filmerna kan användas vid fortsatt forskning (Bryman, 2004, 2011; Powell *et al.*, 2003). Eleverna i studien verkade inte påverkade av att intervjuerna spelades in. Det var bara vid något enstaka till fälle som någon elev kommenterade kameran. En nackdel vid inspelning är risken att respondenten påverkas av att intervjun spelas in och blir återhållsam eftersom

innehållet i intervjun sparas och det kan medföra att svaren inte blir så intressanta som förväntats (Bryman, 2004, 2011). Det videoinspelade materialet i studien var av god kvalitet och alla elevernas svar framgår tydligt. Inspelningarna gjordes av forskaren genom att en kamera ställdes upp framför eleven riktad så att händerna syntes. Ansikte och händer filmades endast om vårdnadshavare gett tillstånd till att elevens ansikte fick synas i bild. Intervjuerna gjordes i grupprum och det var ibland svårigheter med placeringen av kameran för att få en så god bild som möjligt eftersom de utrymmen vi hade till förfogande var trånga på en av skolorna. Vid enstaka tillfällen blev intervjun störd av att någon öppnade dörren men alla intervjuer kunde genomföras som planerat.

3.2.5 Transkribering

Intervjuerna har transkriberats i sin helhet med undantag för den första delen i frågeformuläret, eftersom den delen inte ingår i studien då den handlar om ett annat innehåll. Transkribering av filmat material är tidskrävande och medför att omfånget av det skrivna materialet är omfattande (Bryman, 2004, 2011). Vid transkriberingen av intervjuerna har allt som sägs i videofilmerna transkriberats. Några ”Hmm” från forskaren finns inte med om de inte fyller någon annan funktion annat än att ”jag hör vad du säger”. När eleverna tänkt tyst har det markerars med punkter för att tydliggöra pauser. Elevers användning av fingrarna, har beskrivits i detalj. Transkribering av videoinspelat datamaterial innefattar både tal och gester (Powell *et al.,* 2003). När filmerna i föreliggande studie analyserades i arbetet med kategoriseringen gjordes en jämförelse av transkripten med innehållet i intervjun för att säkerställa överensstämmelsen. Det är viktigt att säkerställa kvaliteten på transkriberingen (Bryman, 2004). Ett problem vid transkribering är att den som skriver ner vad som sägs på inspelningen kan höra fel eller missuppfatta vad som sägs (Bryman, 2004, 2011).

3.3 Analys

Variationsteorin (Marton & Booth, 1997, 2000; Runesson, 1999; Marton & Pang; 2006; Lo, 2014) har valts som verktyg i analysprocessen vilket skiljer sig från Neumans (1987) fenomenografiska studie.

Analysenheten i studien är de enskilda intervjuerna. Elevernas strategier har analyserats genom att vid upprepade tillfällen titta på videofilmerna. I analysarbetet kunde elevernas beskrivningar av beräkningsstrategier identifieras och kategoriseras. Likheter och skillnader i olika beräkningsstrategier i subtraktionsuppgifterna har analyserats (Runesson Kempe, 2016). Analyserna gjordes utifrån hur varje elev löst de fem uppgifterna. Ytterligare jämförande analys gjordes utifrån de olika sätt respektive uppgift lösts av eleverna (likheter och skillnader). I analysprocessen och upprättandet av de olika kategorierna analyserades filmerna och transkripten tills alla elevernas beräkningsstrategier kategoriserats. När kategoriseringen av strategierna var gjord, delades de in i två underkategorier där en första delen var strategier där eleverna har använt fingrarna, och den andra där fingrar inte använts.

3.3.1 Validitet, reliabilitet och generaliserbarhet

Krav på hög kvalitet ställs på all forskning och en studies kvalitet diskuteras utifrån validitet och reliabilitet. Validitet, det vill säga om studien undersöker vad den avser att undersöka, genomsyrar hela forskningsprocessen (Kvale, 2009). Föreliggande studiens syfte är att identifiera elevers olika beräkningsstrategier i subtraktion genom att i detalj analysera de sätt eleverna använder för att lösa aritmetikuppgifter. Alla intervjuer genomfördes på samma sätt och alla elever fick samma frågor med undantaget att någon fråga inte gavs om en elev haft stora svårigheter med uppgifterna och intervjun därför dragit ut på tiden. Intervjufrågorna i föreliggande studie är utvecklade från frågeformulär i forskningsprojektet (FASETT) och diskuterade med forskare från gruppen. För att öka validiteten kan forskaren pröva om intervjufrågorna mäter vad de avser att mäta genom att låta andra granska dem ”face validity, that is whether the questions asked look as if they are measuring what they claim to measure” (Cohen & Manion, 1994, s.281). Frågorna i studien består av olika typer av subtraktionsuppgifter i syfte att identifiera elevers olika beräkningsstrategier i subtraktion genom att i detalj analysera de sätt eleverna använder för att lösa aritmetikuppgifter. Video användes vid intervjuerna eftersom endast ljudupptagning inte hade gett möjlighet att se hur eleverna använde fingrarna i beräkningarna. Videosekvenserna gav möjlighet att titta på sekvenserna upprepade gånger samt till fördjupade analyser och diskussioner av innehållet med kollegor. För att öka reliabiliteten har ett urval av de analyserade videosekvenserna diskuterats på ett seminarium med forskargruppen i FASETTprojektet. Excerpt från de 18 filmerna valdes ut av forskaren för att ge läsaren exempel på elevers olika beräkningsstrategier. Alla elevers strategier har analyserats men i resultatdelen presenteras endast de olika sätt som framträtt i materialet.

Studiens reliabilitet, resultatens konsistens och tillförlitlighet beskriver noggrannheten av analysen (Kvale, 2009). Ambitionen i studien är noggrannhet i insamlandet av datamaterialet, transkriberingen och redovisningen av studiens resultat. I analysen av elevsvaren gicks filmerna igenom upprepade gånger efter transkriberingen för att säkerställa att allt som sägs under intervjuerna blivit transkriberat. Hur eleverna använde fingrarna kontrollerades med transkripten för att få fram en så korrekt beskrivning som möjligt, vilket ökar reliabiliteten. I en kvalitativ studie är det forskaren som samlar in och analyserar datamaterialet, en risk finns att forskarens egna erfarenheter påverkar tolkningen av resultatet (Cohen & Manion, 1994). Jag är medveten om att min egen långa erfarenhet som lärare, kan ha påverkat mitt sätt att tolka elevernas svar.

I kvalitativ forskning används *reliabilitet* (Bryman, 2004, 2011) som beskriver forskningsresultatens konsistens och tillförlitlighet. Om eleven inte svarat på frågan kan vi inte veta om det beror på att eleven inte kan lösa uppgiften och inte vill visa det eller om eleven inte vill svara. Kategorierna i materialet är de som framkommit vid analysen men vi kan inte veta om alla kategorier av strategier eleverna använder syns i materialet och det påverkar validiteten. En svaghet kan vara att intervjuaren inte alltid lyckas tolka elevens svar så att elevens strategi kommit fram tillräckligt tydligt och den följdfråga som behövts inte ställdes. För att öka reliabiliteten vid kategoriseringen har vid något enstaka fall har en professor tittat på filmsekvensen och transkripten, där det inte varit helt tydligt i vilken kategori elevens strategi skulle placeras i, vilket ökar den interna reliabiliteten. I kvalitativa studier görs inte anspråk på generaliserbarhet därför går det inte att fastställa om kategoriseringen av elevernas beräkningsstrategier gäller även för liknande grupper.

3.3.2 Etiska överväganden

I föreliggande studie har principerna i vetenskapsrådets skrift *God forskningssed* använts (Vetenskapsrådet, 2011). Enligt Bryman (2004) finns det hos olika författare meningsskiljaktigheter om vad som är och inte är etiskt acceptabelt. Studiens upplägg faller inte under lagen om etikprövning och ansökan har därför inte lämnats in.

Informerat samtycke (Vetenskapsrådet, 2011) har inhämtats skriftligt från elevernas vårdnadshavare. En blankett (se bilaga 3) delades ut till elevernas vårdnadshavare, som fyllde i om eleven fick delta i videofilmad intervju och om elevens ansikte fick synas i bild. De elever som fick delta men inte fick synas i bild, filmades så att endast händerna syntes och elevens beskrivningar av beräkningarna spelades in. Eleverna och deras vårdnadshavare informerades om studiens syfte och möjligheten att avbryta deltagande. Tillstånd till intervjuer med eleverna i de båda klasserna inhämtades även muntligt hos skolornas rektorer och via mail av klasslärarna. Anonymiteten för eleverna och skolorna i studien säkrades genom att varje elev fick ett kodnummer som förvaras hos forskaren, och skolorna betecknades med en bokstav. I studien inblandade elever, vårdnadshavare, lärare och rektorer informerades om att datamaterialet endast skulle användas i forskningssyfte. Allt datamaterial i studien har sparats på en extern hårddisk, som endast forskaren har tillgång till och förvaras inlåst.

Hänsyn togs till elever som inte kunnat lösa uppgifter eller använt lång tid jämför Bryman (2004) ”harm to participants” Bryman, 2004, s.509) genom att intervjun avslutades då eleven bedömdes inte orka med fler uppgifter. Eleverna i de båda klasserna fick inte reda på resultaten på diagnosen och kände inte till urvalskriterierna inför intervjuerna. Eftersom en så stor del av eleverna (nästan halva klassen) intervjuades, uppstod inte något etiskt dilemma när elever, som inte lyckats så bra på testet, valdes ut.

4. Resultat

Då tidigare forskning pekar ut elevers användning av fingerräkning som centralt, har i denna studie elevers användning av fingrar i beräkningar av i subtraktion kategoriserats i de strategier som involverar fingrar och de strategier där fingrar inte används:
Av de arton intervjuade eleverna använder elva elever *dubbelräkning uppåt* eller *neråt* med hjälp av fingrarna i sina beräkningar i en eller flera uppgifter. Det betyder att 60 % av de intervjuade eleverna använder fingrar i sina beräkningar. Tre av eleverna använder dubbelräkning på fingrarna i alla uppgifter. De 14 elever (77 %), som räknar uppåt eller neråt på talraden ett steg i taget, (vare sig de räknar med fingrarna eller ej), behandlar talen som enstaka enheter (singel units) vilket gör att de inte använder talens *del-del-helhetsrelation* för att dela upp (decompose) eller sätta ihop (compose) tal i beräkningarna. Fem av eleverna löser några uppgifter med fingrar och andra uppgifter utan fingrar som stöd. Resultatet visar att även de elever, som inte använder fingrarna, är osäkra i beräkningar av uppgifter i subtraktion. Endast sju elever löser alla uppgifterna utan fingrar varav tre elever har svårigheter med växlingen över tiotalet och löser inte uppgifterna korrekt. Dessa elever gissar, får fel svar eller ger upp.
Utifrån det variationsteoretiska ramverket är ett antagande i studien att elevernas beräkningsstrategier speglar hur de erfar tal. Enligt variationsteorin agerar man i världen utifrån hur man erfar den (Marton & Booth, 2000). Elevernas sätt att beräkna subtraktionsuppgifter, har analyserats med fokus på den variation som finns inom och mellan strategier. Elevernas strategier har kategoriserats och skillnader inom och mellan strategier beskrivits. Elever som använder fingrar använder även beräkningsstrategier som beskrivits under ”Övriga strategier”.

4.1 Elevernas beräkningsstrategier

Elevernas beräkningar beskrivs utifrån de strategier som blivit synliga i analysen. En närmare beskrivning av skillnaderna återfinns längre fram i texten. Elevernas beräkningsstrategier har kategoriserats som:

Beräkningsstrategier med fingrar:
Dubbelräkning uppåt
Dubbelräkning neråt
Fingermönster

Övriga strategier utan fingrar:
Uppräkning av tal
Dubblor
Tals del-del-helhet
Talfakta

Elva elever, 60 % använder *dubbelräkning uppåt* eller *dubbelräkning neråt* med hjälp av fingrarna i minst en uppgift. Fyra elever använder *dubbelräkning uppåt/neråt* eller *fingermönster* i alla uppgifter och två elever använder *dubbelräkning uppåt/neråt* i alla uppgifterna.

I tabell 2 framgår på elevnivå, vilka uppgifter eleverna löst med fingrar, vilka de löst utan fingrar, samt om de använt *dubbelräkning uppåt, dubbelräkning neråt* eller *fingermönster*. *Dubbelräkning uppåt* använder hälften av de 18 intervjuade eleverna, i uppgift 32–27 och en tredjedel av eleverna använder *dubbelräkning uppåt* i uppgifterna 13=7+_ och 15–9. Dubbelräkning med hjälp av fingrar markeras på två sätt (se tabell 2 för att visa om eleven har använt *dubbelräkning uppåt* (*D1)* eller *dubbelräkning neråt* (*D2)*. När eleverna avläst antal med hjälp av fingrar utan att räkna dem (subitizing) betecknas det som *M* för *fingermönster*. *Fingermönster* använder samma två elever i de tre uppgifterna 13=7+_, 15–9 och 6+_=14.

Av de 18 intervjuade eleverna är det sju elever, som inte använder fingrarna i beräkningarna och tomma rader (se tabell 2) visar att fingrar inte använts i beräkningarna. Vid åtta tillfällen gjorde elever inte uppgiften, markerade med -, antingen gav eleven upp för att uppgiften var för svår eller så fick eleven inte den sista uppgiften 82–7 eftersom de andra uppgifterna varit svåra. En elev gjorde uppgiften 32–27 med dubbelräkning men svarade inte på de andra uppgifterna eftersom de var för svåra för eleven. *Tals del-del-helhetsrelation, dubblor* och *uppräknade tal* förekommer i båda grupperna av elever som använder fingrar och inte använder fingrar i sina beräkningar. Några elever har använt mer än en strategi för att lösa uppgifterna och då har båda strategierna tagits med i resultatet.

Tabell 2. Elevers fingerstrategier. Av tabellen framgår vilka olika fingerstrategier varje elev använt, D1 = dubbelräkning uppåt, D2 = dubbelräkning neråt, M = fingrar som fingermönster, tom rad = använde inte fingrar och - = gjorde inte uppgiften/gav upp.

Elev	**Uppgift 1** **13=7+_**	**Uppgift 2** **32–27**	**Uppgift 3** **15–9**	**Uppgift 4** **6+_=14**	**Uppgift 5** **82–7**	**Antal uppgifter med fingerräkning, inom parentes dubbelräkning**
Anna		D1				(1)
Bertil						
Cecilia	D1	D1, D2	D2	D1	-	4 (4)
David	M	D1	M	M	D2	5 (2)
Elina						
Fredrik	M	D1	M	M	D2	5 (2)
Gustav						
Hanna	D1		D2			(2)
Ivan			M, D2	D1		2 (2)
Jason						
Kia	D1	D1	D1	D1	D2	(5)
Lotta		-	-		-	
Måns	-	D1	-	-	-	(1)
Nora		D1			D2	(2)
Olle						
Pia	D1	D1				(2)
Robert						
Simon		D1				(1)
Antal elever dubbelräkning och fingermönster	**6**	**9**	**6**	**5**	**4**	

Av tabell 2 framgår att *dubbelräkning uppåt och neråt* med hjälp av fingrar förekommer oftare än *fingermönster*. *Fingermönster* används av tre elever där fingrarna är ett stöd för att uppfatta antal. *Dubbelräkning uppåt* är vanligast i uppgift 32–27 där hälften av eleverna använder fingrarna i sina beräkningar. *Dubbelräkning neråt* används av eleverna i tre av uppgifterna, 15–9, 32–27 och 82–7, tre elever i beräkningar av uppgiften 15–9 och fyra elever i 82–7. En elev var osäker och använde både dubbelräkning uppåt och neråt i uppgift 32–27.

Oavsett beräkningsstrategier med eller utan fingrar är det åtta elever som får fram ett felaktigt svar i sina beräkningar och fyra eleverna som gav upp när de inte kunde lösa uppgiften. I nedanstående text analyseras elevernas olika strategier

I dubbelräkning använder eleverna fingrarna för att hålla reda på antal steg uppåt eller neråt på talraden. Utifrån beskrivningar, som två elever gör. framgår att de håller två talrader samtidigt i huvudet när de säger antalet steg 1,2,3,4 men upptäcker att det är svårt och övergår till att använda ett finger i taget för att hålla reda på var på talraden de befinner sig, vilket är något som identifierats i tidigare forskning (Svenson & Sjöberg, 1982; Neuman, 1987; Gray & Tall, 1994).

Dubbelräkning uppåt med hjälp av fingrarna används i uppgifterna 13=7+_, 15–9, 6+_=14 och 32-27. *Dubbelräkning neråt* används på samma sätt som *dubbelräkning uppåt* men förekommer inte lika ofta som dubbelräkning uppåt, (se tabell 2). *Dubbelräkning neråt* används av eleverna i två av uppgifterna, 15–9 och 82–7. Elever, som använder *dubbelräkning uppåt och neråt* i sina beräkningar, använder inte *talfakta* eller talens *del-del-helhetsrelation* utan tar ett steg i taget och uppfattar talen som enstaka enheter (singel units) vilket enligt Fuson *et al.*, (1997, s.152) kan vara svårt speciellt i subtraktion när talen har en tiotalsövergång.

Fingermönster används av tre elever i uppgifterna 13=7+_ , 15–9 och 6+_=14 där fingrarna är ett stöd för att uppfatta antal och eleverna löser uppgifterna samtidigt som fingrarna visar en bild av talet (subitizing). De elever som använder *fingermönster* visar antal med hjälp av alla fingrarna på båda händerna, till exempel sju fingrar plus tre fingrar, 7+3=10 eller sex fingrar plus fyra fingrar 6+4=10 (Neuman, 2013, s.19). I strategin *fingermönster* behandlar eleverna tal som grupperade enheter (se tabell 2) och talens *del-del helhet* framgår när eleverna visar hur fingrarna delas upp.

Strategin *tals del-del-helhetsrelation* där fingrar inte används, förekommer i alla uppgifterna och mest i uppgiften 82–7 där 7 delas upp i 2+5 och 82 i 80+2. Uppdelningen av talen underlättar beräkningen eftersom eleverna då utför beräkningen i två steg, först utförs subtraktionen 82–2 och sedan 80–5 för att komma fram till svaret 75. I kategorin *tals del-del-helhetsrelation* använder eleverna ett jämt tiotal som hållpunkt (benchmark) för att underlätta beräkningen genom att dela upp ett tal, vilket kräver kunskaper om hur talens delar förhåller sig till helheten. Ett exempel är uppgiften 13=_+7 där kunskaper om delarna i talet 10 en är hjälp genom att eleven först adderar tre till sju för att komma till tio 3+7=10 och sedan fortsätter tre steg från tio 10+3=13, lägger ihop de två treorna för att komma fram till svaret 6, som enligt Murata och Fuson (2006) är en effektiv strategi. I uppgiften 6+_=14 använder eleverna tiotalet som hållpunkt genom att först räkna fyra steg från sex upp till tio och sedan fyra steg från tio till fjorton, 6+4=10, 4+4=8. Fuson *et al.*, (1997 s.145) beskriver en strategi för beräkning över tiotalet, som två elever använder i uppgiften 15–9 först räknas 10–9= 1 och sedan 1+5=6

Dubblor 6+6 eller 7+7 används av flera elever i uppgifterna 6+_=14 och 13=7+_= som en hjälp att lösa uppgifterna, vilket är en strategi som Murata och Fuson (2006) menar inte är den mest effektiva. Det går inte att avgöra om elever som använder dubblor har lärt sig dubblorna utantill. När eleverna använt dubblorna 4+4 och 3+3 har det inte räknats in i kategorin *dubblor* utan som en strategi att se *tals del-del-helhetsrelation.*

Talfakta använder endast en av de intervjuade eleverna i två uppgifter, eleven ”vet” att 15–9=6 och ser direkt att 32–27=5.

Uppräknade tal (singel counting) uppåt eller neråt, använder elever i uppgiften 32–27 och 15–9 när de säger ett räkneord i taget på talraden. Elever kan höra räkneordens antal till exempel i uppgift 32–27=5 ”28,29,30” med eller utan hjälp av ett finger i taget för att hålla reda på

antalet steg (Neuman, 1989). Eleverna behandlar i detta fall talen som enstaka enheter (singel units).
Hur ofta de olika strategierna förkommer i uppgifterna framgår av tabell 3. Eleverna använder vid några tillfällen mer än en strategi i beräkningen vilket innebär att antalet elever (n) överstiger 18 i något fall. Gemensamt med elever som använder fingrar och de som inte använder fingrar är att *tals del-del-helhetsrelation*, *dubblor* och *uppräknade tal* förekommer i båda grupperna.

Tabell 3. Antal tillfällen olika beräkningsstrategier används, på uppgiftsnivå.

Uppgift	Dubbel-räkning uppåt med fingrar	Dubbel-räkning neråt med fingrar	Finger-mönster	Tals del-del-helhets-relation	Dubblor	Uppräknade tal	Talfakta	Skriftliga räkne-metoder/ Algoritm
13=7+_	4	0	2	4	7	0	0	0
32-27	9	0	0	4	0	1	1	0
15-9	2	4	3	8	0	1	1	0
6+_=14	4	0	2	7	7	0	0	0
82-7	0	4	0	10	0	1	0	2
Totalt	**19**	**8**	**7**	**33**	**14**	**3**	**2**	**2**

I tabell 3 framgår att beräkningar med fingrar, *dubbelräkning uppåt*, *neråt* och *fingermönster* de mest frekventa använda strategierna. *Tals del-del-helhetsrelation* förekommer i beräkningar med och utan fingrar och är den enskilt mest förkommande strategin, vilket visar sig genom att eleverna använder tiotalet som hållpunkt (benchmark) i beräkningarna och delar upp talen för att komma till närmaste tiotal. Elever som använder fingermönster utnyttjar tiotalet som en hållpunkt och använder då *talens del-del-helhetsrelation* vilket inte är fallet vid dubbelräkning med fingrar. Dubblor används i två av uppgifterna av elever som inte använder fingrarna.
Växling över tiotalet, har tidigare forskning (Fuson *et al.*, (1997, s.152) visat att elever kan ha problem med. Uppgiften 32–27=5 vållar problem för fyra av eleverna som inte kan växla över tiotalet utan gör beräkningen av uppgiften 32–27=5 genom att först räkna tiotalen 30–20=10 och sedan entalen där de vänder på talen 2–7 men tänker 7–2 och svarar 5+10=15 eller ger upp när de inte kan. När eleverna först räknar tiotalen för sig och sedan entalen använder de ”talsorter” för att utföra beräkningen, vilket Fuson (2003) beskrivit som ett problem eftersom svaren ofta bli fel. Två elever gav upp när de inte visste hur man växlar över tiotalet när de använde talsorter för tiotalen och inte visste hur de skulle göra med entalen. Två elever använder algoritm vid beräkningen, men visar att de inte är helt säkra på själva proceduren. En elev inser att 15–9 är lika svår att räkna ut med huvudräkning som med algoritm eftersom eleven visar ha svårigheter med växlingar över tiotalet och klarar inte proceduren. En elev

använde algoritm och kunde lösa uppgiften 82–7=75. Skriftliga räknemetoder/Algoritm har inte kategoriserats som en strategi men finns med i tabell 3 eftersom två elever använder algoritm vid beräkningen.

4.2. Skillnader i strategier med fingrar

Elevers olika sätt att använda fingrarna i beräkningarna av uppgifterna har kategoriserats som *fingermönster* och *dubbelräkning*[2]. I nedanstående text beskrivs en analys av elevernas beräkningsstrategier när de använt fingrarna för att lösa uppgifterna.

4.2.1 Dubbelräkning

Vid *dubbelräkning* med hjälp av fingrar används ett finger i taget för att hålla reda på antalet steg *uppåt* och *neråt* i beräkningarna och var på talraden de befinner sig. Eleverna håller reda på två talrader samtidigt, en för att räkna upp eller ner på talraden och en för att hålla reda på antalet steg och visar det genom till exempel genom att vika ut eller vika in ett finger i taget. Eleverna håller reda på antalet räkneord med hjälp av fingrarna och behandlar talen som enstaka enheter (singel units) på talraden.

4.2.2 Dubbelräkning uppåt

Dubbelräkning uppåt används av eleverna i uppgift 13=7+_, 6+_=14, 32–27 och 15–9. Ingen elev använde dubbelräkning uppåt i uppgiften 82–7. I exemplen nedan beskrivs de olika sätt som identifierats gällande hur eleverna använder *dubbelräkning uppåt* i uppgiften *32-27*.
Fyra av de nio eleverna, som använder *dubbelräkning uppåt* i uppgift 32–27, håller reda på antalet steg med hjälp av att vika ut eller vika in ett finger i taget från 27 upp till 32.
Kia löser uppgiften 32–27 med att först säga ”32”, tänker tyst, håller ihop båda händerna på bordet, rör med små rörelser ett finger i taget och svarar ”5”. Vid forskarens fråga ”Hur gjorde du då?” förklarar Kia svaret ”5” genom att lägga båda händerna på bordet och börja räkna från 27 samtidigt som hon på höger hand först lyfter tummen och sedan ett finger i taget, räknar högt från 27 upp till 32. Kia ger en förklaring: ”Hon hade ju 27 (lyfter tummen och ett finger i taget på höger hand och säger) 28,29,30,31,32 ja, lite så”, (rad 5-6). Kia räknar uppåt på talraden och håller reda på antalet steg ett i taget med hjälp av fingrarna, två talrader används samtidigt, en för att räkna upp på talraden och en för att hålla reda på antalet steg. När Kia förklarar sin lösning för forskaren, visar hon hela handen som en bild av talet fem som inte räknas utan antalet fem uppfattas genom subitizing.

---
[2] Se 2.1.3 och 2.1.4

Excerpt 1

Kia uppgift 32–27

1. E: 32 (Rör lite på fingrarna)..5
2. F: Hur gjorde du då?
3. E: Jag räknade fortfarande på fingrarna
4. F: Kan du visa på fingrarna hur du gjorde då?
5. E: (Lägger båda händerna på bordet) Hon hade ju 27 (lyfter tummen och ett finger i
6. taget på höger hand) 28,29,30,31,32 ja lite så
7. F: och då blir svaret?
8. E: 5

Kia använder *dubbelräkning uppåt* med hjälp av ett finger i taget även i de fyra uppgifterna 13=7+_ , 6+_=14, 32–27 och 15–9.

Nora använder *dubbelräkning uppåt* på ett annat sätt än Kia i uppgiften 32–27. Nora börjar med att ta fram en knuten vänsterhand, viker ut ett finger i taget och samtidigt säger: ”1,2,3,4…” , (rad 8-9). När Nora säger ”1,2,3,4” visar det att hon håller en talrad för sig själv i huvudet och försöker räkna antalet steg upp till 32, men ändrar sig inser att det är bättre att börja på 27 och räkna uppåt med hjälp av ett finger i taget från 27. Antalet steg håller Nora först i minnet när hon säger ”1,2,3,4”och börjar sedan om och räknar med hjälp av fingrarna på samma sätt som beskrivs av Svenson och Sjöberg (1982, s.94). Nora visar sin förklaring:”.. nej vänta (Knyter handen igen och börjar om med ett finger i taget) 28,29,30,31,32 (håller hela vänsterhanden på bordet, viker ut ett finger i taget, tar fram tummen på högerhanden) 33 så!”, (rad 9-10). När Nora har kommit till 33 är hon nöjd och visar sitt svar, ”6” genom hela den ena handen och tummen på den andra handen. Hon slutar inte vid 32 utan räknar ett steg för långt och får då svaret 6.

Excerpt 2

Nora uppgift 32–27

1. Eh…(Tänker några sekunder med händerna under bordet)..6
2. F: Hur tänker du då?
3. E: Eh…vet inte
4. F: Du räknar på något sätt
5. E: Jag räknar på fingrarna
6. F: Ta fram dina fingrar och visa hur du gör när du räknar på fingrarna, så får jag
7. se….(uppmuntrar till att visa)
8. E: Eller jag vet inte ..(tar fram en knuten vänsterhand och viker ut ett finger i taget,
9. börjar med tummen,) 1,2,3,4. nej vänta

10. (Knyter handen igen och börjar om med ett finger i taget) 28,29,30,31,32 (håller hela vänsterhanden på bordet, viker ut ett finger i taget, tar fram tummen på högerhanden) 33 så!

Nora och Simon, som beskrivs nedan, använder *dubbelräkning uppåt* när de beräknar 32–27 men på ett annat sätt än Kia. När Nora och Simon håller säger 1,2,3,4 är det exempel på att de har två talrader samtidigt i huvudet och räknar först på en talrad 1,2,3,4, för att ta reda på antalet steg och på en annan talrad från 27 upp till 32 på talraden men att de gör det på två olika sätt.
Simon håller ihop båda händerna på bordet, rör lite på fingrarna och räknar uppgiften 32-27 tyst för sig själv och svarar ”13”. När han uppmanas av forskaren att förklara säger han ”13 för att 13+27 är 32. Ja, eller hur?” sedan ”12” och när han får frågan hur svaret kan vara 13 säger han att han inte vet. Han viskar ”jag vet inte. Jag får 13 ifrån min hjärna” och förklarar sedan att han använder fingrarna. På uppmaning från forskaren tar han fram fingrarna på bordet, använder pekfingret på den ena handen, räknar på ett finger i taget på den andra handen, räknar entalen från 7 ”7,8,9,10,11,12”, (rad 3). När forskaren frågar hur många steg det är visar Simon genom att peka på talen som finns nedskrivna på pappret. Simon visar hur han räknar, tar fram handen och lyfter ett finger i taget samtidigt som han räknar ”1,2,3,4,5”, (rad 10-12). Av beskrivningen framgår att han bortser från tiotalen och räknar antalet steg på talraden från 7 upp till 12, ser på fingrarna utan att räkna dem och använder subitizing för att uppfatta att det är fem steg mellan 7 och 12. Detta tyder på att han räknar på två talrader samtidigt, antalet steg mellan 7 och 12 och att han är på 27 på talraden och ska till 32.

Excerpt 3
Simon uppgift 32–27

1. E: Så (Tar fram båda händerna och lägger dem på bordet)
2. F: Hur gör du?
3. E: (Pekar med pekfingret på vänster hand på ett finger i taget på höger hand)
4. 7,8,9,10,11,12
5. F: Du tänker att du räknar från 7
6. E: till 32
7. F: Hur många steg är det då?
8. E: 5
9. F: Är det 5 steg upp? Visa på fingrarna hur du gjorde då!
10. E: (Lyfter ett finger i taget på högerhanden) 1,2,3,4,5
11. F: Du räknade inte 1,2,3,4,5. Du startade ju på 27 sa du
12. E: jag räknade 1,2,3,4,5 (Visar på talet som är nerskrivet)
13. F: Aha, du räknade antalet steg du gick uppåt, det var det som var 1,2,3,4,5

Det som skiljer Nora och Simon är att Simon inte nämner att han räknar från 27 upp till 32 utan säger i stället att han räknar från 7 upp till 12, medan Nora räknar upp från 27 till 33 även om hon räknar ett steg för långt. Båda använder *dubbelräkning uppåt* där de visar antalet steg med ett finger i taget och använder talen som enstaka enheter (singel units).
Anna räknar fel på talraden när hon löser uppgiften 32–27. Hon funderar några sekunder på uppgiften, håller båda händerna på bordet och rör knappt synbart på fingrarna. Det framgår att svaret hon ger är ”4” men på frågan hur hon vet det, förklarar Anna sin beräkning genom att vika ut ett finger i taget på vänster hand och berättar att hon räknar ”uppåt 28, 29, 30, 32 alltså skiljer det 4”, (rad 5). Anna inser inte att svaret är fel, då hon missar ett tal på talraden.

Excerpt 4
Anna uppgift 32–27

1. E:…(Blundar, tänker och rör lite på fingrarna)..4
2. F: Hur vet du det?
3. E: För då hade kompisen mindre än jag och då kan man gå uppåt så som till exempel
4. om det var då, hur många var det 27 då går man uppåt 28, 29, 30 (Visar med ett finger
5. i taget på vänster hand) 32 alltså skiljer det 4.

Resultaten ovan tyder på att Kia, Nora, Simon och Anna inte behandlar talen som grupperade enheter (composed units) och använder sig inte av *talens del-del-helhetsrelation* utan gör en beräkning. I sina beräkningar använder de *dubbelräkning uppåt* och visar ett finger i taget för att hålla reda på antalet steg och var på talraden de befinner sig. I de sätt de löser uppgiften behandlar de talen som enstaka enheter (singel units) som räknas ett i taget.
Subtraktionsuppgiften 13–7 löser eleverna genom att räkna upp ett steg i taget från 7 till 13 för att få fram den saknade delen. *Dubbelräkning uppåt* används av fyra elever i uppgiften 13=7+_ och fyra elever i uppgiften 6+_=14.
Hanna använder *dubbelräkning uppåt* i uppgift 13=7+_ . När hon får frågan tänker hon tyst för sig själv, håller ihop båda händerna på bordet och böjer lite på ett finger i taget på den högra handen och svarar ”6”, (rad 1). Forskaren frågade Hanna hur hon gjorde och då klappar hon med högerhanden på vänsterhanden för att visa att hon använt fingrarna. Hanna säger ”Jag räknade på med fingrarna”, (rad 8). Då forskaren uppmanar Hanna att visa hur hon gjorde med fingrarna svarar Hanna ”8,9,10,11,12,13” samtidigt som hon viker ut ett finger i taget med vänsterhanden och ytterligare ett finger på högerhanden för att visa att det är sex steg från 8 upp till 13, (rad 10-11). Hanna räknar ett steg i taget och håller ordning på det antal steg hon tagit från 7 upp till 13 med hjälp av fingrarna och behandlar talen som enstaka enheter (singel units).

Excerpt 5

Hanna uppgift 13=7+_

1. E: Eh, eh,….6, va
2. F: Hur vet du det?
3. E: Jag eh.. räknade (klappade på händerna)
4. F: Hur räknade du?
5. E: Eh att ..mm 7 var det va? Vad var det? (Tittar på frågan på frågeformuläret)
6. Jaha! 13 st
7. F: 13 st tillsammans och du har hittat 7 och hur många har din kompis hittat då?
8. E: Jag räknade på med fingrarna
9. F: Javisst, visa hur du gjorde med fingrarna!
10. E: (Tar vänsterhanden ett finger i taget och fortsätter sen med högerhanden ytterligare
11. 2 fingrar) 8,9,10,11,12,13

Ytterligare tre elever Kia, Pia och Cecilia, använder *dubbelräkning uppåt* i uppgiften 13=7+_ och löser uppgiften genom att lyfta ett finger i taget för att hålla reda på antalet steg från 8 upp till 13 samtidigt som de räknar uppåt på talraden till 13. De räknar antalet sagda räkneord och behandlar talen som enstaka enheter (singel units) och inte som grupperade enheter (composed units).

Subtraktionen 14–6 löser eleverna genom att räkna upp från 6 upp till 14 för att få fram den saknade delen 8. Anna löser uppgiften 6+_=14 med hjälp av kunskaper om *dubblor* 6+6=12 vilket framgår av Annas förklaring, (rad 3). När hon får frågan i uppgiften tänker hon tyst medan hon håller ihop båda händerna på bordet och rör lite på två fingrar på högerhanden och svarar ”8”. Hon visar att hon vet att skillnaden mellan 14 och 12 är två och adderar två till sex för att komma upp till 14 när hon säger att ”man går uppåt från 6,7,8”. Anna visar sin beräkning från 6 upp till 8 när hon använder *dubbelräkning uppåt* genom att hålla i två fingrar på vänsterhanden samtidigt som hon säger ”6,7..,8” för att hålla reda på de två stegen upp till 14, (rad 5-6).

Excerpt 6

Anna uppgift 6+_=14

1. E: (Håller ihop båda händerna på bordet och rör lite på två fingrar) …8
2. F: Hur vet du det?
3. E: För om det hade varit 12 barn då hade jag behövt hämta 6 glas eftersom jag hade
4. ställt fram 6 men nu var det 2 mer och då kan man gå uppåt från 6,7, 8
5. (Visar med fingrarna genom att hålla i två fingrar på vänsterhanden med
6. högerhanden)

Cecilia använder olika sätt i sin beräkning av uppgift 6+_=14, ”räkna från början”/”räkna alla”[3] och *dubbelräkning uppåt*. Hon börjar med att använda kunskaper om dubblor: ”Det kan vara 6, .. 6+6”, (rad 1), ångrar sig och fortsätter med att räkna från början vilket betecknas som ”att räkna alla” samtidigt som hon knyter handen och viker ut ett finger i taget för att hålla reda på antalet steg, *dubbelräkning uppåt* och får fram svaret 8 ”(mumlar snabbt 1,2,3,4,5,6,) 6,7, 8, 9,10,11,12,1314, jag ska hämta 8 vänta….”, (rad 2-4). Hon visar att hon inte litar på att hon fått rätt svar och använder *dubbelräkning uppåt* genom att vika ut ett finger i taget medan hon räknar uppåt från 7 två gånger: ”Ok jag börjar från 6 (knyter höger hand och viker ut ett finger i taget) 7,8,9,10,11,12,13,14 (Håller fram handen och räknar två omgångar på samma hand), Jag får det till 8. Ska jag ställa ut 8, vänta?”, (rad 7-8). Cecilia är inte nöjd med svaret och visar att hon inte litar på sig själv och räknar en gång till genom att skriva ner 6, lämnar ett mellanrum och skriver 14, (rad 10). ”Ska jag ställa ut 8, vänta (tar pennan) jag hade dukat upp 6 (skriver 6) ok det skulle bli vad heter det.. jag hade 14 personer (skriver 14 och släpper pennan) 7,8,9,10,11,12 ja ok då ska jag lägga till 8 då”. Hon kontrollerar en sista gång att svaret är 8 och använder *räkna från början* och *dubbelräkning uppåt*, (rad 6). ”Nu ska räkna 6 plus 8 snabbt 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11 (Viker ut ett finger i taget på höger hand) 12,13,14, ja jag tror 8”, (rad 12). Cecilia använder *dubbelräkning uppåt* för att få fram svaret men visar att hon är osäker på om svaret är rätt genom att räkna om flera gånger. Cecilia använder inte *talens del-del helhet*, utan behandlar talen som enstaka enheter (singel units) som räknas.

Excerpt 7
Cecilia uppgift 6+_=14

1. E: Det kan vara 6, .. 6+6 är nej vänta
2. (Knyter höger hand och viker ut ett finger i taget) (mumlar snabbt 1,2,3,4,5,6,) 6, 7,
3. 8, 9,10, 11, 12, 13 14, jag ska hämta 8 vänta, vänta hur många glas ställde jag ut nu
4. igen?
5. F: Du hade satt ut 6 men ni är 14 barn
6. E: Ok jag börjar från 6 (knyter höger hand och viker ut ett finger i taget)
7. 7,8,9,10,11,12,13,14 (Håller fram handen och räknar två omgångar på samma hand)
8. Jag får det till 8. Ska jag ställa ut 8, vänta
9. (tar pennan) jag hade dukat upp 6 (skriver 6) ok det skulle bli vad heter det.. jag hade
10. 14 personer (skriver 14 och släpper pennan)
11. 7,8,9,10,11,12 ja ok då ska jag lägga till 8 då. Nu ska jag räkna 6 plus 8 snabbt
12. 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11 (Viker ut ett finger i taget på höger hand) 12,13,14, ja jag tror 8

Cecilia använder ”räkna alla” när hon snabbt räknar från början 1,2,3,4,5,6 för att sedan fortsätta med de tal som fattas upp till 14, Fuson (1988) beskriver det som ”sequence counting

[3] Se (Carpenter & Moser, 1984 ; Fuson,1988, 2003) under Tidigare forskning och teoretiskt ramverk

all” när en elev snabbt säger alla räkneorden i det första talet och är redo att räkna vidare uppåt men inte är helt säker på beräkningen.
Ytterligare två elever Kia och Ivan, använder *dubbelräkning uppåt* där Kia räknar från 7 upp till 14 på samma sätt som beskrivits i uppgift 32–27. Ivan förklarar först skillnaden mellan 6 och 8 och visar det genom att peka med högerhandens pekfinger på ett finger i taget på vänsterhanden och fortsätter sedan på högerhanden och säger ”7,8,9,10,11,12,13,14” för att hålla reda på antalet steg från 7 upp till 14. De fyra eleverna som använder *dubbelräkning uppåt* i uppgiften 6+_=14 använder inte talfakta eller *talens del-del-helhetsrelation* utan *dubbelräkning uppåt* med hjälp av ett finger i taget för att hålla reda på antalet steg från 7 upp till 14 för att få fram svaret 8. Kia och Ivan behandlar tal som enstaka enheter (singel units) i stället för grupperade enheter (composed units).
Elevernas användning av *talfakta* och växling över tiotalet prövas i uppgiften 15–9. Två elever, Kia och Pia använder *dubbelräkning uppåt* i uppgiften 15–9 på två olika sätt där Kia visar ett finger i taget medan hon räknar från 9 upp till 15 på samma sätt som hon gjort i tidigare uppgifter 13=7+_, 6+_=14 och 32–27.
Pia beskriver sin beräkning på ett annat sätt. Hon säger att hon använder ”Pytte lite fingrarna” när hon räknar upp från 9 upp till 15, (rad 7). Pia beskriver hur hon tänker med fingrarna ”jag tänkte fingrarna och så, sen gjorde jag, jag tänkte inte fingrarna men jag tänkte 1,2,3”, (rad 9-10). Pia beskriver att hon både med och utan hjälp av fingrarna, försöker hålla reda på antalet steg”1,2,3” som en talrad i huvudet samtidigt som hon räknar på talraden från 9 upp till 15.

Excerpt 8
Pia uppgift 15–9

1. E: och det var 15. …………..6
2. F: Hur tänker du då?
3. E: Jag tänker.. 9 och sen räknar jag upp till 15
4. F: Ett i taget då eller?
5. E: Mmm
6. F: 9,10…Du använde inte fingrarna nu den här gången? Räknade du i huvudet då?
7. E: Pytte lite fingrarna
8. F: Pytte lite fingrarna fast det inte syntes
9. E: jag tänkte fingrarna och så, sen gjorde jag, jag tänkte inte fingrarna men jag tänkte
10. 1,2,3
11. F: men du tänkte fingrarna på något sätt i huvudet då?
12. E: mm

Kia och Pia använder inte *talens del-del-helhetsrelation* och behandlar inte talen som grupperade enheter (composed units) *utan* som enstaka enheter (singel units). Med hjälp av fingrarna håller de reda på antalet steg i sina beräkningar för att få syn på skillnaden mellan 9 och 15, vilket är *dubbelräkning uppåt*. Kia och Pia använder inte tiotalet som hållpunkt (benchmark) i beräkningen.

4.2.3 Dubbelräkning neråt

Dubbelräkning neråt förekommer hos eleverna i två av uppgifterna, 15–9 och 82–7, tre elever i beräkningar av uppgiften 15–9 och fem elever i 82–7. Eleverna använder *dubbelräkning neråt* när de visar ett finger i taget för att i huvudet hålla reda på antalet steg, räknar de sagda orden och var de befinner sig på talraden. De räknar neråt i uppgift 15–9 på två olika sätt, antingen räknar de nio steg neråt från 15 eller sex steg ner från 15 till 9. I uppgift 82–7 använder eleverna *dubbelräkning neråt* när de med hjälp av fingrarna håller reda på antalet steg från 82 ner till svaret 75.

Tre elever Hanna, Ivan och Cecilia använder *dubbelräkning neråt* i uppgiften 15–9. När Hanna får uppgiften 15–9 svarar hon ”4” genom att resonera med sig själv om det går att använda 9–5 men blir osäker och säger att hon inte vet hur man kan göra, (rad 3). Hanna förklarar att man kan räkna neråt från 15 till 9 genom att sträcka ut ett finger i taget och samtidigt räkna ”14,13,12,11,10,9”, (rad 4-6). Hon räknar ner på talraden från 15–9 och använder ett finger i taget för att hålla reda på antalet steg till 9 på samma sätt som beskrivs av Svenson och Sjöberg (1982, s. 94). Genom subitizing ser Hanna på de utsträckta fingrarna utan att räkna, att det är sex steg ner från 15 till 9, (rad 12). Hanna visar inte att hon ser *talens del-del-helhetsrelation* och använder inte tiotalet som hållpunkt, utan använder *dubbelräkning neråt* med fingrarna i sin beräkning och behandlar talen som enstaka enheter (singel units).

Excerpt 9
Hanna uppgift 15–9

1. E: Mm jag har mm …eh…. 4 kvar
2. F: Hur tänker du då?
3. E: Jag vet inte hur man kunde men jag gjorde så att jag flyttade, nej vänta, ….. för att
4. eh……9 minus 5 det går ju inte eller nej jag vet inte hur man kan…kan man gör så
5. här nej, det kan man inte………. 15–9 eh… för att nej vänta. Jag vet inte hur man ska
6. förklara…... Ok
7. 15 kan man ju göra (Sträcker fram vänster handflata och tar fram ett finger i taget på
8. högerhanden, börjar med höger pekfinger, går sedan över till vänsterhanden och
9. sträcker ut ett finger i taget, tittar, på antalet utsträckta fingrar fyra på vänster hand och
10. två på höger hand) 14,13,12, 11, 10, 9
11. F: Och vad blir svaret då?
12. E: 6

Ivan använder *dubbelräkning neråt* i uppgift 15–9 på ett annat sätt än Hanna och inser inte att svaret är fel trots att han räknar om antalet steg två gånger. Ivan förklarar att han tänker som om det var en verklig händelse att han äter upp nio godisbitar, (rad 5-6). Han förklarar att svaret på uppgiften är ”4” genom att snabbt vika ner ett finger i taget på vänster hand utan att räkna, (rad 11-13). När han uppmanas att visa med fingrarna lägger han händerna på bordet, räknar först ett finger i taget på vänster hand och sedan tummen och pekfingret på höger hand och räknar från 15 ner till 9, ser att det är tre fingrar som inte är räknade och menar att 3 är svaret, ”14,13,12,11,10,9; 3 menar jag”, (rad 21-25 och bild 3). När han uppmanas att visa ännu en gång räknar han från 14 till 9 på samma sätt med fingrarna först på vänster hand och tar sedan tummen på tummen på höger hand, ser fyra fingrar som inte är räknade på höger hand och svarar ”4”, (rad 29-33 och bild 4[4]).

Bild 3. Bilden visar Ivans beräkning från 15, ett steg i taget till 9. Ivan ser de kvarvarande tre fingrarna som svaret och inte de sju stegen från 15 till 9.

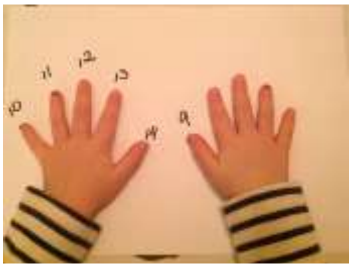


Bild 4. Bilden visar Ivans beräkning från 14, ett steg i taget till 9. Ivan ser de kvarvarande fyra fingrarna som svaret och inte de sex stegen från 15 till 9, som är rätt svar.

Excerpt 10

Ivan uppgift 15–9

1. E: ………..4
2. F: Hur tänker du då?
3. E: 15–9
4. F: Och hur räknar du ut det?
5. E: ..att det .. att alltså. Jag tänker liksom typ att det var på riktigt typ, hur det skulle se
6. ut om man tog bort det liksom
7. F: Och hur gör du då?
8. E: eh…….eh,,..att… jag tänkte lite med fingrarna också att jag tog bort …
9. F: Visa med fingrarna då hur du gjorde! Lägg fingrarna på bordet så att jag får se hur
10. du tänkte
11. E: Alltså.. typ att… (lägger fram båda händerna på bordet)…jag hade typ..15 och så
12. räknade jag bara ner så här 9 (viker tummen och ett finger i taget snabbt med vänster
13. hand utan att räkna)
14. F: Räknade du 9 steg neråt?

[4] Tillstånd till fotografering av elevens händer har inhämtats av eleven och dess vårdnadshavare

15. E: Jaa
16. F: Och då startade du på 15 och räknade …..kan du visa med fingrarna hur du gör då!
17. E: Om det här var 15 (Har båda händerna på bordet, rör lite på alla fingrar, tar med
18. höger hand ett finger i taget på vänster hand) tar jag typ 14, 13, 12, 11, 10, 9
19. F: Det var så du gjorde! Och då kom du till
20. E: 4
21. F: Kan du visa på fingrarna en gång till
22. E: (Håller med höger hand och börjar räkna på tummen på vänster hand, en finger i
23. taget på höger hand, fortsätter räkna två fingrar på vänster hand men säger lite fel,
24. hoppar över 13, rättar sig direkt) 14,13,12,11,10,9. 3 menar jag
25. F: Vilket är det som är svaret då?
26. E: 3
27. F:.. är det 3 som är svaret?
28. E: …det är
29. F: kan du visa med fingrarna igen? Du startade på 15 (Pekar på elevens fingrar)
30. E: 14,13,12,11,10,9 (Håller med höger hand och börjar räkna på tummen på vänster
31. hand en finger i taget , fortsätter räkna tummen på vänster hand och håller fram
32. fyra fingrar på höger hand utan att titta på dem)
33. F: Och då svarar du?..
34. E: 4

Ivan visar att han är osäker på om han ska börja räkna på 15 eller 14 och räknar först antalet steg ner från 15 till 9 och sedan från 14 till 9 efter uppmaning från forskaren att visa en gång till. Han använder sina tio fingrar och ser de kvarvarande fingrarna på höger hand som svar på uppgiften i stället för de räknade stegen. Han räknar två gånger och reagerar inte på att det då är två olika svar 4 och 3. Ivan visar att han är osäker på var han finner svaret när han räknar på fingrarna. Eftersom han ser att han har kvar fyra respektive tre fingrar menar han att de fingrar som inte är räknade är svaret på uppgiften. Ett sätt att se svaret på uppgiften, som stämmer överens med hur Ivan löser uppgiften, beskriver Neuman (2013) nedräkning i uppgiften 9–7 med dubbelräkning på ett liknande sätt. Eleven går 7 steg bakåt men vet inte ”vilka ord som representerar den del av talet som tas bort och vilka som representerar de som sedan återstår” (s.11).
Cecilia använder också *dubbelräkning neråt* med hjälp av fingrarna när hon löser uppgift 15–9 men på ett annat sätt än Ivan. Cecilia räknar nio steg neråt i uppgiften 15–9 genom att vika ner ett finger i taget. Hon beskriver hur varje finger får representera det ”tal” som tas bort, (rad 2-4). Cecilia använder en hand, håller reda på att när handen är knuten, har 5 tal tagits bort och är det ett tal till som ska tas bort ”tar bort 0:an”, (rad 3). För att vara säker säger hon att hon ”har 9” och börjar om igen och räknar tre steg ner till 7 men nöjer sig och är säker på

att svaret är 6. Cecilia behandlar talen som enstaka enheter (singel units) som räknas ett i taget.

Excerpt 11
Cecilia uppgift 15–9

1. E: 15 minus 9 då (tar fram höger hand och viker ner tummen och sedan ett finger i
2. taget, håller handen knuten) tar bort 5:an vad heter det tar bort 4:an tar bort 3:an och
3. vad heter det tar bort 2:an tar bort 1:an, tar bort 0:an då har jag 9 vad heter det 9,..ta
4. bort 9:an, ta bort 8:an ta bort 7:an, jag får det till 6 godisar

Ivan och Hanna räknar 15–9 på två olika sätt, Cecilia räknar nio steg neråt medan Hanna räknar sex steg ner till 9. De tre eleverna Hanna, Ivan och Cecilia visar att de är osäkra på om beräkningarna är rätt när de använder *dubbelräkning neråt*. Ingen av de tre eleverna använder *talens del-del-helhetsrelation* eller närheten till talet 10 och behandlar inte talen som grupperade enheter (composed units) utan som enstaka enheter (singel units).
I uppgiften 82–7 använder fyra elever *dubbelräkning neråt*. Kia, David och Fredrik räknar bakåt från 82 och visar att de både vet var de befinner sig på talraden och räknar antalet steg neråt när de viker ett finger i taget medan de räknar sju steg neråt från 82 och landar på 75.
David förklarar hur han håller reda på antalet steg genom att vika in ett finger i taget på den ena handen och går sedan över till andra handen för att hålla reda på att det är sju steg ner och landar på talet 75 på talraden, (rad 5-8). David håller ordning på antalet sagda räkneord med hjälp av fingrarna och vet att när han vikt in sju fingrar har han räknat ner till rätt tal på talraden men säger att ”Det är lite svårt att förklara”, (rad 8).

Excerpt 12
David uppgift 82–7

1. E: Hmmm….(lägger upp båda händerna på bordet lyfter och viker in fingrar på
2. vänster hand utan att säga något) alltså det var ganska svårt, får se,
3. vänta 82, 81 (viker in tummen och ett finger i taget på västerhanden) 81, 80, 79,
4. 78,77 (går över till högerhanden och håller fram tre fingrar) 76, 75.
5. Jag räknade så här att …jag ,, jag hade 10 (lägger upp båda händerna på bordet) jag
6. räknar med den där , man kan säga att jag räknar med…jag räknar med (visar alla
7. fingrar) 81, 80, (viker ner tummen och ett finger i taget på vänsterhanden och går sen
8. över på högerhanden) 79, 78,77,76,75. Det är lite svårt att förklara.

David löser uppgiften, men visar inte att talet 7 kan delas upp i 2 och 5 för att underlätta beräkningen, utan använder *dubbelräkning neråt* med hjälp av ett finger i taget för att hålla reda på antalet steg och var på talraden han befinner sig på samma sätt som Kia, David och Fredrik, som behandlar tal som enstaka enheter (singel units).

Nora använder *dubbelräkning neråt* i uppgiften 82–7 på ett annat sätt. Nora håller reda på antalet steg när hon säger ”1,2,…3,4 vänta nu” genom att vika ut tummen på höger hand och ett finger i taget, men blir osäker och börjar om med tummen och ett finger i taget ” Vänta 1,2,3,4 5”, (rad 6). När hon har vecklat ut hela höger hand, viker hon upp tummen på vänster hand, sedan pekfingret) och fortsätter ”6,7”. När hon vikt ut sju fingrar framgår det att hon är osäker på var på talraden hon befinner ”5 jag menar 72 eller… Vänta 71 tror jag”, (rad 6-9). Det förefaller som om hon försöker hålla två rader i huvudet dels de sju stegen från 82 och var på talraden hon befinner sig när hon säger ”Jag tänker...först tar jag 82 (pekar på talet 82 på post-it lappen) och så då så tänker jag , då måste jag veta hur länge jag ska räkna det är då som jag räknar på fingrarna”, (rad11-12). Efter frågan från forskare om hur hon gör när hon säger ”ett” svarar Nora ”Då är jag på 81.. sen på 80, 79, 78, 77, ja och sen 76 eller jag vet inte”, (rad 17). Att räkna ner ett steg i taget från 82 till 75 i minnet så som Nora gör, menar Svenson och Sjöberg (1982) är mer komplicerat än att använda ett finger i taget och räkna ner till 75 med hjälp av fingrarna.
Efter uppmaning från forskaren att visa med fingrarna, byter Nora strategi och visar hur hon räknar ner på talraden från 82 sju steg neråt samtidigt som hon viker ut ett finger i taget, fem fingrar på vänster hand och två fingrar på höger hand, (rad 20-22). Nora uppfattar troligen antalet steg med hjälp av de utvikta fingrarna genom subitizing eller att sju fingrar är en bild som vikts ut samtidigt som hon säger talet 75. Nora delar inte upp talet 7 i 2 och 5 för att underlätta uträkningen, utan använder *dubbelräkning neråt* med hjälp av ett finger i taget och behandlar talen som enstaka enheter (singel units).

Excerpt 12
Nora uppgift 82–7

1. E: Använder inte fingrarna men jag måste räkna ut det först……(tar fram fingrarna)
2. F: Räkna gärna högt, det går jättebra
3. E: (Knyter höger hand, viker ut tummen, pekfingret och långfingret) 1,2,…3,4 vänta
4. nu, glömde av, vänta, jag måste räkna om (Knyter höger hand igen, viker upp tummen
5. igen och ett finger i taget) 1,2,
6. Vänta 1,2,3,4 5 (har vecklat ut hela höger hand och har vänster hand knuten, viker upp
7. tummen på vänster hand och sedan pekfingret) 6,7. 5 jag menar 72 eller…
8. F: Blir det 72?
9. E: Vänta 71 tror jag
10. F: När du räknar 1,2,3 hur tänker du då? För du tänker nånting mer i huvudet då?
11. E: Jag tänker...först tar jag 82 och så då så tänker jag , då måste jag veta hur länge jag
12. ska räkna det är då som jag räknar på fingrarna
13. F: Ja, du visar att du tar 1 steg bakåt genom att ta 1:an eller du, säger 1? Du menar att
14. då är du på? När du säger 1
15. E: Då är jag på 81,

16. F: och sen då?
17. E: sen på 80, 79, 78, 77, ja och sen 76 eller jag vet inte
18. F: det är väldigt tydligt hur du säger men var ska du landa då? Visa med händerna hur
19. du håller reda på det
20. E: Det var (Viker fram fingrarna igen och börjar med tummen och ett finger i taget på
21. höger hand) 81,80,79,78,77,76, (viker ut tummen och pekfingret finger på vänster
22. hand och tittar på dem) 75

David, Fredrik och Kia använder *dubbelräkning neråt* på samma sätt när de lyfter eller viker ut ett finger i taget, när de räknar sju steg samtidigt som de räknar ner på talraden från 82. De vet att de kommit fram till svaret när de vikt ut sju fingrar. Antalet sju ser de genom att titta på fingrarna utan att räkna dem (subitizing). Noras sätt att beskriva sin beräkning börjar med att hon säger ”1,2,3,4” och så vidare för att både räkna stegen och ha talraden från 82 ner till 75 i huvudet. När hon inser att det är svårt med två talrader samtidigt i huvudet gör hon på samma sätt som David, Fredrik och Kia och visar ett finger i taget medan hon räknar ner på talraden från 82 till 75. Ingen av eleverna visar att de har fått syn på att talet 7 kan delas upp i 2+5, använder inte *talens del-del-helhetsrelation*, då de inte behandlar tal som grupperade enheter (composed units), utan använder *dubbelräkning neråt* med hjälp av ett finger i taget och behandlar tal som enstaka enheter (singel units).

4.2.4 Fingermönster

Fingermönster, där fingrar används för att representera en bild av tal utan att räkna antalet fingrar, används av två elever i uppgiften 13=7+_ , tre elever i uppgiften15–9 och två elever i uppgiften 6+_=14. Ivan använder *fingermönster* samtidigt som *dubbelräkning neråt* vilket har beskrivits i tidigare text. Fredrik och David, som exemplifieras nedan använder *fingermönster* i uppgifterna 13=7+_ , 15–9 och 6+_=14 och behandlar tal som grupperade enheter (composed units).

Fredrik visar med hjälp av fingrarna beräkningen av uppgift 13=7+_ . Talet 7 representeras av alla fingrar på höger hand, tummen och pekfingret utsträckta på vänster hand, (rad 1-3). Han visar att tre fingrar är nervikta på vänster hand och menar att om man tar med dem så är det tio, ” då är ju..det 10 om man har upp alla”, ” här är det 3 fingrar kvar”, (rad 4-5). Fredrik säger att han måste lägga till 3 ”så 3 och sen så skulle det va 13 så då så lägger jag till…3 till och då blir det alltså 6”, (rad 5-6). Det framgår att Fredrik ser de tre nervikta fingrarna som skillnaden mellan 7 och 10 och att han ska lägga till ytterligare 3 för att komma till 13. När forskaren vill förstå var 3 kommer ifrån förklarar han” För att vi skulle samla 13 och man har inte 13 fingrar” och ser då att det är tre hopp från 10 till 13, (rad 8-10).

Excerpt 13
Fredrik uppgift 13=7+_

1. E: Om där är 7 (visar fingrarna på höger hand och de två utvikta fingrarna på vänster
2. hand)… om man…. då är ju..det 10 om man har upp alla (visar båda händerna med
3. utsträckta fingrar) då så (visar tummen och pekfingret på vänsterhanden) så kan man
4. räkna att det ….här är det 3 fingrar kvar (Visar tre fingrar som är nervikta på
5. vänsterhanden) så 3 och sen så skulle det va 13 så då så lägger jag till…3 till och då
6. blir det alltså 6.
7. F: Varifrån får du dom 3?
8. E: För att vi skulle samla 13 och man har inte 13 fingrar så då kan man ju inte räkna
9. så, så att då så räknar man 11, 12 sen 13 och det är då hoppar man 3, då hoppar man
10. från 11 till 12 och 13 och då har man plockat 6

Fredrik visar att han har fått syn på *talens del-del-helhetsrelation* och tar fram fingrarna och använder *fingermönster* när han visar en bild av talet 7 som ett stöd i beräkningen. Av beskrivningen framgår att han kan se uppdelningen av talet 13 i 10+3 och utnyttjar tiotalet för att sedan addera 3+3=6.
David använder *fingermönster* i uppgift 13=7+_ och visar talet 7 med fingrarna på samma sätt som Fredrik. Förklaringen av tillvägagångssättet skiljer sig från hur Fredrik resonerar. David håller med vänster hand i tummen och pekfingret på höger hand, sträcker ut de kvarvarande tre fingrarna på högerhanden, svarar ”7”, tar sen fram tummen på högerhanden och svarar ”6”, när han visat sju fingrar och tagit fram tummen på vänster hand, (rad 1-3). David säger att han är medveten om att han inte har 13 fingrar och visar med båda händerna att han använder 10, tar bort 7 och har 3 kvar, (rad 8). Han beskriver att det är 13 som han visar genom att vika ut tre fingrar ”och då har jag 3 kvar men det blev ju 13 så då tar jag fram 3 till”, (rad 8-9). David fortsätter sedan att förklara att han har fyra fingrar kvar som blev över som tas med i den fortsatta beräkningen ” eftersom att om man tar bort dom också så blir det 10 (viker in hela högerhanden och vänsterhanden) så jag tar och lägger till 13”, (rad 10-11). David visar att han adderar 3 till 10 för att komma till13.

Excerpt 14
David uppgift 13=7+_

1. E: (Håller fram båda händerna på bordet. Håller med vänster hand i tummen och
2. pekfingret på höger hand, sträcker ut de kvarvarande tre fingrarna på högerhanden)
3. 7 (tar sen fram tummen på högerhanden) 6
4. F: För att, hur? Visa hur du gjorde!
5. E: (Med två händer på bordet.) Jag gjorde så här, i stället för att använda 3 fingrar
6. (pekar på de tre fingrarna på högerhanden) för att jag har inte 13 fingrar så jag räknar
7. 10 först (lägger båda händerna på bordet) först så tar jag bort 7 (visar hela vänster
8. hand, tummen och pekfinger på höger hand)och då har jag 3 kvar men det blev ju 13

9. så då tar jag fram 3 till till (viker ut tre fingrar till, hela höger hand och tummen på
10. vänster hand)och de där blev över när jag räknade (pekar på fyra fingrar på
11. högerhanden)

Fredrik och David använder *fingermönster* som ett stöd i beräkningarna och visar att de har fått syn på *talens del-del-helhetsrelation* i uppgiften 13=7+_. Av beskrivningarna framgår, att de ser uppdelningen av talet 7 i 3+4 och talet 13 i 10+3 och utnyttjar tiotalet som hållpunkt, genom att hålla talet 10 i huvudet. De använder fingrarna som representationer av tal som ett stöd i beräkningen och behandlar tal som grupperade enheter (composed units).
Fredrik och David använder *fingermönster* i uppgiften 15–9. Fredrik visar att han tittar på fingrarna och rör på dem med små rörelser medan han tänker och svarar ”6”, (rad 1-4). När han får frågan från forskaren hur han vet svaret beskriver han att han först tar bort 5:orna men kommer ihåg att han var på 5 och tog bort ett i taget till han var på 9 ” Jag fick 15 då tar jag bort 5:orna först så kommer jag ihåg att jag var på 5 och då tog jag bort eh,, så tog jag bort så tills jag var på 9”, (rad 6-7). Fredrik visar med fingrarna att han tar bort fyra fingrar på vänster hand, bara tummen är utvikt) ”och då har jag tatt bort den också, det blir 6 kvar”, (rad 9-11). Fredrik förklarar att han tänker bort fem från 15 och fem från 9 och får subtraktionen 10–4=6.

Excerpt 15
Fredrik uppgift 15–9
1. E: …….(Lägger upp båda händerna på bordet, vänder upp handflatorna, tittar på
2. händerna, rör lite med lillfingret på höger hand, på fingrarna på vänster hand, knyter
3. vänster hand, tar bort händerna från bordet och funderar, lägger fingrarna på bordet rör
4. på alla fingrar på båda händerna)….6
5. F: Och hur gjorde du då?
6. E: Jag fick 15 då tar jag bort 5:orna först så kommer jag ihåg att jag var på 5 och då
7. tog jag bort eh,, så tog jag bort så tills jag var på 9 (rör på fingrarna lite snabbt)
8. F: Ska du visa på fingrarna!
9. E: Först tar jag bort 5 då tar jag bort den, den och den (har handflatorna uppåt på båda
10. händerna). Visar på fingrarna att han tar bort fyra fingrar på vänster hand, bara
11. tummen är utvikt) och då har jag tatt bort den också, det blir 6 kvar
12. F: Då blir det 6 kvar, det är det du visar med den tummen där

Fredrik använder *talens del-del-helhetsrelation* när han delar upp talet 15 i 10+5 och 9 i 4+5 med hjälp av fingrarna.
David löser uppgiften 15–9 på ett liknande sätt som Fredrik. David visar hur han viker in alla fingrarna på vänster hand och alla fingrar utom lillfingret på höger hand ”Då har jag 6 kvar”, (rad 1-3). När han får frågan hur han vet svaret visar han genom att lägga upp fingrarna på bordet att lillfingret visar att han hat tagit bort 10 och har 1 kvar. Beskrivningen han ger, visar att han har delat upp 15 i 10+5 när han säger att han sedan har kvar fem som han lägger till

den etta han hade sedan tidigare 1+5=6 ” Jag tar bort 9 och så har jag en kvar från 10:an så jag tar bort 9 och så har jag ju 5 kvar att räkna med” och beskriver det genom att säga ” 1,2,3,4,5 och 6”, (rad 5-8).

Excerpt 16
David uppgift 15–9

1. E: 15 (lägger upp båda händerna på bordet viker in alla fingrar på vänster hand och
2. alla fingrar på höger hand utom lillfingret) Då har jag 6 kvar
3. F: Hur vet du det?
4. E: (Lägger båda händerna på bordet, lyfter lillfingret på högerhanden)
5. E: Jag tar bort 9 och så har jag en kvar från 10:an så jag tar bort 9 och så har jag ju 5
6. kvar att räkna med för jag räknar (Visar ett finger i taget från lillfingret och alla
7. fingrarna på högerhanden) 1,2,3,4,5 och 6 (tar tummen på vänsterhanden) så 5
8. plus1blir 6

Fredrik och David använder talens *del-del-helhetsrelation* med hjälp av *fingermönster* när de med fingrarna delar upp talet 15 i 10+5, 9 i 4+5, 10 i 9+1 och ser 10–4=6. De använder tiotalet som hållpunkt.
Fredrik och David använder *fingermönster* när de löser uppgiften 6+_=14 på liknande sätt genom att de börjar med 6 och vet att det är fyra steg mellan 6 och 10 och sedan fyra steg ytterligare till 14. De använder fingrarna för att se antalet men även räkna antalet steg.
Fredrik använder *fingermönster* i uppgiften 6+_=14 när han viker in fingrarna på vänster hand och viker ut alla fingrarna på höger hand, med hjälp av ett finger på höger hand räknar fingrar på vänster hand och svarar ”8”, (rad 1-3). Han beskriver hur han vet svaret 6, när han räknar upp till 10 ”jag börjar på 6 och sen plussar jag på 1,2,3,4,”, (rad 6). När han visar två händer och säger att alla fingrarna är 10 visar han att han vet att han är på 10 ska till 14 och att det är fyra steg dit ”då räknar jag 1, 2, 3, 4, (viker ut ett finger i taget på högerhanden) och alla här är 14 för det här är 10 (visar båda händerna) så då är det bara 4 till (rör på fyra fingrar på högerhanden) så blir det..”, (rad 7-10).

Excerpt 16
Fredrik uppgift 6+_=14

1. E: (Tar fram båda händerna, viker alla fingrar på vänster hand och viker ut fingrarna
2. på höger hand. Använder lillfingret på höger hand och räknar fingrarna på vänster
3. hand en finger i taget, håller ihop fingrarna mot varandra på båda händerna).. 8
4. F: Hur? Det gjorde du genom att….
5. E: Alltså (visar tummen på vänster hand med de andra fingrarna invikta) jag börjar på
6. 6 och sen plussar jag på 1,2,3,4, och då räknar jag om här (Visar med att vika ut ett
7. finger i taget på vänsterhanden) 1, 2,3,4,5 och så börjar jag om på den här handen

8. (visar på högerhanden) och då räknar jag 1, 2, 3, 4, (viker ut ett finger i taget på
9. högerhanden)och alla här är 14 för det här är 10 (visar båda händerna) så då är det
10. bara 4 till (rör på fyra fingrar på högerhanden) så blir det………..

David räknar uppgift 6+_=14 med hjälp av *fingermönster* och visar att fingrarna representerar talet 8 när han knyter vänster hand och viker ut tre fingrar på höger hand, (rad 1). När han förklarar hur han vet svaret visar han att han utgår från 10–6=4 ”då tar jag bort 6 och så har jag 4 kvar”, (rad 5). David säger att det är fyra till och att han delar upp 14 i ett tiotal och fyra ental ”Jag har 4 från 10:an och 4 från ental”, (rad 6-7). Han menar att han då har två fyror kvar som han adderar för att få svaret 8.

Excerpt 17
David uppgift 6+_=14

1. E: (knyter alla fingrarna på vänster hand och viker ut tre fingrar på höger hand) 8
2. F: Hur vet du det?
3. E: För det jag tog bort 6 (Håller båda händerna på bordet) ungefär samma princip
4. (knyter vänster hand och viker in tummen på höger hand)
5. då tar jag bort 6 och så har jag 4 kvar (pekar på de 4 fingrarna på högerhanden)
6. men då har jag 4 kvar från, eller jag har två fyror kvar för att, vad ska jag säga. Jag
7. har 4 från 10:an och 4 från ental så då tar jag, 4 (visar de fyra fingrarna på höger
8. hand och tummen), 5 (börjar på tummen på och två fingrar till på vänsterhanden) 6,
9. 7 , 8. Det är lite svårt att förklara

Fredrik och David använder *fingermönster* i uppgiften 6+_=14. Det som skiljer är att Fredrik räknar upp från 6 till 10 och David räknar 10-6 . De har fått syn på att det är fyra steg mellan 6 och 10 och sedan fyra steg ytterligare till 14 vilket de visar när de adderar för att komma till 14. De använder fingrarna för att se antalet och räkna antalet steg. Fredrik och David använder *talens del-del-helhetsrelation* när de delar upp 10 i 4+6 och 14 i 10+4, använder tiotalet som hållpunkt och behandlar talen som grupperade enheter (composed units).
De elever, som använder *fingermönster* använder talens *del-del-helhetsrelation* och beskrivningarna tyder på att det att de håller tiotalet, som en enhet samtidigt som de behandlar talen som grupperade enheter (composed units), i motsats till de elever, som använder *dubbelräkning* uppåt och neråt, som behandlar talen som enstaka enheter (singel units) och räknar ett steg i taget på talraden med hjälp av fingrarna för att hitta svaret.

4.3. Skillnader i strategier utan fingrar

Av de 18 intervjuade eleverna var det endast sju elever som gjorde alla beräkningar utan hjälp av fingrar. Strategierna är kategoriserade som: *talfakta, tals del-del-helhetsrelation, dubblor och uppräknade tal.* De olika kategorierna redovisas utifrån respektive uppgift och hur eleverna löst uppgifterna. I uppgiften 13=7+_ använder sex elever *dubblor* och ser att 6+6=12 och 7+7=14 när de löser uppgifterna och fyra elever använder tiotalet som hållpunkt (benchmark) i uppgiften 13=7+_. I uppgift 6+_=14 använder sex elever *dubblor* 6+6 och 7+7 och fem elever använder *tals del-del-helhetsrelation* och tiotalet som en hållpunkt (benchmark) i beräkningen när de delar upp 10 i 6+4 och sedan adderar 4+4 för att komma till 14. En elev beskriver sin uträkning och använder dubblor plus två ”6 plus 6 är 12, 12 plus 2 är 14 och det var 14 så tänkte jag 6 plus 8 är 14”.

I uppgift 32–27 använder sju elever *tals del-del-helhetsrelation* med hjälp av tiotalet i beräkningen. *Uppräkning av tal* används vid fingerräkning när ett finger i taget räknas, men även av en elev som inte använde fingrarna, utan bara muntligt räknade upp ett steg i taget (singel counting), vilket inte är en effektiv strategi enligt Cheng (2012) eftersom eleven behandlar tal som enstaka enheter (singel units) och inte som grupperade enheter (composed units). I uppgift 15–9 använder åtta elever *tals del-del-helhetsrelation* och utnyttjar tiotalet som hållpunkt och en elev använder *uppräkning av tal* utan fingrar. I uppgift 82–7 användet tio elever *tals del-del-helhetsrelation* genom att dela upp 7 i 2+5 för att underlätta uträkningen. Fyra av eleverna räknar med negativa tal utan att säga det och ser att det fattas 5 när de räknar 2–7 och visar det genom att subtrahera 5 från 80 för att komma till 75. En beräkning som även beskrivs av Marton och Neuman (1989) när ett tiotal används som hjälp genom att först ta 2 från 7 och samtidigt se att 80–5=75.

En elev använder *uppräkning av tal* och räknar ner ett steg i taget och behandlar talen som enstaka enheter (singel units). Två elever försöker lösa uppgiften med *algoritm* men löser även uppgiften med huvudräkning.

Elina använder dubblor i uppgiften 13=7+ _. Hon beskriver att 7+7=14 och funderar sedan vidare på vad 6+6 är eftersom 7–1=6 och 14–1=13, (rad 3-4). Med hjälp av det resonemanget ser Elina den saknade delen 6 och kan lösa uppgiften även om hon säger att hon är osäker.

Excerpt 18

Elina uppgift 13=7+_

1. E: Han har hittat 6 snäckor
2. F: Hur vet du det?
3. E: 7 plus 7 är 14 minus 1 är 6 och 6 och … vänta lite jag vet inte … 7 plus 7 är 14 och
4. så tar man 7 minus 1 är 6 och 14 minus 1 är 13

Ytterligare fem elever löser uppgiften på liknande sätt som Elina genom att utnyttja kunskaper om dubblorna 6+6 och 7+7. Fyra elever använde *talens del-del-helhetsrelation* och tiotalet som en hållpunkt (benchmark) i beräkningen av uppgift 13=7+_ och behandlar talen som grupperade enheter (composed units).

Gustav säger att han först tror att det är en addition av talen 13 och 7 ”Jaha! 20 … sammalagt är det 20 i alla fall”. Efter att fått uppgiften läst en gång till svarar Gustav att det är 3 men är osäker ” Jaha! Hm. 3 .. tror jag”. Gustav funderar vidare och ser att 7+3=10 och utnyttjar det för att sedan addera 3 för att komma till 13. ”Vänta, nej…6…. För 7 plus 3 är 10 och sen plussa 3 så han hitta 6 och jag hitta 7”. Av beskrivningen framgår att Gustav räknar 7+3=10 och sedan 10+3=13 för att lösa uppgiften. Genom att utnyttja hur 10 kan delas upp och att 10 kan användas som hållpunkt kunde Gustav lösa uppgiften även om han började med att missuppfatta subtraktionen som en addition där två tal skulle adderas.

Jason räknar uppgiften 13=7+_ på ett annat sätt. Hans beskrivning tyder på att han gissar att svaret är 6 och provar om det stämmer genom att visa hur han adderar 7+5 genom att dela upp 7 i 2+5 och 6 i 1+5 ”Eh… för att 2 plus 5 det blir 7 och då så tar jag 5:an och plussar den ihop med, eller med 6:an”. Han fortsätter sin förklaring där han adderar de två 5:orna för att få tio och sedan 2+1=3 ”1 plus 5 det blir 6 och så tar jag dom två 5:orna och plussar ihop dom och då blir det 10 och sen är det 2 från 7:an och en från 6:an och så plussar jag ihop det”. Jason använder *talens del-del-helhetsrelation,* när han delar upp 7 i 2+5 och 6 i 1+5 och visar att han har kunskap om att 7+6=13 men är osäker och provar om det stämmer vilket ger en uträkning i flera steg.

I uppgift 6+_=14 använder sex elever *dubblorna* 6+6 och 7+7 på liknande sätt som i uppgift 13=7+_. Elina förklarar hur hon löser uppgiften ” 6 plus 6 är 12 12 plus 2 är 14 och det var 14 så tänkte jag 6 plus 8 är 14” och behandlar talen som grupperade enheter (composed units). Fem elever använder kunskaper om tiotalet för att göra beräkningen. Det som skiljer är att Jason använder negativa tal i sin beräkning när han räknar 4–6=2 för att sedan subtrahera 2 från 10, 10-2=8 och får fram rätt svar. Han visar att han är medveten om att det egentligen är – 2 ” Jag räknade 4 minus 6 och då är det 2 kvar och då så tog jag 10 minus 2”.

Bertil räknar uppgiften 6+_=14 med hjälp av tidigare kunskaper genom att först säga att han gissar att svaret är 8 ” det här är en gissning men jag tror det är ..måste hämta 8 då”. Han ger sin förklaring till svaret när han delar upp 6 i 2+4 för att addera 2+8=10 ” Men för att 6 då tar man bort 6, 2 från 6 och lägger till 8 och då blir det 10 och sen plus 4 sen har man kvar utav 6”, (rad 1-2). Av beskrivningen framgår att han använder 4 som är kvar och tänker att det är fyra steg kvar till 14, men avslutar med att han vet att 6+8=14 ”För att jag vet att 6 plus 8 är 14”, (rad 17).

Excerpt 19

Bertil uppgift 6+_=14

1. E: Men för att 6 då tar man bort 6, 2 från 6 och lägger till 8 och då blir det 10 och sen
2. plus 4 sen har man kvar utav 6
3. F: Så du tänker att du räknar uppåt på något sätt då?
4. E: Hmm
5. F: Eller hur tänker du?
6. E: Jag tänker att man tar och räknar från det lägsta talet och så plockar man nåra från
7. det och lägger till det
8. F: Och det lägsta talet är?

9. E: 6
10. F: och så lägger du till vad?
11. E: 2 till 8:an
12. F: Du lägger till 2 så att det blir 8? Eller du säger 2 till 8
13. E: Nej jag tar 2 från 6 och lägger till till 8:an
14. F: 8:an var får du 8:an ifrån då?
15. E: Från hur många glas man måste hämta
16. F: Hur vet du att det är 8 glas då?
17. E: För att jag vet att 6 plus 8 är 14
18. F: Så du kommer ihåg det?
19. E: Mm (Nickar)

Bertil använder *talens del-del-helhetsrelation* men är inte säker på svaret och gör då en ny beräkning för att ta reda på om 8 är rätt svar och säger till slut att han vet att 6+8=14. Bertil och Jason använder sina kunskaper om tal på olika sätt. Jason kommer fram till svaret med färre led än Bertil genom att Jason använder *talens del-del-helhetsrelation* när han delar upp 10 i 2+8 och behandlar talen som grupperade enheter (composed units).
I uppgift 32–27 använder en elev *talfakta* medan tre elever Olle, Lotta och Gustav har svårigheter med växlingen över tiotalet. Gustav vet inte hur han ska lösa uppgiften ”Jag har i alla fall en tia mer än den andre. Han har 20, han har två tior och jag har tre tior.. Ja mera ental? ..Nja….jag fattar inte”. Gustav visar att han är osäker på hur han ska göra med entalen och ger upp när han inte kan lösa uppgiften.
Olle ser tiotalen och entalen för sig och räknar 30–20=10, vänder sedan på entalen och räknar 2–7=5 ”Eh..20–30; 10 eh.. 2–7 ; 5, 15”, (rad 1). Han blir osäker på om svaret är rätt och säger att ”det blir 0”, (rad 3). Olle ser inte att 2–7 är ett negativt tal –5. Han adderar 10+5=15 utan att inse att det behövs en växling över tiotalet och upptäcker inte att 15 är fel svar.

Excerpt 20
Olle uppgift 32–27
1. E: Eh..20 – 30; 10 eh.. 2–7 ; 5, 15
2. F: Så har du 15 fler?
3. E: Jag vet inte. (Tittar på talen igen på bladet) nej, det blir 0. Det är svårt.
4. F: Du berättade hur du tänkte. Du berättade att du tog 30-20 eller hur?
5. E: ja
6. F: och så fick du det till 10 och sen så tog du 2–5 eller 2–7 blir 5, tänkte du?
7. Stämmer det då?
8. E: Ja, jag trodde när du sa ”Blir det 15” Då trodde jag att jag hade gjort fel.
9. F: Jag vill bara veta hur du tänker, jag kommer inte berätta om det är rätt eller fel utan
10. jag vill höra hur du resonerar. Är du nöjd med 15?
11. E: Ja

Lotta har liknande problem med växling över tiotalet som Gustav och Olle, när hon ska lösa uppgift 32–27. Först gissar hon ett svar som inte är korrekt ”13”, (rad 1). Hon visar sin osäkerhet när hon räknar med tiotalen och entalen ”Där är det 20 det är mindre än 30 och sen har jag 2 och 7 vet jag inte riktigt. Jag vet inte om det är rätt”, (rad 3-4). När hon får se talen nedskrivna resonerar hon på samma sätt och ser inte hur hon ska lösa uppgiften ”Där är det 10 mer den är högre än den (Visar på 3 tiotal och 2 tiotal) så då har jag 10 mer sen fattar jag inte dom två (Visar på entalen 2 och 7) hur jag gör med dom”, (rad 7-8). Lotta ser att tre tiotal är mer än två tiotal men hon vet inte hur hon ska göra med entalen när det står 2 och 7, vilket tyder på att hon är osäker på växlingen över tiotalet.

Excerpt 21
Lotta uppgift 32–27

1. E: (Tänker tyst…) viskar 13 ja 13
2. F: 13, hur tänker du då?
3. E: Där är det 20 det är mindre än 30 och sen har jag 2 och 7 vet jag inte riktigt. Jag vet
4. inte om det är rätt
5. F: Så om jag skriver 32 här och 27 där (Skriver på ett papper) så kan du peka hur du
6. menar
7. E: Där är det 10 mer den är högre än den (Visar på 3 tiotal och 2 tiotal) så då har jag
8. 10 mer sen fattar jag inte dom två (Visar på entalen 2 och 7) hur jag gör med dom
9. F: Hur ska du göra med dom om du har 2 på den ena och 7 på den andra?
10. E: …..(rycker på axlarna)
11. F: Du vet inte? Du vet inte hur du ska tänka? Skillnaden mellan 32 och 27?

Olle, Lotta och Gustav från excerpten ovan visar osäkerhet om hur de ska gå till väga när de ska lösa uppgifter med växling över tiotal. De ser att tiotalen går att subtrahera 30–20=10 men när de ska subtrahera entalen får de problem. Gustav och Lotta inser att de inte vet hur de ska lösa 2–7 medan Olle är nöjd med sitt svar och menar att 2–7=5. Olle ser inte att 5 är ett negativt tal som ska subtraheras från tiotalet utan gör en addition 10+5 och får ett felaktigt svar. Fuson (1997) menar att missuppfattningen kan bero på att elever generalserar additions- och subtraktionsberäkningar. Olle, Lotta och Gustav har svårigheter med växling och använder inte *talens del-del-helhetsrelation.*

I uppgiften 15–9 använder åtta elever tiotalet i sina beräkningar. Tre elever använder 15–10 och vet att de tagit bort ett för mycket och adderar 5+1=6. Bertil beskriver hur han räknar ”Det blir för att om man har 10 minus 15 då blir det 5 så tar man bort tian då blir det ju 5 men nu tog vi bort 9 bara alltså blir det 6 kvar”. Han vänder på talen 10–15 men visar att han är medveten om att det är 15–10 eftersom han adderar 5+1=6. Elina använder *talfakta*, hon vet att 15–9=6 och säger ”6 plus 9 blir 15”. Robert löser uppgiften 15–9 med hjälp av multiplikation och bråk. Han visar fem treor som: 3+3+3+3+3=15, (rad 1). Robert beskriver att han ser de fem treorna som delar av talet 15 i multiplikationstabellen och kombinerar det med bråk (3+3+3)+(3+3) när han säger ”två tredje delar och då blir det 6 sammanlagt”, (rad 2-3).

Excerpt 22
Robert uppgift 15–9

1. E: Ja, ja först tänkte jag 3:ans tabell är ju fem 3:or som är 15.
2. Och så tänkte jag att om jag äter upp 9 så är det ju 3 såna delar av 15 som blir uppätna
3. och så att det blir ja, 5 så blir det ja två tredjedelar och då blir det 6 sammanlagt

Robert använder *talens del-del-helhetsrelation* när han löser uppgiften med hjälp av treans multiplikationstabell, ser talens delar och behandlar talen som grupperade enheter (composed units).
I uppgift 82–7 använder tio elever *talens del-del-helhetsrelation* på olika sätt. Jason ser att 7 kan delas upp i 2+5 för att underlätta lösningen ”tänker att om man tar 2 från 5:an eller menar…att ..räknar 7 minus 2 då blir det ju 5 minus och då blir det så 80 minus 5”. Olle använder negativa tal i sin beräkning, ser att 82–2=80 och att det sedan är fem till att ta bort. ”Eh.. 2- ehh 82 , 80 och 5–80. Det blir 75”.
Bertil delar upp talen på ett annat sätt än Jason och Olle genom när han utgår från talet 6 när han delar upp 7 i 1+6 och 82 i 80+2 ”Då tar man om man skulle haft 6 så tar man så tar man… tar man bort 2 från 6:an då har man 80 kvar”. Bertil börjar med 6–2=4 för att fortsätta med 80–4=76 men håller 1 i huvudet som ännu inte tagits bort ”sen så minus 4 då har man ju 70 ..76 minus 1 det blir 75”. Bertil håller reda på de olika delarna av talen i sin beräkning när han delar upp 7 i 1+6 i stället för i 2+5 som Olle och Jason gör i sina beräkningar. Bertils beräkning innehåller fler led än Olles och Jasons eftersom han landar på 76 men Olle visar att han vet att det är ett steg kvar till 75. Olle, Jason och Bertil använder *talens del-del-helhetsrelation*, behandlar talen som grupperade enheter(composed units) och visar att de behärskar växling över tiotalet.
Hanna och Anna använder *algoritm* för att lösa uppgift 82–7. Anna klarar algoritmen och löser uppgiften medan Hanna inser att hon är osäker på växlingen ”eh..mmm (växlar från 8) … 12–7 …..det är.. nej, nej! Jag gör inte så”, (rad 3-4). Hon går tillbaka till huvudräkning och visar att hon vänder på entalen och räknar 7–2 men visar att hon är medveten om att fem är ett negativt tal utan att säga det och subtraherar 80–5=75 ”7–2 är 5 och 5 minus ...80 är 75”, (rad 5).

Excerpt 23

Hanna uppgift 82–7

1. E: eh,…hm…det är. Får man ställa upp det?
2. F: Räkna som du vill, när du räknar ut det
3. E: (Tar papper och penna och gör en algoritm) ..eh..mmm (växlar från 8) … 12–7
4. …..det är.. nej, nej!Jag gör inte så (går tillbaka till post-it lappen och tittar på den) 7–2
5. är 5 och 5 minus ...80 är 75
6. F: Så svaret är..?
7. E: 75

Anna visar att hon vet hur man går tillväga vid växlingen över tiotalet när hon utför beräkningen av uppgift 82–7 med hjälp av algoritm. Hon förklarar proceduren och kommer fram till ett korrekt svar. Anna räknar uppgiften ytterligare en gång och använder *talens del-del-helhetsrelation* när hon delar upp 7 i 2+5 och utför beräkningen på samma sätt som Jason 82–2=80 och sedan 80–5=75. Hanna inser att beräkning med hjälp av en algoritm inte är till hjälp eftersom hon behöver göra en växling och hon visar att hon är osäker på hur algoritmen fungerar. Hanna löser uppgiften på samma sätt som Olle och använder *talens del-del-helhetsrelation*, behandlar tal som grupperade enheter (composed units), när hon räknar 2–7 och vet att det är – 5 som ska subtraheras, 80–5=75.

4.4 Att behandla tal som enstaka enheter eller som grupperade enheter

Beräkningsstrategierna innebär att talen i subtraktion i huvudsak behandlas av eleverna på två olika sätt, som enstaka enheter[5] (singel units) eller som grupperade enheter (composed units). I strategierna behandlar eleverna tal i subtraktion som enstaka enheter när de använder *dubbelräkning uppåt, dubbelräkning neråt, fingermönster* och i *uppräkning av tal* (se tabell 4).

Tabell 4. Elevernas behandling av tal i de olika beräkningskategorierna

Strategier	**Enstaka enheter (singel units)**	**Grupperade enheter (composed units)**
Fingerräkning		
Dubbelräkning uppåt	x	
Dubbelräkning neråt	x	
Fingermönster (del-del- helhets relation)		x
Övriga strategier (utan fingrar)		
Uppräkning av tal	x	
Dubblor[6]		x
Del-del-helhet		x
Talfakta (”vet”)		(x)

Av tabell 4 framgår att eleverna behandlar tal som enstaka enheter (singel units) när de använder fingrarna i strategierna *dubbelräkning uppåt* och *dubbelräkning neråt.* När fingrar används som *fingermönster* behandlar eleverna talen som grupperade enheter (composed units). I strategierna *dubblor, del-del-helhet* och *talfakta* behandlar eleverna talen som grupperade enheter (composed units). I strategin *uppräknade tal* där fingrar inte används, behandlar eleverna tal som enstaka enheter (singel units).

Sammanfattning av resultatet.

Studien visar att flertal av eleverna har problem med beräkningar i subtraktion och använder mindre effektiva strategier. Fingrar används i beräkningarna av mer än hälften av eleverna där *dubbelräkning uppåt* och *dubbelräkning neråt* är de vanligaste strategierna (60%). Resultatet visar även att eleverna har problem med växling över tiotalet.

[5] Enstegsräkning
[6] Kan vara något som eleverna lärt sig utantill

De beräkningsstrategier eleverna använder har kategoriserats som: *dubbelräkning uppåt* och *dubbelräkning neråt, fingermönster, uppräkning av tal, dubblor, del-del-helhet och talfakta.* Utgångspunkten utifrån variationsteorin är att eleverna agerar utifrån hur de erfar tal. Resultatet visar att 77 % av eleverna använder enstegsräkning och behandlar tal som enstaka enheter (singel units) i strategierna *dubbelräkning uppåt*, *dubbelräkning neråt*, *uppräkning av tal* och som grupperade enheter (composed units) i strategierna *fingermönster, dubblor, del-del-helhet och talfakta.*

5. Diskussion

Syftet med studien är att identifiera elevers olika beräkningsstrategier i subtraktion genom att i detalj analysera de sätt eleverna använder för att lösa aritmetikuppgifter. För att undersöka detta har arton elever i årskurs tre intervjuats. I studien besvaras följande forskningsfrågor:

- Vilka beräkningsstrategier för subtraktion använder elever i årskurs 3?
- Vad medför elevernas beräkningsstrategier för hur de behandlar tal?

Vilka beräkningsstrategier använder eleverna?

Av de arton intervjuade eleverna i studien använder elva elever *dubbelräkning uppåt* och *dubbelräkning neråt* med hjälp av fingrarna i en eller flera uppgifter. Fyra av de arton intervjuade eleverna använder fingrarna i beräkningarna av alla uppgifterna. Resultatet i studien tyder på att eleverna inte har utvecklat automatiserade kunskaper i subtraktion inom talområdet 1-20. Elevernas strategier har i studien kategoriserats som ”strategier med fingrar” (*dubbelräkning uppåt, dubbelräkning neråt, fingermönster)* och ”övriga strategier, utan fingrar”, (*talfakta, tals del-del-helhetsrelation, dubblor och uppräknade tal).*

Dubbelräkning uppåt och *dubbelräkning neråt* använder mer än hälften (60 %) av de intervjuade eleverna i sina beräkningar. Ett intressant resultat i studien är att fjorton av de intervjuade eleverna, (77 %) behandlar tal som enstaka enheter (singel units) när de dubbelräknar med hjälp av ett finger i taget eller använder strategin *uppräknade tal*, något som gör beräkningarna onödigt komplicerade. Elever, som dubbelräknar och räknar uppåt eller neråt på talraden med hjälp av ett finger i taget för att hålla reda på antalet steg, behandlar talen som enstaka enheter på en talrad i stället för grupperade enheter. Svenson och Sjöberg (1982) menar att det inte är en framkomlig väg ”Certainly, one step counting down on one’s fingers is not the ultimate goal of the teaching of how to solve simpel subtractions” (s.98). Eleverna i studien visar att de har särskilt stora svårigheter i subtraktion när de använder *dubbelräkning neråt* med hjälp av sina fingrar, något som även identifierats i tidigare studier (Neuman, 1987; Gray & Tall, 1994). Vid dubbelräkning håller eleverna två talrader samtidigt i huvudet, de säger var de är på talraden samtidigt som de räknar antalet steg, vilket kan ge eleverna problem i högre talområden (Neuman, 1987; Gray & Tall, 1994). Elever i studien, som räknar dubbelräkning i alla uppgifter har troligen inte urskilt *tals del-del-helhetsrelation*. Att urskilja *tals del-del-helhetsrelation* är en kritisk aspekt för dessa elever och en dimension av variation (DoV) som behöver öppnas upp. En del av eleverna använder olika strategier i uppgifterna (fingrar i några uppgifter medan andra uppgifter räknas utan fingrar). Här är det mer oklart om eleverna har urskilt *tals del-del- helhetsrelation*. *Dubbelräkning uppåt* och *dubbelräkning neråt* med hjälp av ett finger i taget är en strategi som ger eleverna problem eftersom antalet fingrar inte räcker till när talen överstiger tio och inte fungerar i ett högre talområde. En elev som använde denna strategi är osäker på om det var talet eleven landade på i beräkningen eller om det var de kvarvarande fingrarna som var svaret, en svårighet som även Neuman (2013, s.11) beskrivit.

Fingermönster använder tre av eleverna och visar att fingrarna är ett stöd för att uppfatta antal. Eleverna löser uppgifterna samtidigt som fingrarna visar en bild av talet utan att räkna antalet fingrar (subitizing) och erfar *tals del-del-helhetsrelation*. Även elever, som dubbelräknar använder fingrarna för att avläsa svaret i beräkningen och tittar inte på fingrarna utan visar att de uppfattar antalet bara genom att röra fingrarna.

Resultatet i studien visar att även de elever som inte använder fingrarna saknar effektiva strategier och är osäkra när de ska lösa uppgifterna. Växlingen över tiotalet vållar problem för några av eleverna i studien. De eleverna löser inte uppgifterna korrekt, gissar, får fel svar eller ger upp. En svårighet är när eleverna subtraherar både tiotal och ental från det största talet, vilket ger ett felaktigt svar i likhet med Fusons (2003) beskrivning av hur elever i USA gör.

Endast en elev använder *talfakta* i två uppgifter (32-27 och 15-9). Att endast en av de arton intervjuade eleverna använder *talfakta* och direkt ”vet” svaret på uppgifterna är förvånande i årskurs tre. Strategin med *dubblor* använder eleverna i studien som en hjälp att lösa uppgifterna. *Dubblor* är dock inte en generell metod och tiotalet blir inte synligt i beräkningen (Murata och Fuson, 2006).

Tals del-del-helhetsrelation använder eleverna när de delar upp tal och ser talens delar vilket förekommer i alla uppgifter och även bland de elever som använder *fingermönster*. Denna strategi menar Fuson (1997), Murata och Fuson, (2006), Cheng (2012) och Neuman (2013) är effektiv. Vanligast är uppdelningen av talet 7=2+5 i uppgift 82–7=75. Elever, som inte använder fingrar i sina beräkningar utnyttjar, tiotalet som hållpunkt och ”ser” till exempel 7+3=10, 6+4=10 som en hjälp att lösa uppgifterna. Elever i studien som använder dubbelräkning använder inte tiotalet som hållpunkt utan räknar uppåt ett steg i taget till exempel i uppgifterna 13=7+_ och 6+_=14. Att alltid räkna enstegsräkning ett steg i taget uppåt från den ena delen för att komma till helheten i subtraktionsuppgifter, kan enligt Neuman (2013) vara ett problem, eftersom det är antalet räkneord på talraden som räknas i stället för att se subtraktionen. Gray och Tall (1994) beskriver det som att eleverna inte ser de ingående delarna som en helhet utan som en process och kan då få problem i sina beräkningar.

Uppräknade tal (singel counting) använder elever även utan hjälp av fingrar och innebär att eleven säger alla räkneord ett i taget när de räknar uppåt eller nedåt på talraden, för att hålla reda på antalet steg, vilket är en komplicerad strategi att hålla i huvudet (Neuman, 2013). Eleverna ser talen som enstaka enheter (singel units) som räknas ett i taget vilket enligt Cheng (2012) är omöjligt i ett högre talområde.

Resultatet visar att ett flertal av eleverna i den studerade gruppen inte använder de mest effektiva strategierna något som även identifierats i tidigare forskning av bland annat Svenson och Sjöberg (1982). Svenson och Sjöberg (1982) menar att det är anmärkningsvärt att elever under vårterminen i årskurs tre har så stora problem med beräkningar i subtraktion.

Vad medför elevernas beräkningsstrategier för hur de behandlar tal?

På vilka olika sätt visar beräkningsstrategierna hur elever erfar och behandlar tal i subtraktion? De strategier eleverna i studien använder speglar hur de behandlar tal, (se tabell 4). Resultatet i studien visar att eleverna behandlar tal som enstaka enheter (singel units) eller som grupperade enheter (composed units) i de olika beräkningskategorierna. Eleverna behandlar tal som enstaka enheter (singel units) i strategierna *dubbelräkning uppåt*, *dubbelräkning neråt* och vid *uppräkning av tal* utan fingrar. Eleverna urskiljer grupperade enheter (composed units) när de använder *fingermönster*, *dubblor*, *talens del-del-helhetsrelation* och *talfakta.* Att använda grupperade enheter (composed units) är en mer kraftfull strategi (Svenson & Sjöberg, 1982; Neuman, 1987; Murata & Fuson, 2006; Cheng, 2012).

De elever, som behandlar tal som enheter (single unit) och räknar ett tal i taget, i stället för att se grupper av tal som kan delas upp (decompose) och sättas ihop (compose) riskerar att fastna och inte komma vidare och utveckla mer avancerad matematisk kunskap (Cheng, 2012). De elever som använder *tals del-del-helhetsrelation* har större möjlighet att utveckla effektiva strategier jämfört med de elever som dubbelräknar. Elever, som använder *dubbelräkning uppåt* och *neråt* genom att hålla två talrader samtidigt i huvudet, utför komplicerade uträkningar som belastar arbetsminnet, något som gör aritmetiska beräkningar onödigt svåra och kan resultera i att elever ger upp. Yngre barns beräkningar med hjälp av *fingermönster*, kan vara en hjälp för fortsatta aritmetiska beräkningar medan *dubbelräkning uppåt* och *neråt* med hjälp av ett finger i taget kan ha motsatt effekt. Neuman (2013) menar att ”Dubbelräkning använd som huvudmetod i addition och subtraktion blockerar nämligen möjligheterna att utveckla huvud- och överslagsräkning och således alla förutsättningar för vidare utveckling av aritmetiskt tänkande” (s.13).

Konklusioner och kunskapsbidrag

Resultatet i studien visar att de intervjuade eleverna i årskurs tre har problem med beräkningar i subtraktion vilket kan påverka lärandet i högre årskurser. Resultatet i studien tyder på att eleverna inte har utvecklat effektiva strategier för att kunna hantera subtraktion inom talområdet 1-20 och riskerar därför att få problem med aritmetiska beräkningar i fortsättningen (Gray & Tall, 1994; Neuman, 1987, 1989, 2013; McIntosh, Reys & Reys, 1992).

Resultatet i studien bekräftar tidigare studier (Fuson *et al.*, 1994; Svenson & Sjöberg, 1982; Neuman 1987; 1989; 2013: Gray & Tall, 1994) som visat att elever i årskurs tre har problem med beräkningar i subtraktion. Tidigare forskning (Fuson *et al.*, 1994; Svenson & Sjöberg, 1982; Neuman 1987; 1989; 2013) har beskrivit elevers svårigheter i beräkningar av aritmetiska uppgifter i addition och subtraktion och då särskilt i uppgifter med en tiotalsövergång. ”The count on/down/up of ones also frequently goes over a decade word, which can be especially difficult for subtraction.” (Fuson *et al.*, 1997, s.152). Eftersom elevernas kunskaper i talområdet 1-20 är en grund för fortsatta möjligheter till utveckling av aritmetiskt tänkande är det viktigt att lärare har kunskaper om vilka strategier eleverna använder för att anpassa undervisningen och underlätta lärande samt förebygga missförstånd. Neuman (1986) menar att elever ända upp på gymnasienivå använder samma ineffektiva strategier de tillägnat sig under de första skolåren.

Föreliggande studies kunskapsbidrag är en kategorisering och synliggörande av elevers beräkningsstrategier som identifierats i subtraktion. Studien bidrar med att beskriva inte bara *att* eleverna använder fingrarna i sina beräkningar utan de detaljerade beskrivningarna visar *hur* eleverna använder fingrarna i sina beräkningar och ger ny kunskap om fingerräkning. Studien bidrar också med att visa hur eleverna behandlar tal i sina beräkningar som enskilda enheter eller grupperade enheter (singel units och composed units). Denna studie skiljer sig från tidigare forskning inom området (Svensson & Sjöberg, 1982), beskrivit *att* eleverna använder ett finger i taget i sina beräkningar, genom att i detalj beskriva *hur* eleverna använder fingrarna i de olika beräkningsstrategierna på liknande sätt som FASETT är det ett bidrag i diskussionen om fingerräkning; ”This study thus contributes to the ongoing discussion on finger use and shows that it is not a matter of whether fingers should be used or not, but *how* fingers can be used to support and facilitate learning to solve arithmetic tasks”. (Björklund, Kullberg Runesson Kempe, accepted).

Studien bygger vidare på kunskaper om elevers beräkningsstrategier i subtraktion där fingrar både kan vara en hjälp och ett hinder för elevers fortsatt utveckling av effektiva beräkningsstrategier.

5.1 Metoddiskussion

För att kunna besvara forskningsfrågorna har videoinspelade semistrukturerade intervjuer använts. Enbart ljudinspelning hade inte gett möjlighet att studera hur eleverna använde fingrarna i beräkningarna. I de semistrukturerade intervjuerna kunde elevernas beskrivningar av lösningar förtydligas med ytterligare frågor vid behov, till skillnad mot strukturerade intervjuer efter ett strikt frågeformulär, vilket inte hade gett tillräcklig information i föreliggande studie. variationsteorin (Marton, 2015; Marton, & Tsui, 2004) en teori om lärande, har varit ett redskap i analysen av elevernas beräkningsstrategier. Det som var problematiskt i analysarbete var kategoriseringen av de olika elevsvaren. Alla de intervjuade eleverna löste uppgifterna på olika sätt och vid några tillfällen var förklaringarna som eleverna gav otydliga vilket medförde svårigheter med kategoriseringen. Det kan innebära att en annan forskare skulle kunna tolka svaren på ett annat sätt och få ett något annat resultat än vad som beskrivits i denna studie.

Diagnosen som gjordes i inledningen av studien gav möjlighet för forskaren att få en överblick över elevernas kunskaper i addition och subtraktion i de båda klasserna, och en möjlighet att göra ett urval av elever för intervju. Elever, som valdes ut för intervju, hade ett flertal fel och eller tog lång tid på sig för att lösa uppgifterna i diagnosen. Det blev en avvägning av antalet fel och lång tid, där elever som tog lång tid på sig var överrepresenterade bland de som valdes ut för intervju. Efter diagnosen valdes tio elever från de båda klasserna ut för intervjua men efter bortfall av två elever i den ena klassen, intervjuades arton elever. Det hade varit lovvärt att intervjua alla 43 eleverna i de båda klasserna men materialet hade då blivit alltför omfattande och tidskrävande för denna studie.

Eleverna svarade på frågorna så gott de kunde och visade engagemang i arbetet med att lösa uppgifterna. Att intervjuerna spelades in kan ha påverkat eleverna och deras svar (Bryman, 2004, 2011). Vi kan inte säkerställa att de förklaringar eleverna gav till sina lösningar var exakt det sätt de löste uppgifterna på. De förklaringar eleverna gav kan vara ett sätt att tillfredsställa forskaren, som ställde frågorna och min långa erfarenhet som lärare kan ha speglat det sätt som frågorna ställdes och hur svaren tolkades. Det begränsade antalet elever i studien och de särskilda urvalet av elever, gör att resultatet inte går att generalisera till elever i årskurs tre på andra skolor i Sverige, men resultatet indikerar att elever i den studerade gruppen använder mindre avancerade strategier i beräkningar av uppgifter i subtraktion.

5.2 Didaktiska implikationer och fortsatt forskning

Föreliggande studie är ett bidrag till lärares praktik genom att komplexiteten i elevers strategier i subtraktion synliggjorts. Hur kan utveckling av elevers strategier främjas?

Undervisning redan i förskolan och förskoleklassen, som syftar till att ge eleverna möjlighet upptäcka tal, hur talen är relaterade till varandra och hur olika räknesätt hör ihop, kan troligen hindra att elever får svårigheter med aritmetiska beräkningar längre fram när talområdet utvidgas (McIntosh, Reys & Reys, 1992; Carpenter & Moser, 1984; Gray & Tall, 1994; Neuman, 1987, 1989, 2013). Elever behöver tidigt få möjlighet att se sambandet mellan addition och subtraktion genom att båda räknesätten introduceras samtidigt (Fuson, *et al.*, 1997). Eftersom forskningen (Fuson, 2003) visat att automatiserad kunskap, som enbart bygger på minneskunskap, inte hjälper eleverna med utveckling av taluppfattningen, är det viktigt att eleverna får arbeta med undersökande verksamhet för att upptäcka flexibla strategier inom det lägre talområdet 1-20 och sedan i ett utvidgat talområde. Arbetet med att få syn på tal och talens delar är ett arbete som bör starta redan i förskolan och sedan fortsätta genom hela grundskolan för att förhindra att elever fastnar i enstegs uppräkning av enskilda enheter eller dubbelräkning. Forskare (Fuson, 1997; Murata & Fuson, 2006; Cheng, 2012; Neuman, 2013) menar att elever behöver få syn på tal som grupper av enheter som går att dela upp och sättas ihop i stället för att se tal som enstaka enheter. Fuson (1997) menar att elever tidigt behöver hjälp med att dela upp tal för att förebygga missuppfattningar.

Vid ett besök på en skola i New York noterades en affisch om subtraktionsstrategier i ett klassrum med elever i årskurs ett, (se bild 5). En av de föreslagna strategierna i subtraktion uppmanar till *dubbelräkning neråt* med hjälp av fingrarna. Är dubbelräkning är en utlärd strategi av lärare, eller en strategi eleverna använder själva? Ingen av nybörjareleverna i

Neumans studie (1987, 2013) använde *dubbelräkning neråt*. Är det den tidiga aritmetikundervisningen, som påverkar eleverna att utveckla icke hållbara räknestrategier?
Ytterligare forskning behövs för att för att ta reda på hur vanlig dubbelräkning med hjälp av fingrarna är i årskurserna 1-9. Det vore intressant att ta studera *hur* eleverna lär sig använda dubbelräkning med fingrarna och om det är en del av undervisningen i de lägre åldrarna. Går det med att tidig undervisning i förskolan förhindra dubbelräkning med hjälp av fingrar, är också en fråga för vidare forskning.

Referenslista

Aunio, P., & Niemivirta, M. (2010). Predicting children's mathematical performance in grade one by early numeracy. *Learning and Individual Differences*, *20*(5), 427-435.

Baroody, A. J. (1999). Children's relational knowledge of addition and subtraction. *Cognition and Instruction*, *17*(2), 137-175.

Baroody, A. J., Brach, C., & Tai, Y. C. (2006). The application and development of an addition goal sketch. *Cognition and Instruction*, *24*(1), 123-170.

Bermejo, V., Morales, S., & Garcia deOsuna, J. (2004). Supporting children's development of cardinality understanding. *Learning and Instruction*, *14*(4), 381-398.

Berteletti, I., & Booth J.R, (2015). Perceiving fingers in single-digit arithmetic problems. Front. Psychol.6:226.doi: 10.3389/fpsyg.20015.00226

Björklund C., Kullberg A., & Runesson Kempe U., (Accepted) Structuring versus counting – critical ways of using fingers in subtraction. *ZDM Mathematics Education. DOI: 10.1007/s11858-018-0962-0*

Boaler, J., & Chen, L. (2017). Why Kids Should Use Their Fingers in Math Class. *The Best Writing on Mathematics 2017*, 76.

Bryman, A. (2004). Social Research Methods. Oxford. Oxford University press.

Bryman, A. (2011). *Samhällsvetenskapliga metoder*. (Uppl. 2:7). Malmö: Liber.

Carpenter, T. P., & Moser, J. M. (1984). The acquisition of addition and subtraction concepts in grades one through three. *Journal for Research in Mathematics Education*, 179-202.

Cheng, Z. J. (2012). Teaching young children decomposition strategies to solve addition problems: An experimental study. *The Journal of Mathematical Behavior*, *31*(1), 29-47.

Clements, D. H. (1999). Subitizing: What is it? Why teach it? *Teaching children mathematics*, *5*(7), 400-405.

Clements, D.H., & Samara, J. (2007). Early childhood mathematics learning. In Lester, F. K. (Ed.). *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*. (pp.461-555). New York: Information Age.

Clements, D. H., & Sarama, J. (2014). *Learning and teaching early math: The learning trajectories approach*. New York. Routledge.

Clements, D.H., & Samara, J., in Grouws, D. A. (Ed.). (1992). *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. New York: Macmillan.

Cohen, L., & Manion, L., (1994). *Research methods in education*. New York: Routledge.

Ekdahl, A. L., Venkat, H., & Runesson, U. (2016). Coding teaching for simultaneity and connections. *Educational Studies in Mathematics*, *93*(3), 293-313.

Emanuelsson, J. (2001). *En fråga om frågor* (A question about questions). Gothenburg: Acta Universitatis Gothoburgensis.

Fosnot, C., & Dolk, M. (2001). *Young mathematicians at work-constructing number sense, addition and subtraction*. Portsmouth: Heinemann

Fuson,K.C. in Grouws, D. A. (Ed.). (1992). *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. New York: Macmillan.

Fuson K.C., Wearne, D., Hiebert J. C., Murray H. G., Human P. G., Olivier A. I, Carpenter T. P, Fennema E. (1997). Children's Conceptual Structures for Multidigit Numbers and Methods of Multidigit Addition and Subtraction**.** *Journal for Research in Mathematics Education*. *28*, *(2)*, 130–162

Fuson, K. C. (1988). *Children's counting and concepts of number*. New York. Springer Science & Business Media.

Fuson, K.C., (2003) *A research companion to principles and standards for school mathematics* in Kilpatrick, J., Martin, W. G., & Schifter, D. (Eds.). (2003). National Council of Teachers of English.

Gelman, R., & Gallistel, C. R. (1978). *The child's understanding of number*. Cambridge. Harvard University Press.

Gray, E. M., & Tall, D. O. (1994). Duality, ambiguity, and flexibility: A" proceptual" view of simple arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26*(2)*, 116-140.

Hart, C. (2009). *Doing a literature review: releasing the social science research imagination*. (Reprint). London: Sage Publications.

Hannula-Sormunen, M. M., Lehtinen, E., & Räsänen, P. (2015). Preschool Children's Spontaneous Focusing on Numerosity, Subitizing, and Counting Skills as Predictors of Their Mathematical Performance Seven Years Later at School. *Mathematical Thinking and Learning*, *17*(2-3), 155-177.

Husserl, E., & Jakobsson, J. (2004). *Idéer till en ren fenomenologi och fenomenologisk filosofi*. Stockholm. Thales.

Jung, M. (2011). Number Relationships in Preschool. *Teaching Children Mathematics*, *17*(9), 550-557.

Kaufman, E. L., Lord, M. W., Reese, T. W., & Volkmann, J. (1949). The discrimination of visual number. *The American journal of Psychology, 62 (4). 498–525.*

Kullberg, A., & Runesson, U. (2013). Learning about the numerator and denominator in teacher-designed lessons. *Mathematics Education Research Journal*, *25*(4), 547-567.

Kullberg, A. (2010). *What is taught and what is learned. Professional insights gained and shared by teachers of mathematics*. Gothenburg, Acta Universitatis Gothoburgensis

Kvale, S., & Brinkmann, S. (2009). *Den kvalitativa forskningsintervjun*. Lund: Studentlitteratur

Lo, M. L. (2012). *Variation theory and the improvement of teaching and learning*. Göteborgs universitet: Gothenburg Studies in Educational Sciences 323. Gothenburg, Acta Universitatis Gothoburgensis

Lo, M. L. (2014). *Variationsteori: för bättre undervisning och lärande*. Lund: Studentlitteratur.

Löwing, M. (2016). Diamant-diagnoser i matematik. Ett kartläggningsmaterial baserat på didaktisk ämnesanalys. Gothenburg, Sweden: Acta Universitatis Gothoburgensis

McIntosh, A., Reys, B. J., & Reys, R. E. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. *For the Learning of Mathematics*, *12*(3), 2-44.

McIntosh, A. (2008). Förstå och använda tal. Gothenburg: *National Centre for mathematics education (NCM)*

Marton, F. (1981). Phenomenography: Describing conceptions of the world around us. *Instructional Science*, *10*(2), 177-200.

Marton, F. *On keeping track*. Manuskript (opublicerad)

Marton, F., & Booth, S. (1997). *Learning and awareness*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Marton, F. & Booth, S. (2000). *Om Lärande.* Lund: Studentlitteratur.

Marton, F., Dahlgren, L. O., Svensson, L., & Säljö, R. (1977). *Inlärning och omvärldsuppfattning*. Stockholm: Almqvist & Wiksell.

Marton, F., & Neuman, D. (1989). Constructivism and constitutionalism. Some implications for elementary mathematics education. *Scandinavian Journal of Educational Research*, *33*(1), 35-46.

Marton, F., & Pang, M. F. (2006). On some necessary conditions of learning. *The Journal of the Learning Sciences*, *15*(2), 193-220.

Marton, F. (2015). *Necessary conditions of learning.* New York: Routledge McIntosh, A., Reys, B. J., & Reys, R. E. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. *For the learning of mathematics*, *12*(3), 2-44.

Marton, F., & Tsui, A. B. (2004). *Classroom discourse and the space of learning*. Mahwah, N.J.: Erlbaum.

Moeller, K., Martignon, L., Wessolowski, S.,Engel, J., & Nuerk, H-C. (2011). Effects of finger counting on numerical development – the opposing views of neurocognition and mathematics education. *Frontiers in Psychology, 2*(328), 1-5.

Murata, A., & Fuson, K. (2006). Teaching as assisting individual constructive paths within an interdependent class learning zone: Japanese first graders learning to add using 10. *Journal for Research in mathematics Education*, 421-456.

Neuman, D. (1986). Forskning om tidig räkning och matematiksvårigheter. I *Marton, F. (red). Fackdidaktik. Volym III. Matematik. Naturorienterande ämnen.* Lund: Studentlitteratur.

Neuman, D. (1987). *The origin of arithmetic skills: A phenomenographic approach.* Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis.

Neuman, D. (1989). *Räknefärdighetens rötter*. Stockholm: Utbildningsförlaget.

Neuman, D. (2013). Att ändra arbetssätt och kultur inom den inledande aritmetikundervisningen. *Nordic Studies in Mathematics Education*, *18*(2), 1-44.

Pang, M. F. (2003). Two faces of variation: On continuity in the phenomenographic movement. *Scandinavian journal of educational research*, *47*(2), 145-156.

Powell, A. B., Francisco, J. M., & Maher, C. A. (2003). An analytical model for studying the development of learners' mathematical ideas and reasoning using videotape data. *The journal of mathematical behavior*, *22*(4), 405-435.

Runesson, U. (1999). *Variationens pedagogik.* Skilda sätt att behandla ett matematiskt innehåll. Göteborg Studies in Educational Sciences, 129. Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis.

Runesson Kempe, U. (2016) Learning study - en ämnesdidaktisk och praktikutvecklande forskningsansats I: Anderberg, E. (red): *Skolnära forskningsmetoder.* Studentlitteratur: Lund

Sayers, J., Andrews, P., & Björklund Boistrup, L. (2014). The role of conceptual subitizing in the development of foundational number sense. In *A Mathematics Education Perspective on early Mathematics Learning between the Poles of Instruction and Construction (POEM), Research Symposium, Malmö, Sweden, June 16-17, 2014.*

Skolverket, (2013) Diamant- ett diagnosmaterial i matematik. Nerladdat 2016-06-10 http://www.skolverket.se/bedomning/bedomning/bedomningsstod/matematik/diamant-1.196205

Skolverket. (2011, rev. 2017). *Läroplan för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet.* Stockholm: Skolverket

Svenson, O., & Sjöberg, K. (1982). Solving simple subtractions during the first three school years. *The Journal of Experimental Education*, *50*(2), 91-100.

Venkat, H., Ekdahl, A. L., & Runesson, U. (2014). Connections and simultaneity: Analysing South African G3 Part-part-whole teaching. In *PME 38/PME-NA 36 Proceedings Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education and the North American Chapter of the Psychology of Mathematics Education Vancouver, Canada, July 15-20,* (Vol. 5, pp. 337-344).

Vetenskapsrådet-Gustafsson, B., Hemerén, G., & Pettersson, B. (2011). God forskningssed. Stockholm. Vetenskapsrådet.

Bilagor

Bilaga 1 Bilder från undervisning i New York våren 2017

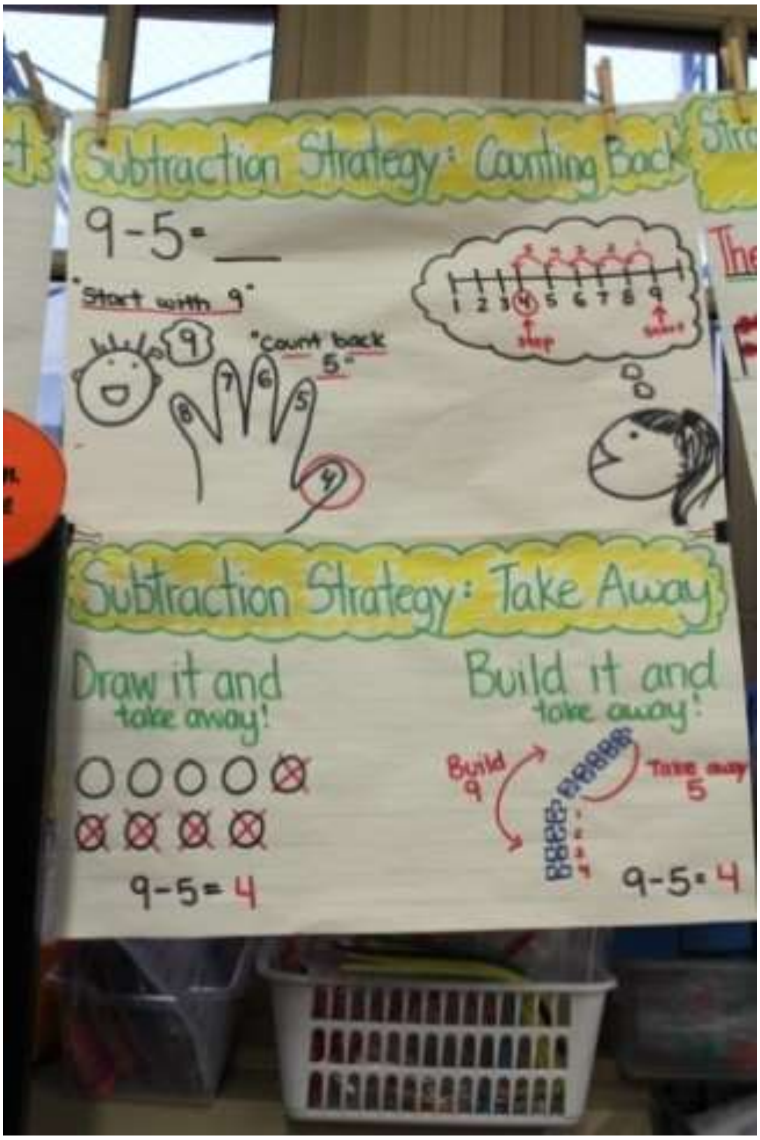


Bild 5 Lärarens beskrivning av olika strategier som en hjälp för elever.

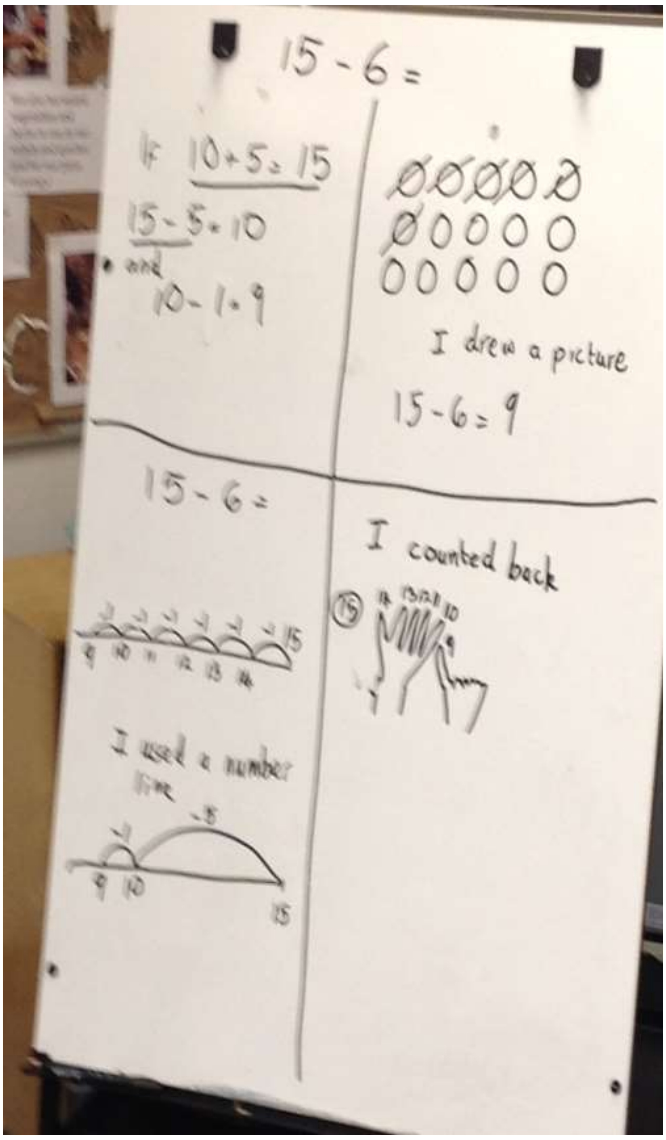


Bild 6 Lärarens beskrivning av elevernas strategier.

Bilaga 2

Intervjufrågor årskurs 3

Del–del -helhet

13= 7+_; 13-7, 32-27

Frågor till barnet

Du och en kompis har samlat 13 snäckor tillsammans. Du har hittat sju, hur många har din kompis hittat då?
Hur vet du det?
Kan du förklara?

Frågor till barnet:

En annan dag har du samlat 32 stenar och din kompis 27.
Hur många fler har du då? (förutsatt att barnet kunde avgöra vem som har samlat flest)
Hur vet du det?
Kan du förklara?

Subtraktion
15-9, 6+_=14; 14-6,

Frågor till barnet:

En lördag får du 15 godisar och äter genast upp 9. Hur många har du kvar då?
Hur vet du det?
Kan du förklara?

Frågor till barnet:

Tänk dig att du ska duka till mellanmålet. Du sätter ut 6 glas på bordet. Ni är 14 barn. Hur många glas behöver du hämta?
Hur vet du det?
Kan du förklara?

Uppgift utan kontext
Post- it lapp
82-7

Bilaga 3

Godkännande av videoinspelad elevintervju för forskningsändamål *

Mitt namn är Britt Holmberg, lärarutbildare på Göteborgs universitet. I mitt masterarbete undersöker jag hur elever uppfattar tal inom talområdet 1-20 och vill i det arbetet ta hjälp av klassens elever.

Eleverna gör först en diagnos där de utför några enkla beräkningar. Utifrån diagnosen väljs några elever ut för en videofilmad intervju där de enskilt får berätta hur de kommit fram till sina svar på några ytterligare uppgifter.

Dokumentation i form av bild och ljudupptagning i elevintervjuerna sker i första hand för en forskningsstudie och materialet kommer att förvaras inlåst. De personer som medverkar i studien kommer att vara anonyma i den vetenskapliga rapportering som kommer ut avstudien. Namn kommer att ändras till fiktiva namn. Om du godkänner att ditt barn får intervjuas samt att diagnosmaterial samlas in för att användas i forskningssammanhang ber vi dig skriva under denna blankett och återlämna till skolan. Fyll i blanketten även om du inte vill att ditt barn deltar.
Det finns alltid möjlighet att avbryta sitt deltagande i projektet.

Med vänlig hälsning
Britt Holmberg
Adjunkt Göteborgs universitet
britt.holmberg@gu.se

Som vårdnadshavare för ……………………………………………………….

lämnar jag mitt samtycke till att han/hon får intervjuas och finnas med på film som används i forskningssammanhang.

☐ Ja, jag tillåter att mitt barn deltar i studien och filmas under intervju

☐ Ja, jag tillåter att mitt barn deltar i studien men endast med ljudupptagning

☐ Nej, jag tillåter inte att mitt barn deltar i studien

Datum………………	Datum…………………..
Underskrift vårdnadshavare	Underskrift vårdnadshavare
……………………………	…………………………...
Namnförtydligande	Namnförtydligande
…………………………….	……………………………

Bilaga 4

DIAGNOS AG3

Namn ______________________________ Klass ________

1a

4 + 6 = ___	3 + 7 = ___
5 + ___ = 10	2 + ___ = 10
___ + 9 = 10	___ + 6 = 10

1b

10 – 6 = ___	10 – 3 = ___
10 – 1 = ___	10 – ___ = 8
10 – ___ = 5	10 – ___ = 7

2a

9 + 2 = ___	4 + 9 = ___
9 + 6 = ___	5 + 9 = ___
9 + 8 = ___	7 + 9 = ___

2b

14 – 9 = ___	17 – 8 = ___
12 – 9 = ___	18 – 9 = ___
15 – 6 = ___	16 – 9 = ___

3a

8 + 7 = ___	5 + 8 = ___
8 + 4 = ___	8 + 8 = ___
3 + 8 = ___	8 + 6 = ___

3b

13 – 8 = ___	14 – 6 = ___
16 – 8 = ___	15 – 8 = ___
12 – 8 = ___	11 – 3 = ___

AG2

4a

14 + ___ = 19	2 + ___ = 18
13 + ___ = 17	5 + ___ = 18
11 + ___ = 17	3 + ___ = 19

4b

18 = 3 + ___	19 = 16 + ___
15 = 2 + ___	18 = 13 + ___
19 = 4 + ___	17 = 14 + ___

Bilaga 5

Extrauppgifter

24 + 9 =	25 + 8 =
7 + 25 =	6 + 24 =
23 + 8 =	26 + 7 =

---

23 – 8 =	24 - 7 =
21 – 19 =	21 – 2 =
24 – 9 =	25 – 8 =