Elever som inte kan bråka bra nog

En kvantitativ studie om gymnasieelevers missuppfattningar av bråk

Pontus Andersson

Ämneslärarprogrammet med inriktning mot gymnasiet

Examensarbete:	15 hp
Kurs:	LGMA2A
Nivå:	Avancerad nivå
Termin/år:	VT 2018
Handledare:	Johanna Pejlare
Examinator:	Johan Wästlund
Kod:	VT18-3001-002-LGMA2A

Keywords:

Missuppfattningar av bråk, missuppfattningar av tal i bråkform, svårigheter med bråk, svårigheter med tal i bråkform, bråktalsräkning, bråk i gymnasiet, gymnasiet, övergeneralisering, student errors when doing fractions, students misconceptions with fractions, misconceptions with rational numbers, fractions in upper secondary school, fractions in high school.

Abstract

This study aims to highlight what kind of misconceptions students show when solving problems and tasks involving fractions amongst Swedish students in upper secondary school. The purpose of the study is to get an idea of the common errors that students exhibit and use that information to give examples on how to plan and execute lessons in a way that these misconceptions can be prevented. The study used was a quantitative based study where the results are compared with the study *Algebra students difficulty with fractions - an error analysis* by Brown and Quinn from 2006. My study shows that many of the Swedish students have misconceptions when it comes to how they handle fractions. Some types of misconceptions that students show in the study is discussed. The most common misconception found in my study was that the students overgeneralize.

Förord

Först skulle jag vilja börja med att rikta ett stort tack till alla de elever som deltagit i min studie. Utan er hade jag inte kunnat genomföra min studie och skriva detta examensarbete.

Jag vill även tacka min handledare Johanna Pejlare för alla tips och råd under arbetets gång. Det har varit mycket uppskattat.

Vidare vill jag tacka mina klasskamrater och vänner som hjälpt mig i ur och skur under utbildningen och särskilt i detta arbete när jag behövt ert stöd. Men även under de stunder som det känts som mörkast, då jag funderat på om jag verkligen kommer att klara detta.

Särskilt tack går till Simon Ingvarsson som alltid finns där när man fastnar eller bara behöver diskutera någonting. Han tar sig alltid tid. Du är även bra på att ge bra kritik som gör att man utvecklas. Utan dig så hade jag nog inte varit där jag är nu, nämligen att skriva detta arbete. Du har varit en riktig klippa när det kommer till att lära sig fysik. Trots att vi tänker och löser saker olika så lyckas du alltid förklara så man förstår.

Monik Bekamp, trots allt hon har att göra och alla saker hon tar sig an, så har hon alltid tid för sina vänner när de behöver henne. Om det är att få bara prata av sig eller tycka att allt är skit så mår man alltid bättre efteråt. Hon är en riktigt bra förebild som visar att man kan göra det man vill.

Daniel Green ställer alltid upp och hjälper till med vad som helst. Du har varit en klippa när det kommer till utbildningen. Utan dig hade jag nog inte varit lika bra på matematik som jag är idag. Tack för alla de givande diskussioner vi haft under utbildningen.

Jesper Gegerfelt förgyller alltid dagen genom att alltid kunna omvandla det seriösa till något mer roligt, vilket gör det hela roligare och trevligare. Du gör om det mörka och tråkiga till det ljusa och roliga. Det är få som gör det på samma sätt som du. Men du, jag ska försöka ta med mig denna egenskap in i klassrummet när eleverna har det svårt.

Jag skulle även vilja tacka Kurt och Helena Andersson för att de hjälpte mig att korrekturläsa detta arbete.

Ett stort tack tillägnar jag min opponent Isabelle Fundell Ryberg, som med stor noggrannhet och precision granskade mitt arbete. Dina kommentarer möjliggjorde att nivån på arbetet kunde höjas ytterligare.

Till sist vill jag även tacka min examinator Johan Wästlund för den respons och feedback som gavs under och efter granskningsseminariet.

Innehållsförteckning

1 Inledning

Användandet av tal i bråkform är väldigt brett inom matematiken och är därför en essentiell del att ha bra förståelse för. Ett bråk är ett förhållande och bristande kunskaper inom tal i bråkform kan leda till problem även med exempelvis procent, skala, algebra eller ekvationer.

Min erfarenhet, från min verksamhetsförlagda utbildning (VFU), är att elever har väldigt svårt med tal i bråkform. Det finns en del brister i deras förståelse för hur bråkräkning genomförs samt att eleverna hellre tillämpar tal i decimalform än tal i bråkform. Många elever ser ett bråktal som någonting som måste beräknas, inte som att det också kan vara svaret på uppgiften. Då bråktalen finns med i en stor del av matematiken så är det viktigt att eleverna har en korrekt förståelse för dem.

I mitt första examensarbete gjordes en litteraturstudie om tal i bråkform och det är någonting som jag tycker är väldigt intressant. Jag vill få mer förståelse för varför elever har det svårt med just tal i bråkform. Jag vill med hjälp av denna studie hitta vanliga missuppfattningar eller brister i deras begreppsbild och begreppsdefinition. I min framtida roll som lärare vill jag på ett bra sätt kunna undervisa om tal i bråkform för att förhindra att denna problematik uppstår.

I ämnesplanen för matematik för gymnasieskolan nämns inte bråk en enda gång i centrala innehållet eller kunskapskraven. Men i grundskolans kursplan för matematik finns det med i det centrala innehållet för årskurs 1–3, 4–6 och 7–9. Det omnämns endast i kunskapskraven för årskurs 1–3, där det står:

> Eleven har grundläggande kunskaper om naturliga tal och kan visa det genom att beskriva tals inbördes relation samt genom att dela upp tal. Eleven visar grundläggande kunskaper om *tal i bråkform* genom att dela upp helheter i olika antal delar samt jämföra och namnge delarna som enkla *bråk*. (Skolverket, 2011a, s.7–8)

1.1 Syfte och frågeställning

Studiens syfte är att undersöka vilken kunskap elever visar om tal i bråkform. Med detta som grund vill jag besvara följande frågeställning:

- Vilka är gymnasieelevers vanligaste missuppfattningar vid beräkning med tal i bråkform?
- Vilka brister finns det i gymnasieelevers begreppsbild/definition om tal i bråkform?

1.2 Avgränsningar

Jag har valt att studera de missuppfattningar elever har som går första året på gymnasiet. Detta med anledning av att en stor andel av eleverna har svårigheter med tal i bråkform och att det är en essentiell del av matematiken.

2 Bakgrund

I detta kapitel kommer det definieras vad bråk är och olika missuppfattningar vid beräkning av tal i bråkform. Även en redogörelse för hur tal i bråkform direkt eller indirekt omnämns i ämnes- och kursplanen.

2.1 Definition av bråk

Ett bråk är ett förhållande $\frac{T}{N}$ mellan dess täljare och nämnare, där T står för täljaren och N för nämnaren som även är skild från noll. Linjen mellan täljaren och nämnaren kallas för *bråkstreck*. De tal som kan skrivas som ett bråk av heltal kallas rationella tal (Bråk, 2017, 01 oktober).

Kiselman och Mouwitz, (2008) definierar ett bråk som ett uttryck av formen a/b eller $\frac{a}{b}$, där a kallas för täljare och b nämnare. Författarna nämner att bråken $\frac{2}{5}$ och $\frac{40}{100}$ är olika bråk men de representerar samma tal på tallinjen. Ett tal skrivet som ett bråk sägs vara i bråkform. Vidare nämner de att ordet bråk kommer från tyskans *brok* som betyder brytning eller brott.

Löwing (2017) har samma definition som Kiselman & Mouwitz (2008). Hon nämner även olika situationer som bråktal förekommer i. Tal i bråkform kan uppfattas som:

- **ett tal:** utifrån dess egenskaper som rationellt tal kan alla tals storlek i bråkform bestämmas i jämförelse med ett annat och placeras på sin rätta plats på tallinjen. Exempelvis om jag vill placera ut talet $\frac{2}{7}$, placera då ut talen noll och ett på tallinjen, sedan dela in avståndet mellan dem i sju lika delar varpå $\frac{2}{7}$ placeras på den andra markeringen från noll.
- **en del av en hel:** när elever först stöter på tal i bråkform används ofta saker som pizzor och pajer som delas in i olika stora bitar.
- **en del av ett antal:** detta skiljer sig från att använda tal i bråkform för att representera en del av en hel. Det viktiga är att man kan se mönstret hur man kan dela in de saker man har i det givna antalet delar, sedan ta ett visst antal av dessa delar.
- **division som metafor:** i skolan finns inte längre två olika symboler för att utföra en division och att skriva ett tal i bråkform. Historiskt skrevs alltid en division med ett kolon mellan siffrorna, som det görs när man skriver en skala på kartan. Detta är problematiskt då det är skillnad på att dela ett tal med ett annat och förstå meningen med av exempelvis talet $\frac{2}{5}$. Dock om talet beräknas ger det samma sak som om divisionen utförs, vilket gör att division fungerar bra som metafor.
- **en andel:** enligt Löwing (2017) är den vanligaste representationen idag är att andelar representeras i procentform vilket innebär att talet $\frac{3}{5}$ omvandlas till $\frac{60}{100} = 60\ \%$. Detta är ofta onödigt. Om vi vill veta vad $\frac{3}{5}$ av 400 är kan vi beräkn a detta, genom att först beräkna vad $\frac{1}{5}$ av 400 är och sedan multiplicera svaret med 3.

- **en proportion:** Löwing beskriver proportion genom att använda ett exempel, om det går åt 3 msk olja för varje msk vinäger till en salladsdressing. Om dubbelt så mycket dressing önskas kommer det krävas 6 msk olja och 2 msk vinäger. Det innebär att proportionen mellan vinäger och olja är $\frac{1}{3}$. Notera att det även går att skriva som $\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{3}{9} = \frac{4}{12}$ och så vidare genom att förlänga $\frac{1}{3}$ med olika tal.
- **ett förhållande:** Om vi ska dela en viss summa av någonting som har förhållandet x till y så kommer då de olika personerna att få $\frac{x}{x+y}$ och $\frac{y}{x+y}$. Exempelvis om förhållandet är 3 till 5 av 100 kommer vi ha $\frac{3}{8}$ av 100 och $\frac{5}{8}$ av 100.
- **en skala:** om det på en ritning står skala 2:5 innebär det att en sträcka på kartan motsvarar $\frac{2}{5}$ av den i verkligheten. Det är viktigt att förstå att det inte kan dela upp som $\frac{1}{5} + \frac{1}{5}$ utan det kan endast skrivas om genom att förlänga eller förkorta till exempelvis $\frac{6}{15}$.

2.2 Bråkets plats i styrdokumenten

Nedan kommer en genomgång om och hur bråkbegreppet omnämns i styrdokumentens olika delar i grundskolans kursplan respektive gymnasiets ämnesplan. Även andra kopplingar till tal i bråkform enligt Löwing (2017) som omnämns i avsnitt 2.1.

2.2.1 Kursplanen

Kursplanen är indelad i tre delar: syfte, centralt innehåll och kunskapskrav. Under syftet finns även de fem förmågor som våra elever ska ges möjlighet att utveckla, dessa är *begreppsförmåga, metodförmåga, problemlösningsförmåga, resonemangsförmåga och kommunikationsförmåga*. Skolverket har följande formuleringar i syftet (Skolverket, 2011a):

> Genom undervisningen ska eleverna ges förutsättningar att utveckla förtrogenhet med grundläggande matematiska begrepp och metoder och deras användbarhet. […] använda och analysera matematiska begrepp och samband mellan begrepp (s. 1–2).

Tal i bråkform är något som eleverna börjar med redan i lågstadiet. Det centrala innehållet och kunskapskraven är indelade efter följande årskurser: 1–3, 4–6 och 7–9. I det centrala innehållet omnämns tal i bråkform både direkt men även indirekt i andra former, enligt de olika sätt tal i bråkfrom kan uppfattas enligt Löwing (2017). Formuleringarna varierar något mellan de olika stadierna i skolan och så här har skolverket valt att formulera dem:

- Årskurs 1–3 (lågstadiet)

  I det centrala innehållet står det följande under *Taluppfattning och tals användning, samband och förändringar*

  > del av helhet och del av antal. Hur delarna kan benämnas och uttryckas som enkla **bråk** samt hur enkla **bråk** förhåller sig till naturliga tal (s.3).
  >
  > Naturliga tal och enkla **tal i bråkform** och deras användning i vardagliga situationer (s.3).
  >
  > Olika **proportionella samband**, däribland dubbelt och hälften (s.4).

Om vi ser till kunskapskraven har vi följande:

> Eleven visar grundläggande kunskaper om **tal i bråkform** genom att dela upp helheter i olika antal delar (s.7).
>
> Eleven kan även använda och ge exempel på **enkla proportionella samband** i elevnära situationer samt jämföra och namnge delarna som enkla bråk (s.7).

- Årskurs 4–6 (mellanstadiet)

  I det centrala innehållet står det följande under *Taluppfattning och tals användning, geometri och samband och förändringar*

> **Rationella tal** och deras egenskaper (s.4).
>
> Tal i **bråk-** och decimalform och deras användning i vardagliga situationer (s.4).
>
> Tal i procentform och deras samband med **tal i bråk-** och decimalform (s.4).
>
> Konstruktion av geometriska objekt. **Skala** och dess användning i vardagliga situationer (s.5).
>
> **Proportionalitet** och procent samt deras samband (s.5).
>
> Grafer för att uttrycka olika typer av **proportionella samband** vid enkla undersökningar (s.5).

- Årskurs 7–9 (högstadiet) står det följande under *Taluppfattning och tals användning, geometri och samband och förändring.*

> **Reella tal** och deras egenskaper samt deras användning i vardagliga och matematiska situationer (s.6).
>
> Centrala metoder för beräkningar med **tal i bråk-** och decimalform vid överslagsräkning, huvudräkning samt vid beräkningar med skriftliga metoder och digital teknik. Metodernas användning i olika situationer (s.6).
>
> Avbildning och konstruktion av geometriska objekt. **Skala** vid förminskning och förstoring av två- och tredimensionella objekt (s.6).
>
> **Procent för att uttrycka förändring** och förändringsfaktor samt beräkningar med procent i vardagliga situationer och i situationer inom olika ämnesområden (s.7).

För mellan- och högstadiet står det inget som går att koppla till tal i bråkform i kunskapskraven (Skolverket, 2011a).

2.2.2 Ämnesplanen

Likt kursplanen är även ämnesplanen uppdelad i tre delar: syfte, centralt innehåll och kunskapskrav. Det som skiljer sig från kursplanen är att ämnesplanen är uppdelad i kurser. Dessa ska även ge eleverna möjlighet att utveckla ytterligare två förmågor utöver de fem i grundskolans kursplan, nämligen *modelleringsförmåga och relevansförmåga*. De har även bytt namn på *metodförmågan* till *procedurförmåga*. På gymnasial nivå finns det 6 matematikkurser: matematik 1–5 och specialisering. De tre första kurserna är ytterligare uppdelade efter vilket program eleverna läser på. Matematik 1 och 2 har den extra uppdelningen *a*, *b* och *c* medan matematik 3 har *b* och *c*. Matematik 4–5 och specialisering har ingen uppdelning. Elever som läser på naturvetenskaps- eller teknikprogrammet läser matematik *c*, på estetiska programmet, humanistiska programmet, ekonomi- och samhällsvetenskapsprogrammet läses matematik *b* och elever på samtliga yrkesprogram läser matematik *a*. Nedan kommer en sammanställning av de delar i det centrala innehållet och kunskapskraven från Skolverket (2011b) som har kopplingar till tal i bråkform, samt de olika sätt att se på tal i bråk som diskuterats i avsnitt 2.1.

- I Matematik 1a står det följande under det centrala innehållet för *Taluppfattning, aritmetik och algebra*, *sannolikhet och statistik*, *geometri och samband och förändring.*

> Metoder för beräkningar med **reella tal** skrivna på olika former inom vardagslivet och karaktärsämnena, inklusive överslagsräkning, huvudräkning och uppskattning samt strategier för att använda digitala verktyg. (s.3).
>
> Geometriska begrepp valda utifrån karaktärsämnenas behov, till exempel **skala**, vektorer, likformighet, kongruens, sinus, cosinus, tangens och symmetrier (s.3).
>
> Begreppen **förhållande** och **proportionalitet** i resonemang, beräkningar, mätningar och konstruktioner (s.3).
>
> Begreppen beroende och oberoende händelser samt metoder för **beräkning av sannolikheter vid slumpförsök i flera steg** … (s.3).

- I Matematik 1b står det följande under det centrala innehållet för *Taluppfattning, aritmetik och algebra samt sannolikhet och statistik.*

> Egenskaper hos mängden av heltal, olika talbaser samt begreppen primtal och **delbarhet** (s.6).
>
> Metoder för beräkningar inom vardagslivet och karaktärsämnena med **reella tal** skrivna på olika former inklusive potenser med heltalsexponenter samt strategier för användning av digitala verktyg (s.6).
>
> **Hantering av algebraiska uttryck** och för karaktärsämnena relevanta formler (s.6).
>
> Begreppen beroende och oberoende händelser samt metoder **för beräkning av sannolikheter vid slumpförsök i flera steg** … (s.6).

- I Matematik 1c står det följande under det centrala innehållet för *Taluppfattning, aritmetik och algebra samt sannolikhet och statistik.*

  > Egenskaper hos mängden av heltal, olika talbaser samt begreppen primtal och **delbarhet** (s.9).
  >
  > Metoder för beräkningar inom vardagslivet och karaktärsämnena med **reella tal** skrivna på olika former inklusive potenser med heltalsexponenter samt strategier för användning av digitala verktyg (s.9).
  >
  > Generalisering av aritmetikens räknelagar till att **hantera algebraiska uttryck** (s.9).
  >
  > Begreppen beroende och oberoende händelser samt metoder **för beräkning av sannolikheter vid slumpförsök i flera steg** … (s.9).

- I Matematik 2a och 2b står det följande under det centrala innehållet för *Taluppfattning, aritmetik och algebra.*

  > Metoder för beräkningar med potenser med **rationella exponenter** (s.12 och s.15).

- I Matematik 2c finns det ingen koppling i det centrala innehållet.
- I Matematik 3b står det följande under det centrala innehållet för *algebra samt samband och förändring.*

  > Begreppen polynom och **rationella uttryck** samt generalisering av aritmetikens lagar till hantering av dessa begrepp (s.21).
  >
  > Begreppen sekant, tangent, **ändringskvot** och derivata för en funktion (s.21).

- I Matematik 3c står det följande under det centrala innehållet för aritmetik, *algebra och geometri samt samband och förändring.*

  > Begreppen polynom och **rationella uttryck** samt generalisering av aritmetikens lagar för hantering av dessa begrepp (s.24).
  >
  > Begreppen sekant, tangent, **ändringskvot** och derivata för en funktion (s.24).

- I Matematik 4 står det följande under det centrala innehållet för aritmetik, *algebra och geometri samt samband och förändring*.

  > Algebraiska och grafiska metoder för att lösa enkla polynomekvationer med komplexa rötter **och reella polynomekvationer av högre grad**, även med hjälp av faktorsatsen (s.27).
  >
  > **Härledning och användning av deriveringsregler för** trigonometriska, logaritm-, exponential och sammansatta funktioner samt produkt och **kvot av funktioner** (s.27).

- I Matematik 5 och specialisering finns det ingen koppling i det centrala innehållet.

2.3 Bråken i vardagen och svårigheter med dem

Enligt McIntosh (2008) behövs tal i bråkform för att kunna skriva ner exakta svar på ett enkelt vis. En problematik och svaghet med vårt decimalsystem att det inte kan uttrycka talet $\frac{1}{3}$ exakt då talet har en oändlig och periodisk decimalutveckling. I dagens samhälle används dock inte tal i bråkform i så stor utsträckning trots att det har en ytterst väsentlig roll i att förstå procentbegreppet och är även essentiellt för algebra. Även om det inte spelar en väsentlig roll så menar Gabriel et al (2013) att tal i bråkform är en del av vårt liv. Bråk är närvarande i exempelvis bakning, att läsa och förstå avstånd på en karta eller vid minskning på priser. Enligt McIntosh (2008) representeras bråken olika i våra läromedel och syftar ibland till ett tal och ibland ett skrivsätt. Författaren väljer det senare alternativet där $\frac{1}{2}$ och $\frac{3}{6}$ är två olika bråk men representerar samma tal på tallinjen.

När det kommer till den vardagliga användningen av bråk är den ofta begränsad, då till halva, fjärdedelar eller en bråkdel av. Det kan då sägas att bråket är delar av en helhet, men det är ytterst viktigt att dessa delar är exakt lika stora. Historiskt sett har nämnaren indikerat antalet delar, medan täljaren är ett betydligt äldre ord som kan betyda både *berätta* och *räkna antal*. Vilket kan jämföras med engelskans *tell* som även den har fler än en innebörd. McIntosh (2008) menar att för eleverna är övergången från de hela talen till tal i bråkform en kritisk punkt, då det är ett stort steg som öppnar nya möjligheter samtidigt som det är fyllt med utmaningar. Vilket kanske inte är konstigt då det tog mänskligheten flera århundraden att utveckla tal i bråkform.

McIntosh (2008) påpekar att vanligen ges inte elever nog med tid för att förstå vad ett bråk är, utan de tränas i de olika regler som gäller för beräkningar med bråk. Detta är problematiskt då eleverna inte har en klar bild av vad ett tal i bråkform är men ändå förväntas kunna arbeta med dem. Elevers förståelse för tal i bråkform bedöms bäst genom deras förmåga att uppskatta storleken i relation till tre referenspunkter: *noll, en halv* och *ett*. McIntosh menar att eleverna behöver förstå fyra grundläggande aspekter av tal i bråkform, vilka är:

- alla delar måste vara *lika stora* för att de ska vara bråkdelar, dock behöver inte delarna ha samma form
- nämnaren visar i hur många delar en hel har delats
- ju större nämnaren är i förhållande till täljaren, det vill säga ju fler delar helheten är delad i, desto mindre är bråket eftersom varje del blir mindre
- täljaren visar hur många delar av helheten vi har

En förutsättning för att kunna räkna med bråken är att inse att två helt olika bråk kan betyda samma sak. Att avgöra om två bråk är en representation av samma tal på tallinjen, innebär att göra bråken liknämniga och om sedan täljaren är samma är de identiska. Detta förklaras vanligen genom att multiplicera täljare och nämnare med samma tal, men denna regel skapar ofta ingen förståelse och kan skapa en missuppfattning. McIntosh förespråkar att illustrera detta med ett laborativt arbete. Det är viktigt att eleverna förstår att $1 = \frac{1}{1} = \frac{2}{2} = \frac{3}{3} = \cdots \frac{n}{n}$. Elever missuppfattar ofta en förlängning med $\frac{3}{3}$ som att multiplicera med 3 istället för 1, då både täljare och nämnare multipliceras.

När elever arbetar med halva, fjärdedelar eller delar som innebär ytterligare delning i halvor brukar det vara lätt. Men exempelvis när det kommer till tredjedelar finns det en risk för missuppfattningar. De tar då först och delar helheten i två delar och sedan en av delarna i hälften igen, de har nu skapat tre delar men alla är nu inte lika stora (delarna är istället $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ och $\frac{1}{4}$ av helheten).

När elever ska jämföra storleken av tal i bråkform finns det vanligen två missuppfattningar. Den första är att ju större tal vi har i nämnaren desto större är talet och den andra är att om vi har talet nio i nämnaren är talet nästan en hel. Dessa missuppfattningar härstammar från att eleverna försöker överföra sina kunskaper om heltalen till talen i bråkform och att vi då kan tillämpa samma regler. McIntosh (2008) ger följande exempel på elevers missuppfattningar: Eftersom 0,9 nästan är 1,0 uppfattar eleverna $\frac{1}{9}$ och $\frac{1}{10}$ som nästan 1 eller en hel. Även vissa elever tror att $\frac{1}{5}$ är samma sak som 0,5 och $\frac{2}{5}$ är samma sak som 2,5. Enligt McIntosh (2008) så kan dessa missuppfattningar undvikas genom att eleverna får en god taluppfattning om själva begreppet bråk och inte bara räkna med dessa.

McIntosh (2008) poängterar även att ett av de vanligaste problemen är att eleverna inte förstår varför de ska göra en viss operation eftersom de bara har lärt sig en regel som de ska applicera. Exempelvis vid addition med bråk: Varför måste vi ha samma nämnare? Varför är det viktigt att kunna jämföra tal i bråkform? Om dessa frågor diskuteras med eleverna kan det förhindra missuppfattningar som att det inte finns ett tal mellan exempelvis $\frac{3}{5}$ och $\frac{4}{5}$. Som påpekats ovan är det viktigt att förstå vikten av förlängning. Om det appliceras kan exemplet skrivas som $\frac{6}{10}$ och $\frac{8}{10}$. Då kan man se att $\frac{7}{10}$ ligger mellan $\frac{3}{5}$ och $\frac{4}{5}$. Sammanfattningsvis är de huvudsakliga missuppfattningarna: jämförelse av bråk, en större nämnare resulterar i ett större tal och att desto större summan av täljaren och nämnaren är desto större är talet. Missuppfattningarna har sin grund i att talen i bråkform ofta isoleras från verkligheten istället för använda verkligheten till sin fördel och tillsammans konkretisera talen i bråkform.

Även Van Bommel (2012) nämner elevers svårigheter när det kommer till storleken på bråk. Hon nämner att elever endast tittar på nämnarens storlek eller tittar på summan av nämnare och täljare. En annan aspekt är elevers förståelse för att alla delar måste vara lika stora. Författaren nämner att när det kommer till att tillämpa tal i bråkform på arean av en figur, inser eleverna inte att lika delar behöver vara lika stora. Vid användandet av en rektangel eller kvadrat kommer delarna bli lika stora så länge som basen delas in i lika delar. Om eleverna har den missuppfattningen kan det upptäckas genom att använda en cirkel. Om samma procedur appliceras på diametern som användes på basen i rektangeln och kvadraten kan denna missuppfattning frammanas. Hon nämner även att förståelsen för hälften går att framhäva med liknande metoder. Det kan vara att färglägga hälften av en figur men inte bara delat på mitten utan på ett annat sätt och då se om eleverna inser att det fortfarande är hälften. Van Bommel menar att det inte handlar om att medvetet vilseleda våra elever utan använda vår lärarkompetens för att ställa frågorna på ett sätt så att det framgår om eleverna har förstått innehållet eller ej. Poängen som hon vill göra är att den extra tid det tar oss att göra dessa uppgifter sparar oss tid när vi ska utvärdera vad eleverna kan och slipper ställa frågan ”Kan du förklara hur du tänkte?” (s.16) lika ofta.

Ett bråk i blandad form är ett bråk som inte är skrivet på formen a/b enligt definitionen ovan utan innehåller en heltalsdel och en bråkdel. Exempel på ett sådant tal är $1\frac{3}{7}$, om vi skriver det enligt definitionen av bråk ovan blir då talet $\frac{10}{7}$. Alltså $\frac{7}{7}+\frac{3}{7}$, vilket då kan skrivas som $1+\frac{3}{7}$. Enligt Löwing (2017) har vi ett problem när vi skriver det på den blandade formen, då skrivsättet direkt strider mot algebrans regler. Om vi inom algebran har ett tal skrivet på formen $a\frac{b}{c}$ betyder det $a\cdot\frac{b}{c}=\frac{ab}{c}$, inte som förklarat ovan $a+\frac{b}{c}$ Löwing (2017). Vi tar ett exempel från vardagen för att exemplifiera användningen av blandad form. I recept står mängder som inte är hela (dl, msk, tsk, krm) alltid i blandad form. Exempel: det kan i ett recept stå 2 ½ dl mjöl eller 2 ½ dl florsocker. Undantaget är om det istället mäter i antal gram eller kg

2.4 Likhetstecknet

Enligt Hall (2002) finns det två vanliga fel som uppstår när elever använder metoden *gör samma sak på båda sidor* (han illustrerar det med ett exempel från Kieran), vilka är:

> The Redistribution error, where x + 37 = 150 is judged to have the same solution as x + 37 - 10 = 150 + 10, and the Switching Addends error, where x + 37 = 150 is judged to have the same solution x = 37 + 150 (Kieran, 1992, page 402).

Ovanstående exempel illustrerar att det finns tydliga brister i förståelsen för likhetstecknet, som innebär en ekvivalens mellan högerledet och vänsterledet. Kieran (1984) fann att elever som gjorde dessa två fel är oftare *transposers* än *trial and improvers*. *Transposing* innebär en ”byt sida” och ”byt teckenteknik”. Detta resulterar i att dessa elever inte förstår själva grunden för ekvationen. I detta fall kan en intressant dikotomi ses med denna observation som även styrks av en annan studie av Greeno (1982) där han påpekar att elever inte kan kontrollera en färdig lösning utan behöver göra om beräkningen igen. De inser inte att den lösning de tagit fram kan stoppas in i den ekvation som de startade med och verifiera att högerledet är samma som vänsterledet (eller i valfri del av lösningen). Kieran (1981) skriver även att många elever pratar om likhetstecknet som svaret på frågan, där de har frågan på vänstersidan och svaret på högersidan. Om vi har $x-\frac{2}{3}=5$ multiplicerar många elever båda led med tre och får då $x-2=15$ men de glömmer här då att multiplicera alla termer på vänstersidan med tre.

2.5 Övergeneralisering

Att övergeneralisera innebär att individen använder en metod i ett sammanhang där den inte är applicerbar. Palm (2008) ger exempel från (Wagner & Parker, 1993) där elever förenklar $(x+y)^2=x^2+y^2$, detta med anledning av att $(x\cdot y)^2=x^2\cdot y^2$. Det är inte alltid dåligt att generalisera metoder, att samma regler gäller för de olika räkneoperationerna. Men då detta ofta är fallet reflekterar inte individerna över möjliga begränsningar för de fall då det inte fungerar och riskerar där med att övergeneralisera.

Palm (2008) tar upp två tydliga exempel där individen har övergeneraliserat. Det Första är $\frac{2+x}{x}=2$, där individen har tagit bort ett x från täljaren och ett från nämnaren. Detta hade varit korrekt om det varit en multiplikation i täljaren men denna metod fungerar inte vid addition. Vilket resulterar i slutsatsen att individen inte gör någon skillnad mellan räkneoperationen multiplikation och addition utan istället likt ovan övergeneraliserar. Hennes andra exempel är $\frac{12\cdot 2x}{2}=6x$, här finns en övergeneralisering där eleven räknat som om det vore addition då man ska dela alla termer i täljaren med nämnaren, medan vid multiplikation ska den endast delas med ett av talen.

2.6 Elevers svårigheter med bråk i algebra

I en rapport från den amerikanska The National Assessment of Educational Progress (NAEP) anser man att det finns anledning till oro rörande elevers resultat de senaste tjugo åren. Resultaten visar att elever vid sjutton års ålder återkommande visar svårigheter med bråkbegreppet (Brown & Quinn, 2006). I en analys av 1990 NAEP matematiska prestationer av Mullis et al (1991) fann de att endast 46 % av high school seniors (amerikanska motsvarigheten av gymnasiet) eleverna visade på en acceptabel förståelse för decimaltal, procent, bråk och enkel algebra. Om algebra ska vara för alla måste det enligt Brown och Quinn skapas en koppling mellan algebran och tal i bråkform. Det behöver skapas en konceptuell förståelse men även en färdighet i att göra aritmetiska manipulationer på heltalen och tal i bråkform. I artikeln ”On the study and difficulty or mathematics” av Augustus de Morgan (1910) påpekas att inlärningen av tal i bråkform förväntas medföra stora svårigheter, vilket var sant på 1800-talet och är sant fortfarande idag. Tänk er följande:

> What is $\frac{1}{4}$ of $\frac{2}{7}$ of a foot? What is $\frac{2}{5}$ of $\frac{1}{3}$ of $\frac{3}{4}$ of a foot? Into how many parts must $\frac{3}{7}$ of a foot be divided, and how many of them must be taken to produce $\frac{14}{15}$ of a foot? What is $\frac{1}{3}+\frac{1}{7}$ of a foot? and so on (s.41).

Är citatet ovan en naturlig progression från operationer på heltalen? När man har en god förståelse för multiplikation av heltalen och hur de fungerar, om vi då tar produkten av $\frac{2}{3}$ och $\frac{3}{5}$. Augustus de Morgan menar att resultatet är absurt, vi måste lindra absurditeten och lösa mysteriet varför $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{7}=\frac{1}{21}$. Lärare och forskare har under det senaste århundradet forskat på när och hur tal i bråkform ska undervisas även hur deras kunskaper inom området påverkar övergången mellan aritmetiken och algebran.

Kieren (1980) föreslår att avvakta med instruktionerna till de rationella talen tills eleven kan hantera de formella operationerna. Han menar att fem koncept rörande tal i bråkform måste differentieras och sammankopplas för att skapa en övertygande föreställning om tal i bråkform. De fem koncepten är: del-helhet relationer, förhållanden, kvoter, åtgärder och operatorer. Dessa fem representerar olika tankesätt rörande tal i bråkform. Han påpekar även att vi ofta bara lärt ut en algoritm, vilket lämnar eleven i mörkret när det kommer till förståelsen för tal i bråkform, eftersom det inte skapar någon koppling eller förståelse för talen i bråkform. Om eleven glömmer algoritmen innebär det att eleven måste försöka använda andra metoder som hen kommer ihåg, exempelvis från heltalen. Det här kan skapa ett fel så att eleven adderar både nämnare och täljare för talen i bråkform vilket inte fungerar. Om man försöker lära elever algoritmer som är bortom vad de kan appropriera leder det till memorering. Lamon (1999) insisterar att det påverkar elevernas motivation att vilja lära sig matematik.

I en studie av Brown och Quinn (2006) testades 143 elevers kunskap om bråkbegreppet och de olika räknesätt som används. Frågorna som ingick i testet delades in i sex generella kategorier. De sex kategorierna var:” Algorithmic applications”, ”Applications of basic fraction concepts in word problems”, ”Elementary algebraic concepts”, ”Specific arithmetic skills that are prerequisite to algebra”, ”Comprehension of the structure of rational numbers” och “Computational fluency”. Eftersom eleverna uppmanades att visa hela sin lösning kunde flera missuppfattningar kopplas till deras förståelse för de rationella talen och att de applicerar fel algoritm vid beräkning på tal i bråkform. Nedan kommer en beskrivning om vilka typer av uppgifter som de valt att placera i var och en av de sex kategorierna och ett exempel på varje.

- Applicera algoritmer

  Här ingår uppgifter där eleverna ska finna summan/produkten/differensen av tal i bråkform samt förenkla bråk och svara på enklaste form.

  > **Exempel:** beräkna $\frac{5}{12}+\frac{3}{8}$

- Tillämpningar av grundläggande bråkbegrepp i ordproblem

  Meningen med dessa är att avgöra om eleverna kunde känna igen hur man skulle använda beräkningar med tal i bråkform för att lösa uppgiften.

  > **Exempel:** hälften av eleverna på en skola ska gå på en konsert. Eleverna kommer att ta fem bussar. Hur stor andel av eleverna på skolan kommer det att finnas på varje buss?

- Grundläggande algebraiska begrepp

  I denna kategori handlar det om hur elever hanterar ekvationer som innehåller en obekant i kombination med tal i bråkform.

  > **Exempel:** Lös ekvationen $x+\frac{1}{3}=7$

- Specifika aritmetiska kunskaper, vilka är en förutsättning för algebra

  Författarna hänvisar till Rotman (1991) som anser att grunden för att förstå algebra ligger i att förstå aritmetiken. Dessa problem involverar elevernas förståelse för de rationella talen.

  > **Exempel:** Vad är $\frac{18}{0}$?

- Förståelse av de rationella talens struktur

  Vi vill här säkerställa elevens konceptuella förståelse för den grundläggande strukturen hos de rationella talen. En aspekt som kontrolleras var hur väl de såg kopplingen mellan täljaren och nämnaren när det kommer till att bestämma storleken på talet i bråkform. En annan aspekt är elevernas förmåga att använda rätt räkneoperation till de olika talen.

  > **Exempel:** Vad är $\frac{2}{3}$ av $\frac{3}{7}$?

- Beräkningsskicklighet

  Vi är här intresserade av att kunna se om eleverna har kontroll över bråkbegreppet och de algoritmerna som låter dem visa på sin beräkningsskicklighet i ovanliga kontexter. Dessa frågor borde vara den bästa indikatorn på hur väl de lyckas inom algebra.

  > **Exempel:** beräkna summan av $\frac{7+5}{3+5}+\frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{3}}$

Brown och Quinn (2006) menar att bristen på erfarenhet när det kommer till bråkbegreppet och beräkningar med tal i bråkform är oacceptabelt. Författarna anser att innan eleverna börjar årskurs nio borde de minst haft två år av en informell behandling av bråkbegreppet och tre år för att utveckla formella begrepp och beräkningsskicklighet. De rationella talen har en nyckelroll när det kommer till att utvidga heltalen medan man bygger upp förståelse för bråkbegreppet, för att sedan kunna utvecklas till begreppet algebra.

3 Teoretiskt ramverk

Nedan kommer de teoretiska ramverken som kommer att användas under diskussionen av resultatet men även de didaktiska konsekvenserna.

3.1 Vygotskij

Lev Semenovich Vygotskij är grundaren till den sociokulturella traditionen. Han föddes 1896 i Orsja och dog 1934 i Moskva. Han arbetade med utveckling, lärande och språk vid den psykologiska institutionen vid Moskvas universitet. Han ansågs vara en exceptionellt initiativrik person. I en engelsk utgåva av hans samlade verk fick han smeknamnet psykologins Mozart.

3.1.1 Mediering

Ett av de grundläggande begreppen inom den sociokulturella traditionen är *mediering.* Det kommer från tyskans Vermittlung, som betyder förmedling. När vi medierar använder vi olika verktyg för att förstå den värld vi lever i. Vygotskij menar att de verktyg vi använder är antingen *språkliga* eller *materiella* (Lundgren, Säljö & Liberg, 2012).

Lundgren et al (2012) menar att i vissa sammanhang kallas det språkliga verktyget för intellektuellt eller mentalt (Vygotskij föredrog termen psykologiskt redskap). Ett språkligt redskap kan vara en symbol, ett tecken eller en serie av tecken, exempelvis bokstav, siffra och begrepp. Denna typ av redskap har alltid sin grund i vår kulturella utveckling och historia. Det utvecklas med tiden. Exempelvis för att mäta längder användes tidigare tum och fot medan vi nu har det metriska systemet där vi använder oss utav meter. Vi har då ett system som över tiden har utvecklats genom att vi lagt till olika prefix för att skapa olika längder.

3.1.2 Appropriering

Appropriering används för att beskriva och förstå lärandet. Det innebär att individen blir förtrogen med att använda en viss kunskap. Vilket innebär att göra den till sin egen, när eleven har tillägnat sig kunskapen. Många av de saker vi lär oss, sker inte i en undervisande situation utan i vardagen. När vi lär oss begrepp i dessa situationer kan det ses som *indirekt* eller *implicit mediering*. Den viktigaste approprieringen sker under den primära socialisationen. Det är här barnet lär sig sitt första språk, interagera socialt med andra och börjar bygga sin egen identitet (Lundgren, Säljö & Liberg, 2012).

3.1.3 Den närmaste utvecklingszonen

Ett av Vygotskijs kända begrepp är *Zone of Proximal Development* (ZPD). Denna princip hänger ihop med hans syn på lärande och utveckling som är en kontinuerlig process. När en individ behärskar ett innehåll fullt ut kan de lära sig någonting nytt som angränsar till det.

Figur 1: Illustration av ZPD

I figur 1 finns tre olika zoner med olika nyanser av blå. Det eleverna klarar av utan hjälp från andra är markerat med mörkblått. Det vi kan lära oss med hjälp från andra är markerat med en ljusare nyans och det som vi inte kan lära oss för tillfället med en väldigt ljus nyans. Exempelvis om vi kan addera ensiffriga heltal kan vi då med tiden lära oss att addera större tal så som tvåsiffriga och till slut godtyckliga (Lundgren, Säljö & Liberg, 2012).

I fasen då inlärning av någonting nytt ska ske är man beroende av en mer kunnig person som frågor kan ställas till under själva lärandeprocessen. Detta kan liknas med vad som brukar kallas *scaffolding*. Detta innebär att kunskapen byggs upp, likt en byggnadsställning för att den som ville lära sig nu kan klättra upp för den själv. Det är av yttersta vikt att den som ska lära ut inte tar över, utan låter den som vill lära sig få ta sig an utmaningarna och lösa dem. Eleven ska alltså inte *lotsas* (att den som hjälper gör i stort sett hela uppgiften åt eleven). Det måste därför ingå i den professionella pedagogens arsenal en kompetens för att läsa av eleven för vilka tips och råd som ska ges för att undvika lotsning.

3.2 Begreppsbild och Begreppsdefinition

Matematiken är ett område där begreppen kan definieras på ett exakt sätt, vilket ger matematiken en solid grund. Enligt Tall och Vinner (1981) är den psykologiska verkligheten en aning annorlunda. Många matematiska begrepp har påträffats i något sammanhang tidigare, vilket leder till att individen redan har en begreppsbild innan hen möter på den matematiska definitionen och skapar sig en begreppsdefinition.

Enligt Tall och Vinner (1981) är den mänskliga hjärnan inte enbart en logisk entitet, den är mycket mer komplex. Hjärnans komplexa funktion är en motpol till matematiken, som anses vara uppbyggd på ren logik. Om vi ska förstå hur processen fungerar måste vi kunna formulera skillnaden mellan det matematiska begreppets formella definition och den kognitiva process som de var tänkta för. Många av de begrepp som vi gärna använder är inte definierade, utan vi lär oss känna igen dem genom erfarenheter och att vi då kan använda dem i rätt kontext. Med tiden lär vi oss förfina dessa begrepp. Under processen ger vi ofta begreppet ett namn eller en symbol för att enklare kunna kommunicera begreppet, men även att mentalt kunna manipulera den. Men den kognitiva strukturen som färgar själva betydelsen av begreppet är betydligt viktigare än användandet av symbolen. Under den mentala processen att använda och manipulera ett begrepp ur begreppsbilden är många olika processer involverade. Både medvetet och omedvetet kommer det att påverka betydelsen och användandet.

Tall och Vinner (1981) använder termen *concept image*, (begreppsbild) för att beskriva den totala kognitiva strukturen som associeras med begreppet. Begreppsbilden inkluderar alla mentala bilder, dess egenskaper och processerna. Detta är något som byggs upp under flera år av erfarenheter men som även förändras i samband med att individen utvecklas. Exempelvis begreppsbilden för subtraktion är ofta en process där individerna först arbetar med heltal. Individen observerar då att subtrahera innebär att talet blir mindre, då är denna observation en del av begreppsbilden. Det kan dock leda till problem senare, om individen ska utföra subtraktion av negativa tal. Av den anledningen ska alla mentala bilder vare sig de är medvetna eller omedvetna vara en del av begreppsbilden. De kan innehålla möjliga felkällor inför framtiden. Allt eftersom begreppsbilden utvecklas behöver den inte vara sammanhängande. Hjärnan fungerar inte på det viset.

Tall och Vinner (1981) har valt att benämna den del av begreppsbilden som framkallats vid en given tid för *evoked concept image* (framkallad begreppsbild). Det kan hända att två delar av begreppsbilden som motsäger varandra framkallas samtidigt.

Vidare nämner Tall och Vinner (1981) begreppet *concept definition*, (begreppsdefinition) som innebär att ett begrepp specificeras med ord. Individen kan ha lärt sig definitionen genom ren memorering eller på ett mer meningsfullt sätt genom att relatera till det i större eller mindre utsträckning till begreppet som helhet. Det kan även hända att individen gör en personlig omstrukturering av definitionen. Det är då med ord som individen själv använder för att beskriva den framkallade begreppsbilden. Om begreppsdefinitionen är något som individen själv har kommit på eller om det är något som individen har fått förklarat för sig kan den variera. Detta betyder då att en personlig definition kan avvika från den formella begreppsdefinitionen, som är vedertagen inom matematikens värld. Det är viktigt att tänka på att varje individ kommer skapa sin egen begreppsbild. För vissa individer kan den vara blank, i stort sett blank, mer sammanhängande eller tydlig. Lärare kanske ger en formell definition men arbetar endast med den en kort tid innan det blir långa perioder med räkning med formler. Detta kan leda till att begreppsbilden utvecklas i riktningen att den endast innehåller formler medan begreppsdefinitionen är nästan helt frånvarande i den kognitiva strukturen. Om individen vid ett senare tillfälle stöter på begreppet i en bredare kontext kan det skapa problem som hen inte kan hantera eller lösa.

Det finns även en del av begreppsbilden eller begreppsdefinitionen som kan hamna i konflikt med andra delar av begreppsbilden eller begreppsdefinitionen. Detta kallar Tall och Vinner (1981) för *potential conflict factor* (potentiell konfliktfaktor). Dessa faktorer behöver inte framkallas när det uppstår en *konfliktfaktor* men om den är framkallad kallas den för *cognitive conflict factor*. I vissa fall kan en kognitiv konflikt uppstå undermedvetet och konflikten framstår som en vag känsla. Detta menar författarna kan vara orsaken till att ibland när individen löser problem får hen känslan av att det är någonting som inte stämmer. En mer allvarlig potentiell konfliktfaktor är när begreppsbilden är i konflikt med den formella definitionen. Dessa typer av konflikter kan hindra inlärningen av den formella definitionen eller teorin.

4 Metod

I detta avsnitt kommer studiens urval, genomförande, de forskningsetiska frågorna, val av metod och analys att göras. Dessutom kommer det göras en beskrivning om varför validitet och reliabilitet är viktigt, samt några olika typer av validitet och reliabilitet.

4.1 Kvantitativ studie

För att svara på studiens frågeställningar valdes en kvantitativ undersökningsmetod. Enkätens åtta första frågor har tagits från en studie genomförd av Brown och Quinn (2006) som analyserar elevers svårigheter med bråk i samband med algebra. De har valt att dela upp sina frågor i sex olika kategorier (se avsnitt 2.8). Den nionde frågan är tagen från en studie av Ma (2010), vars natur passar in under Brown och Quinns sjätte kategori. Uppgifterna i min studie efterliknar uppgifterna i deras respektive studie, översatta till svenska.. De nio frågorna i enkäten är valda så att det finns en eller två frågor med från varje kategori.

4.2 Urval

Studien är genomförd på en gymnasieskola i Göteborg. Studien omfattade elever som gick första året på gymnasiet och läste på ett av tre program: Teknik-, Ekonomi- eller Industriprogrammet. Eleverna fick frågan om de kunde tänka sig att delta i studien rörande bråkräkning. Elevgruppen valdes med anledning av att tal i bråkform ingår i den matematikkurs de nu läser och därmed intressant att se vilka typer av missuppfattningar de har. Av de 87 tillfrågade eleverna valde 76 elever, från tre olika klasser, som läser första året på gymnasiet att svara på enkäten. De elever som valde att inte delta tillhörde alla ekonomiklassen. Anledningen till det kan ha varit att de skrev ett prov precis innan jag skulle genomföra min enkät. Motiveringen till valet av program var för att jag skulle få elever som läser alla de olika kurserna i matematik 1.

4.3 Genomförande

Under den sista VFU-perioden tillfrågades tre olika lärare om det fanns en möjlighet att få göra en studie i en av de klasser där de undervisar som underlag för examensarbetet. Ett datum för studien bestämdes med de berörda lärarna. Skolorna besöktes sedan av mig personligen där jag inför varje elevgrupp informerade om studiens syfte. Jag berättade att de kommer vara helt anonyma och att jag ville att de skulle visa hela sina lösningar då jag är intresserad av hela vägen till svaret, inte endast svaret. Eleverna fick enkäten som innehöll nio stycken uppgifter. Under själva lösandet av uppgifterna fick eleverna inte använda kalkylator. De fick totalt 30 minuter på sig för att lösa uppgifterna.

4.4 Forskningsetiska principer

Forskning är inte bara viktigt utan nödvändigt för individerna men även samhället som helhet. När forskning ska bedrivas är det viktigt att den behandlar viktiga frågor och eftersträvar en hög kvalité. Detta är vad som brukar kallas för forskningskravet. Samtidigt har vi individskyddskravet som då innebär att ingen individ i samhället ska komma till fysisk eller psykisk skada, bli förödmjukad eller kränkt. Vid forskning är det då viktigt att vi väger dessa två krav mot varandra och gör en avvägning om värdet på forskningen som hen kommer att få kontra möjliga risker för individen (Vetenskapsrådet, 2002). Individskyddet kan delas in i fyra huvudkrav när forskning bedrivs.

4.4.1 Informationskravet

Den som genomför studien måste informera deltagarna om deras roll i studien. Forskaren ska även informera deltagarna om att det är helt frivilligt att delta och att de när som helst kan välja att avbryta sin medverkan. Informationen de får ska innehålla allt som kan tänkas påverka deras vilja att delta i studien (Vetenskapsrådet, 2002).

4.4.2 Samtyckeskravet

Den som deltar i en studie har alltid rätten att bestämma över sin egen medverkan. Om deltagaren önskar avbryta sitt deltagande ska hen inte utsättas får några påtryckningar för att fortsätta. Forskaren måste förse sig med deltagarens samtycke. Det kan i vissa fall krävas att även vårdnadshavare ger sitt samtycke. Det gäller om deltagaren är under 15 år och om undersökningen kan anses vara av en etisk känslig karaktär (Vetenskapsrådet, 2002).

4.4.3 Konfidentialitetskravet

Det är av yttersta vikt att alla personer som väljer att delta i en studie garanteras anonymitet, vilket innebär att inte kunna identifieras. I denna studie kommer inga personuppgifter lagras men om så är fallet ska de förvaras på ett sådant sätt att ingen obehörig eller yttre person kan komma över dem (Vetenskapsrådet, 2002).

4.4.4 Nyttjandekravet

De uppgifter som samlas in under studien får endast användas i forskningssyfte. Uppgifterna får inte användas eller lånas ut för kommersiellt bruk eller andra icke-vetenskapliga ändamål. Man kan generellt säga att insamlad data endast bör doneras eller lånas till andra forskare som lovar att ha samma diskretion gentemot uppgiftslämnaren (Vetenskapsrådet, 2002).

4.5 Trovärdighet

Trovärdighet i studien kommer bero på en kombination av faktorerna *validitet* och *reliabilitet*. I stora drag handlar det om: Mäter studien det den avser att mäta och är den möjlig att återskapa med liknande resultat. Att skriva ner en definition av validitet och reliabilitet är inte enkelt då de är ganska komplexa begrepp. Nedan kommer en förklaring av de olika begreppen och hur de har applicerats i denna studie för att nå så hög validitet och reliabilitet som möjligt.

4.5.1 Validitet

Bryman och Nilsson (2011) menar att validitet är ett mått på hur väl ett begrepp verkligen mäter det som avses att mätas. Det finns fyra olika former av validitet; *mätningsvaliditet*, *intern validitet*, *extern validitet* och *ekologisk validitet*.

Mätningsvaliditet gäller främst vid de kvantitativa studierna och visar hur väl begreppet reflekterar det som ska betecknas. Denna studie visar hur väl frågorna hjälper mig besvara mina frågeställningar.

Intern validitet handlar om ett kausalt förhållande mellan olika variabler och om den är hållbar. Om vi har två variabler x och y är det då verkligen x som svarar för variationen i y och inte någon annan faktor. Den som utövar inflytande på en annan kallas för oberoende variabel och effekten av den för beroende. I denna studie är då frågorna den oberoende variabeln medan de olika kategorierna och de missuppfattningar eleverna uppvisar den beroende variabeln.

Extern validitet berör ifall studiens resultat går att generalisera i en kontext utanför den grupp som ingick i studien. Det kan vara svårt att generalisera i denna studie då deltagarantalet var relativt lågt, endast 76 personer deltog.

Ekologisk validitet gör kopplingen ifall de resultat som studien visar är applicerbara på människors vardag och deras naturliga sociala miljöer. Denna kan påverkas om forskaren under insamlingen av data gjort det i en miljö som inte är naturlig. Det är viktigt för studiens validitet att enkäter, intervjuer eller den typ av datainsamlingsmetod som valts sker naturligt och i en så bekväm miljö för deltagarna som möjligt. Här valdes det att genomföra studien på de deltagande elevernas matematiklektioner, med förhoppningen att de då förväntade sig att arbeta med matematik och det därmed inte skulle påverka den *ekologiska validiteten*.

4.5.2 Reliabilitet

Enligt Bryman och Nilsson (2011) handlar reliabilitet om följdriktigheten, överensstämmelsen och pålitligheten i undersökningen. För att bestämma om ett mått är reliabelt eller ej finns det tre viktiga faktorer; *stabilitet*, *intern reliabilitet* och *interbedömarreliabilitet*.

Den första faktorn är *stabilitet* och ett sätt att testa denna faktor är att använda sig av ett *test-retest*. Detta innebär att om jag ger en grupp ett test vid en tidpunkt och sedan samma test vid en senare tidpunkt kan vi förvänta oss en hög korrelation mellan resultatet vid de båda tillfällena. Därmed är den stabil och skulle gå att återskapa. I denna undersökning genomfördes testet endast en gång vilket gör att det är svårt att säga något om stabiliteten (Bryman & Nilsson, 2011). Bryman och Nilssons andra faktor är *intern reliabilitet* och handlar om hur väl de olika frågorna är relaterade till varandra. Den tredje och sista faktorn *interbedömarreliabilitet* handlar om hur väl samma sak skulle bedömas av olika personer. När det handlar om att bedöma en lösning kommer den alltid innehålla en vis grad av subjektivitet och då kan samma sak bedömas olika utifrån personernas egna tolkningar. Då uppgifterna i denna studie är tagna från studien av Brown och Quinn (2006) kan mina resultat jämföras med deras och därmed ge studiens resultat en högre trovärdighet.

4.6 Analys

Arbetet med att analysera enkäterna inleddes med att alla eleverna sorterades efter den klass de gick i. När sorteringen var klar kunde själva analysen av elevens svar börja. Svaren analyserades och sammanställdes uppgift för uppgift i ett Exceldokument. Analysen av varje svar placerades i en av fyra kategorier; rätt svar, missuppfattning, ej svar eller annat fel. I den sista kategorin placerades fel såsom; räknefel, ej förkortade tal i bråkform eller att eleven kanske bara inte avslutat sina beräkningar även om allt fram till den punkten var korrekt. För att på ett enkelt sätt kunna särskilja de olika felen och för att kunna enklare gå tillbaka och veta vilken enkät som påvisade en missuppfattning eller annat fel och i så fall på vilken uppgift skapades ett kodsystem. De båda koderna fick var sin färg och den uppgift som placerats i en av de kategorierna skrevs överst på första sidan i var sin färg (exempelvis om de har en missuppfattning på uppgift fem och annat fel på åtta skrev en blå femma och en röd åtta längst upp).

5 Resultat

I detta avsnitt redovisas resultaten för de olika klasserna. Dessutom presenteras de vanligaste missuppfattningarna på varje uppgift.

5.1 Sammanställning av enkätresultat

I tabellerna 1, 2 och 3 presenteras elevernas från de olika klasserna svarade på frågorna, fråga för fråga samt den uppgift de svarade på. Resultaten delades upp klassvis för att tydligt se eventuella skillnader mellan de olika klasserna samt om någon annan vill använda min studie i framtiden. Tabellerna visar även hur många av eleverna som gav: ett korrekt svar, en missuppfattning, inte hade svarat alls eller gjort ett annat fel. Annat fel inkluderar saker som: ej fullt förenklade bråk, delvis korrekta lösningar som ej avslutades eller liknande. Alla procentsatser i tabellerna är även avrundade till närmaste heltal.

	Teknik (matte 1c)					
Uppg nummer	Rätt svar	Missuppfattning	Ej svarat	Annat fel	Antal svarande	Uppgift
1	22 (79%)	1 (4%)	0 (0%)	5 (18%)	28	Beräkna $\frac{5}{12}+\frac{3}{8}$
2	21 (75%)	2 (7%)	0 (0%)	5 (18%)	28	Beräkna $\frac{6}{7}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{7}{4}$
3	24 (86%)	3 (11%)	0 (0%)	1 (4%)	28	Hälften av eleverna på en skola ska gå på en konsert. Eleverna kommer att ta fem bussar. Hur stor andel av eleverna på skolan kommer det att finnas på varje buss?
4	21 (75%)	0 (0%)	1 (4%)	6 (21%)	28	Lös ekvationen: $x+\frac{1}{3}=7$
5	2 (7%)	14 (50%)	2 (7%)	10 (36%)	28	Vad är $\frac{18}{0}$?
6	10 (36%)	13 (46%)	4 (14%)	1 (4%)	28	Vad är $\frac{2}{3}$ av $\frac{3}{7}$
7	21 (75%)	0 (0%)	0 (0%)	7 (25%)	28	Ordna följande bråk i storleksordning, börja med det största. $\frac{4}{7}, \frac{5}{9}$ och $\frac{3}{5}$
8	11 (39%)	5 (18%)	2 (7%)	10 (36%)	28	Beräkna summan av $\frac{7+5}{3+5}+\frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{3}}$.
9	11 (39%)	6 (21%)	2 (7%)	9 (32%)	28	Beräkna $\frac{1\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}}$

Tabell 1: Enkätresultat för eleverna på teknikprogrammet

	Ekonomi (matte 1b)					
Uppg nummer	Rätt svar	Missuppfattning	Ej svarat	Annat fel	Antal svarande	Uppgift
1	11 (55%)	4 (20%)	3 (15%)	2 (10%)	20	Beräkna $\frac{5}{12} + \frac{3}{8}$
2	10 (50%)	2 (10%)	5 (25%)	3 (15%)	20	Beräkna $\frac{6}{7} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{4}$
3	9 (45%)	3 (15%)	4 (20%)	4 (20%)	20	Hälften av eleverna på en skola ska gå på en konsert. Eleverna kommer att ta fem bussar. Hur stor andel av eleverna på skolan kommer det att finnas på varje buss?
4	4 (20%)	4 (20%)	4 (20%)	8 (40%)	20	Lös ekvationen: $x + \frac{1}{3} = 7$
5	0 (0%)	17 (85%)	3 (15%)	0 (0%)	20	Vad är $\frac{18}{0}$?
6	2 (10%)	6 (30%)	10 (50%)	2 (10%)	20	Vad är $\frac{2}{3}$ av $\frac{3}{7}$
7	10 (50%)	1 (5%)	9 (45%)	0 (0%)	20	Ordna följande bråk i storleksordning, börja med det största. $\frac{4}{7}, \frac{5}{9}$ och $\frac{3}{5}$
8	0 (0%)	2 (10%)	17 (85%)	1 (5%)	20	Beräkna summan av $\frac{7+5}{3+5} + \frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{3}}$.
9	1 (5%)	2 (10%)	15 (75%)	2 (10%)	20	Beräkna $\frac{1\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}}$

Tabell 2: Enkätresultat för eleverna på ekonomiprogrammet

	Industri (matte 1a)					
Uppg nummer	Rätt svar	Missuppfattning	Ej svarat	Annat fel	Antal svarande	Uppgift
1	16 (57%)	4 (14%)	2 (7%)	6 (21%)	28	Beräkna $\frac{5}{12} + \frac{3}{8}$
2	8 (29%)	5 (18%)	12 (43%)	3 (11%)	28	Beräkna $\frac{6}{7} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{4}$
3	27 (96%)	0 (0%)	0 (0%)	1 (4%)	28	Hälften av eleverna på en skola ska gå på en konsert. Eleverna kommer att ta fem bussar. Hur stor andel av eleverna på skolan kommer det att finnas på varje buss?
4	9 (32%)	11 (39%)	2 (7%)	6 (21%)	28	Lös ekvationen: $x + \frac{1}{3} = 7$
5	0 (0%)	26 (93%)	2 (7%)	0 (0%)	28	Vad är $\frac{18}{0}$?
6	5 (18%)	0 (0%)	12 (43%)	7 (25%)	28	Vad är $\frac{2}{3}$ av $\frac{3}{7}$
7	25 (89%)	0 (0%)	3 (11%)	0 (0%)	28	Ordna följande bråk i storleksordning, börja med det största. $\frac{4}{7}, \frac{5}{9}$ och $\frac{3}{5}$
8	2 (7%)	6 (21%)	13 (46%)	7 (25%)	28	Beräkna summan av $\frac{7+5}{3+5} + \frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{3}}$.
9	2 (7%)	4 (14%)	11 (39%)	11 (39%)	28	Beräkna $\frac{1\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}}$

Tabell 3:Enkätresultat för eleverna på industriprogrammet

5.2 Uppgiftsanalys

I detta avsnitt kommer en analys av varje uppgift göras och den vanligaste missuppfattningen visas. Den andel som anges nedan gäller för alla eleverna.

5.2.1 Uppgift 1

Här uppvisar eleverna två missuppfattningar, där den första är att eleverna försöker applicera samma metod som för heltalen där de adderar täljarna och nämnarna var för sig. Eleverna hade lösningen $\frac{5}{12}+\frac{3}{8}=\frac{5+3}{12+8}=\frac{8}{20}$, vilket kan generaliseras till $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$. Det var 7 av de 76 elever som svarade så.

Den andra missuppfattningen var att eleverna övergeneraliserade uppgiften och istället för att addera, multiplicerade de täljare och nämnare var för sig och fick lösningen $\frac{5}{12}+\frac{3}{8}=\frac{5\cdot 3}{12\cdot 8}=\frac{15}{96}$. Detta kan generaliseras till $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$ och det var 2 av de 76 elever som visade på detta fel. Sammanlagt var det $11{,}8\%$ av eleverna som visade på någon form av missuppfattning när det kommer till addition av tal i bråkform, men en majoritet av eleverna hanterade uppgiften på ett korrekt sätt ($63{,}1\%$).

5.2.2 Uppgift 2

Här är den mest framträdande missuppfattningen att eleverna övergeneraliserar och istället för att multiplicera talen, adderar dem istället. Eleverna har lösningen $\frac{6}{7}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{7}{4}=\frac{6+2+7}{7+3+4}=\frac{15}{14}$. Det var 5 av de 76 elever som utförde uppgiften på detta vis. Det framkom även en annan missuppfattning som var intressant. Eleven började med att addera $\frac{2}{3}$ och $\frac{7}{4}$ vilket eleven fick till $\frac{9}{7}$. Därefter multiplicerades det första resultatet med den första termen vilket då resulterade i $\frac{6}{7}\cdot\frac{9}{7}=\frac{54}{7}=8$.

5.2.3 Uppgift 3

Sex elever uppvisade en missuppfattning, vilket motsvarar $7{,}9\%$ av alla elever. Det vanligaste var att eleverna kunde tolka uppgiften på ett korrekt sätt och formulera texten matematiskt (fem av sex elever klarade detta). Men när uppgiften sedan skulle beräknas visas det på en missuppfattning i hur division av bråk ska utföras. Tre av eleverna löste det på följande vis: $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{1}}=\frac{2}{1}\cdot\frac{5}{1}=\frac{2}{5}$. Vi kan tydligt se att eleverna inverterar både täljare och nämnare och sedan multiplicerar dessa med varandra.

5.2.4 Uppgift 4

Det var 15 av 76 elever som visade på någon form av missuppfattning, vilket motsvarar 19,7% av eleverna. Det fanns tre olika missuppfattningar. 10 av eleverna, vilket motsvarar 13,2%, visade sig göra fel när de skulle ta ekvationen $x + \frac{1}{3} = 7$ och göra om $\frac{1}{3}$ till ett heltal genom att multiplicera ekvationen med 3. Problemet som noteras är att eleverna inte riktigt har förstått att likhetstecknet innebär att samma sak måste göras på båda sidorna av ekvationen. Eleverna hade lite olika fel när detta gjordes. Vissa multiplicerade endast vänsterledet med tre, medan några multiplicerade en term på vardera sidan av likhetstecknet snarare än alla termer på båda sidor.

Den andra missuppfattningen som 4 av 76 elever visade på följande lösning: $x + \frac{1}{3} = 7$, vilket leder eleverna till $\frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 7$ som utvecklas till $\frac{1}{3} = 2{,}33$ och även $\frac{2}{3} = 4.67$ och slutligen att $x = \frac{2}{3}$.

Den sista, och enligt mig en intressant missuppfattning var att en elev försökte invertera alla talen i ekvationen. Men likt den första missuppfattningen gjorde inte eleven samma sak på alla termer på båda sidor om likhetstecknet. Det resulterade i att eleven då fick följande ekvation: $\frac{1}{x} + \frac{1}{3} = \frac{1}{7}$ därefter använde eleven samma metod igen och inverterade denna gång alla termer på båda sidor vilket resulterade i $x + 3 = 7$ och då lösningen $x = 4$.

5.2.5 Uppgift 5

Detta var uppgiften där flest elever uppvisade en missuppfattning, Det var 57 av 76 vilket motsvarar 75% av eleverna. Dessa elever svarade antingen $0, 18, 1$ eller ∞. Av de 59 eleverna var det 46 elever som svarade 0, sju som svarade 18, tre som svarade 1 och en som svarade oändligheten. Då frågan löd ”vad är $\frac{18}{0}$” var det endast ett svar som kom och därmed svårt att analysera varför de tror att det blev dessa svar. Det är tydligt att det saknas en förståelse för denna uppgift, då det endast var 2 av de 76 elever som löste den med ett korrekt svar.

5.2.6 Uppgift 6

På uppgiften visade 19 av 76 elever att de har någon form av missuppfattning när det kommer till att beräkna en del av en annan del. Den första missuppfattningen som uppenbarades var att eleverna tolkade ordet av som en division istället för en multiplikation och därmed gjorde följande uppställning $\frac{2/3}{3/7}$. Därefter gjordes beräkningarna korrekt med att multiplicera både täljare och nämnare med inversen till nämnaren. Det var 11 av 76 elever som hade denna lösning, vilket motsvarar 14,5%.

Den andra missuppfattningen som hittades hos 7 av eleverna, var att de applicerade metoderna vid addition och gjorde en gemensam nämnare och därefter gav svaret. Dessa elever utgjorde 9,2%.

Den sista missuppfattningen innebar att bråken omvandlades till decimaltal och därefter dividerades den andra termen i uppgiften med den förstas täljare varpå svaret multiplicerades med 2. Om det första talet förblivit i bråkform hade detta resulterat i ett korrekt svar.

5.2.7 Uppgift 7

Resultatet på denna uppgift gav att endast en av eleverna visade en missuppfattning när det kommer till att ordna bråk i storleksordning. Eleven skrev ”alla bråk är lika stora” dock utan en motivering till varför, vilket gör det svårt att analysera exakt vad som är den bakomliggande faktorn till missuppfattningen.

5.2.8 Uppgift 8

Den vanligaste förekommande lösningen var att eleverna vid förenkling av $\frac{7+5}{3+5}+\frac{5/6}{5/3}$ började med att förenkla den sista termen genom att förlänga nämnaren med två för att då få $\frac{5/6}{10/6}$, vilket eleverna då förenklar men med olika resultat. De fick något av följande tal vid förenklingen: $\frac{2}{6}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{5}{6}$ eller $\frac{2}{5}$. Därefter löstes uppgiften korrekt med de siffor eleverna hade. Ett fåtal elever försökte använda algoritmen att i sista termen multiplicera täljaren i talet i täljaren med nämnaren i talet i nämnaren och sedan dividera det med produkten av nämnaren på talet i täljaren och täljaren på talet i nämnaren, vilket då borde ge $\frac{5\cdot3}{6\cdot5}=\frac{15}{30}=\frac{1}{2}$. Några elever fick istället en av två förenklingar, $\frac{5-3}{6-5}=\frac{2}{1}=2$. I stället för att multiplicera så subtraherade de, vilket kan bero på att eleverna övergeneraliserade frågan som resulterade i $5\cdot3+5\cdot6=15+30=45$.

Det var 8 av eleverna som hade denna typ av lösning, vilket motsvarar $10{,}5\%$. Det fanns även en annan typ av lösning som användes av 4 av eleverna där de omvandlade uppgiften korrekt till $\frac{12}{8}+\frac{1}{2}=\frac{24}{16}+\frac{8}{16}$. När de sedan skulle addera ihop termerna fick de resultatet till $\frac{32}{32}$ vilket indikerar att de försöker applicera addition av heltalen på ett tal i bråkform.

Den sista typen av missuppfattning som visades var en kombination av övergeneralisering och av svag begreppsbild. Där eleven börjar med att förkorta bort båda femmorna i den första termen, precis som kan göras vid multiplikation. Kvar är då $\frac{7}{3}$. Den andra termen förenklades till $\frac{6}{5}\cdot\frac{3}{5}=\frac{18}{25}$. Eleven har försökt att applicera algoritmen att multiplicera med inversen. Dock har hen inte förstått varför detta görs och istället multiplicerat inverserna av både täljaren och nämnaren.

5.2.9 Uppgift 9

Här fanns det en del olika typer av fel som eleverna gjorde. Det första gjordes av sex elever. De förenklade täljaren från blandad form till ett vanligt tal i bråkform och fick då $\frac{7/4}{1/2}$. Därefter varierade deras lösningar något. Första varianten innebar att när divisionen skulle utföras började de med att förlänga med två vilket gav $\frac{14/8}{1/2}$. Därifrån fanns det två olika metoder som resulterade i olika svar. Dividera båda talen i täljaren med två eller dividera endast täljaren på talet i täljaren med två. Det gav då svaren $\frac{7}{4}$ respektive $\frac{7}{8}$. Den andra varianten innebar att eleven istället multiplicerade hela både täljare och nämnare med två vilket gav svaret $\frac{14}{8}$. Det andra felet gjordes av två elever som båda multiplicerade inversen av täljaren med nämnarens invers och fick då $\frac{4}{7} \cdot \frac{2}{1} = \frac{8}{7}$.

De fyra återstående eleverna gjorde alla olika fel. Den första tolkade talet i täljaren som en multiplikation och inte som tal i blandad form. Därmed förenklade $\mathbf{1}\frac{3}{4}$ till $\frac{3}{4}$, därefter löser eleven uppgiften korrekt med det fel som skapats i början.

Den andra förenklade talet till $\frac{7/4}{1/2}$ vilket utvecklades till $7 \cdot 2 + 4 \cdot 1 = 14 + 4 = 18$. Om vi skriver bråket som $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$, ser vi att eleven applicerar algoritmen $\frac{ac}{bd}$, men att hen använder en addition istället för en division.

Den tredje använde sig av subtraktion och tolkade uppgiften som $\mathbf{1}\frac{3}{4} - \frac{2}{4} = \mathbf{1}\frac{1}{4}$. Den sista eleven skrev om täljaren till $\frac{7}{1}$ och fick då följande lösning $\frac{\frac{7}{1}}{\frac{1}{2}} = \frac{7}{1} \cdot \frac{2}{1} = 14$, baserat på uppgiften som eleven förenklade till är det korrekt.

6 Diskussion

I kapitlet kommer frågeställningarna i studien besvaras. Bakgrunden och resultatet kombineras till en diskussion, där följande fyra saker kommer att diskuteras: metoden, resultatet, de didaktiska konsekvenserna och förslag på framtida forskning.

6.1 Metoddiskussion

Jag valde att i denna studie använda mig av en kvantitativ studie för att undersöka mina frågeställningar. Det var ett bra och rimligt val i och med tidsaspekten på två månader. Om tidsramen varit större hade jag troligen valt att även inkludera ett kvalitativt inslag. Då hade jag inkluderat en fråga på enkäten om de kunde tänka sig att bli intervjuade i syfte att kunna komma djupare in på deras förståelse.

När enkäten skulle skapas togs uppgifterna från en tidigare studie, vilket ger den en bra variation för de missuppfattningar som man kan finna. Det var relativt många elever som deltog i studien, nämligen 76 elever, vilket gör att vi till viss del kan generalisera resultatet. För att med större säkerhet kunna göra detta skulle en större studie behöva göras, där elever från fler skolor på flera olika orter inkluderas. De deltagande eleverna gick alla första året på gymnasiet. Eleverna borde haft samma matematiska grund när de började på gymnasiet. Studien inkluderade alla de olika kurserna i matematik 1, vilket gav studien en bra bredd eftersom det kan ge en bättre uppfattning för vad eleverna kan i den kursen på gymnasiet.

Jag tror att om istället en longitudinell studie använts, vilket inte var rimligt att göra på grund av tidsaspekten, skulle reliabiliteten i resultatet öka. Anledningen till det är att vi då kan se hur eleverna presterar över tid och inte vid ett enda tillfälle. Eftersom vissa elever blir stressade över prov eller liknande situationer, även om prov genomförs i en bekväm miljö, så kan elever visa på missuppfattningar på grund av stress. Om fler mätningar görs går det att med större sannolikhet säga att den förmodade missuppfattningen verkligen var en missuppfattning.

6.2 Resultatdiskussion

Resultaten från studien diskuteras och jämförs med de resultat som Brown och Quinn (2006) påvisar i sin studie. Diskussionen kommer att göras kategori för kategori och avslutas med att jämföra resultaten av de båda studierna. Vidare kommer även missuppfattningar rörande övergeneralisering, likhetstecknet och bråk i vardagen diskuteras.

6.2.1 Elevers svårigheter med bråk i algebra

Tabell 4 nedan visar andelen missuppfattningar i min studie och Brown och Quinns (2006) studie indelade efter uppgift men även kategori. Uppgift 9 är inte tagen från deras studie men passar in under kategori nummer 6, därför är procentsatsen i den rutan tom

Kategori	1	1	2	3	4	5	5	6	6
Uppgift	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Mitt resultat	12%	12%	8%	20%	75%	25%	1%	18%	16%
Brown & Quinns resultat	48%	48%	66%	50%	80%	64%	43%	89%	

Tabell 4: Jämförelse av andelen elever som visar missuppfattningar i de olika studierna

Uppgifterna som kommer från kategori 1, *applicera algoritmer* i min studie, visar på 12% missuppfattningar. Detta kan jämföras med Brown och Quinns resultat där 48% av deras elever visar missuppfattningar för vardera uppgiften. I deras studie för denna kategori noterade de att eleverna vid addition av tal i bråkform uppvisade två typer av missuppfattningar. Den första var att de adderade täljare med täljare och nämnare med nämnare. Den andra missuppfattningen var att när de skulle skapa en gemensam nämnare, vilket de fick till 12, när 4 adderades i täljare och nämnare på den andra termen i uppgift 1, vilket resulterade i $\frac{5}{12}+\frac{3}{8}=\frac{5}{12}+\frac{3+4}{8+4}=\frac{5}{12}+\frac{7}{12}=\frac{12}{12}=1$. Detta gav dem en gemensam nämnare så att de därefter kunde addera täljarna och få fram ett svar. Även eleverna i min studie påvisade den första missuppfattningen men det var ingen som visade på den andra. De visade istället på en övergeneralisering av talet. Vi kan då se att problemet med elevernas begreppsbild, när det kommer till addition och multiplikation av tal i bråkform, är ett problem som finns i fler länder. Det skulle vara bra om en lösning på hur denna del av undervisningen kan göras tydligare för att minska andelen missuppfattningar hos eleverna.

I kategori 2 som var *tillämpningar av grundläggande bråkbegrepp i ordproblem* ser vi att 8% av eleverna i min studie visade på någon typ av missuppfattning, medan det var hela 66% i Brown och Quinns studie. Eleverna i deras studie visade på en av två missuppfattningar, vilka var: att de istället för att dividera en halv med fem så multiplicerades de två talen eller att de helt enkelt bara gav svaret $\mathbf{5}\frac{1}{2}$. Ingen av eleverna i min studie visade på dessa missuppfattningar utan de ställde upp uppgiften korrekt. Men när uppgiften sedan skulle beräknas uppenbarades en tydlig brist i elevernas begreppsbild när de skulle beräkna ett bråk dividerat med ett annat bråk. De försökte då komma ihåg algoritmen med att invertera talet i nämnaren, men de inverterade istället både talet i täljaren och i nämnaren och multiplicerade sedan dessa med varandra. Detta visar att elevernas begreppsbild inte är fullständig och att de istället försöker applicera en metod som de bara lärt sig eller memorerat. Elevernas begreppsbild kan således förstås som en spegling av deras uppfattning om den teoretiska begreppsdefinitionen, och det förefaller i detta fall som att elevernas begreppsbild inte ligger i linje med den faktiska begreppsdefinitionen. Det kan bero på att de har lärt sig definitionen genom memorering och inte genom att skapa förståelse och göra kopplingar till hur det fungerar.

För kategori 3 som var *grundläggande algebraiska begrepp* kan vi se att eleverna i Brown och Quinns studie på ett korrekt sätt flyttade över $\frac{1}{3}$ från vänsterledet till högerledet, vilket visades av 50% av eleverna. När sedan $7-\frac{1}{3}$ skulle beräknas blev det fel då eleverna saknar förståelse för relationen mellan ett heltal och ett tal i bråkform. Det vanligaste felet jag fann var att eleverna har en bristfällig begreppsbild när det kommer till likhetstecknet. Eleven inser troligtvis inte att om alla termer och faktorer på båda sidor inte förändras lika mycket kommer likheten inte bevaras. Då eleverna försökte multiplicera båda sidor med tre för att omvandla talet i bråkform till ett heltal, glömmer eleverna att i denna process måste alla förändringar göras så att det fortfarande är en likhet. Om du vill multiplicera ena sidans termer med tre måste det även göras på andra sidan om likhetstecknet och dess termer.

Vidare ser vi att i kategori 4 som var *specifika aritmetiska kunskaper*, *vilka är en förutsättning för algebra* att det var 78% av eleverna i min studie respektive 80% i deras som visade på någon form av missuppfattning. Eleverna i deras studie svarade antingen 0 eller 18 och ingen elev gav svaret odefinierad. Det var nästan en identisk andel av eleverna som gav svaret 0 i båda studierna. Mitt resultat visade på 61% och deras på 60% av eleverna. När det kom till svaret 18 var det lite större skillnad, nämligen 9% respektive 15%. I min studie var det även elever som svarade 1 eller ∞. Vad som är grunden till detta var svårt att analysera då eleverna endast gav ett svar och inte motiverade sina svar. En anledning till detta kan bero på frågeformuleringen. Men jag tror att det är en brist i elevernas begreppsdefinition som kan ha sin grund i om division med noll har behandlats eller ej. Eleverna har inte har fått den tid som nödvändigtvis krävs för att skapa en korrekt begreppsbild utifrån den definition som presenterats. Anledningen till att eleven svarade ∞ kan bero på att hen tänker det som en innehållsdivision, det vill säga hur många gånger får 0 plats i 18 vilket då går oändligt många gånger.

Kategori 5 representerar *förståelse av de rationella talens struktur*. På den första uppgiften, där en del av en annan del skulle beräknas var den vanligaste missuppfattningen samma för båda studierna. Nämligen att eleverna inte insåg att resultatet borde varit en produkt av de båda talen i bråkform. Detta kan bero på att begreppsbilden är bristfällig, då eleverna har använt sig av den begreppsbild de konstruerat av heltalen där ordet *av* implicerar att talen ska divideras. För tal i bråkform betyder det istället att talen ska multipliceras. Detta problem kan uppstå om eleverna endast memorerat en procedur och kan då bli problematiskt eftersom det inte ger eleven en djup matematisk förståelse inför elevens kommande matematiska utmaningar.

När det kommer till andra uppgiften i denna kategori, där eleverna skulle storleksordna tre tal i bråkform visar deras studie att det vanligaste felet var att eleverna hade ordnat från största till minsta istället för tvärtom. Den enda elev som visade en missuppfattning i min studie hade svaret att alla bråk var lika stora, dock ingen motivering till varför. Denna typ av fel anser jag borde ge en kognitiv konfliktfaktor. Om eleven funderar lite så borde hen få en känsla av att alla bråk i uppgiften inte kan vara lika stora. Utifrån elevens svar är det troligt att hen kanske vet att vissa bråk är lika stora, exempelvis $\frac{2}{5}$ och $\frac{4}{10}$. Men det är uppenbarligen någonting i hens förståelse för tal i bråkform som saknas. Det fanns inga gemensamma missuppfattningar mellan studierna i denna uppgift. Men den missuppfattning som eleven i min studie hade tycker jag är väldigt intressant. Om hen nu tror att alla bråk är lika stora finns det brister i vad ett tal i bråkform är. Hen kommer troligen få problem längre fram i de senare kurserna i matematik. Det nya innehållet som de ska lära sig kommer troligen att ligga långt utanför elevens ZPD. Det kan leda till att det blir svårt att lära sig det nya innehållet, då hen ännu inte lärt sig det som ligger mellan det hen nu kan och det hen försöker lära sig.

Avslutningsvis har vi kategori 6 vilket berörde *beräkningsskicklighet* och från denna kategori valdes en uppgift från Brown och Quinns studie samt en från Mas studie. I uppgiften från Brown och Quinns studie visade eleverna över 40 olika sätt att lösa uppgiften och även 40 olika svar, varav de flesta svar orimliga. Dock klarade de flesta studenterna av att förenkla den första termen korrekt. Det var den andra termen som skapade mest problem för eleverna. Det var liknande resultat i min studie där de flesta eleverna lyckades att förenkla den första termen. Men när det kom till den andra var det många olika typer av lösningar som eleverna kom fram till, vilket genererade olika resultat. Jag tror att detta kan bero på att eleverna inte är vana att se denna typ av uppgift, då den kanske inte är en standarduppgift. Men jag anser att en elev som har en god förståelse för tal i bråkform och hur man kan göra beräkningar på dessa borde klara denna typ av uppgift relativt enkelt.

Den andra uppgiften, som innebar en division av ett tal i blandad form med ett annat tal i bråkform, fanns det en del olika typer av missuppfattningar. När eleverna skulle utföra en division där både täljare och nämnare var ett tal i bråkform verkar de inte fundera över om svaret är rimligt eller ej. När de ska dividera ett tal med ett tal som är mindre än ett, borde det resultera i ett större tal. Men många av eleverna får ett resultat som är samma eller mindre än vad täljaren var innan de utförde divisionen. Om eleverna skulle ha genomfört en rimlighetsbedömning av resultaten, borde en kognitiv konfliktfaktor uppkommit.

Sammanfattningsvis kan vi se att resultaten i denna studie var överlag bättre jämfört med Brown och Quinns studie. Det var endast på uppgift 5 där resultaten var relativt lika i andelen missuppfattningar mellan båda studierna. Vi kan då säga att de elever i den skolan där studien genomfördes uppvisade en mindre andel missuppfattningar än de amerikanska eleverna i Brown och Quinns studie. Det är svårt att dra några generella slutsatser om andra elever utanför den berörda skolan, men det är positivt att de svenska eleverna som deltog presterade generellt bättre på alla uppgifter gentemot de amerikanska.

6.2.2 Övergeneralisering

Vi kan se att övergeneralisering var ett vanligt misstag eleverna gjorde på ett flertal uppgifter. Det är troligen kopplat till att eleverna inte har en välutvecklad begreppsbild. De tänker att det är samma regler som gäller vid addition och multiplikation. Exempel på detta är följande elevlösningar: $\frac{5}{12}+\frac{3}{8}=\frac{5\cdot 3}{12\cdot 8}=\frac{15}{96}$ och $\frac{6}{7}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{7}{4}=\frac{6+2+7}{7+3+4}=\frac{15}{14}$. Båda är bra exempel där eleverna försöker applicera en algoritm som inte gäller för det räknesättet. Jag tror att elevens begreppsdefinition har tillkommit genom ytinlärning, vilket har lett till en vag begreppsbild. Hen vet inte att det gäller olika algebraiska regler när det kommer till att multiplicera och addera bråktal. Palm (2008) föreslår ett alternativ för att få bukt på detta problem genom att ge eleverna ett motexempel. De kan förhoppningsvis se begränsningarna som finns hos de olika metoderna. Jag skulle använda mig av exempelvis $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{1+1}{2}=\frac{2}{2}=1$, $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1+1}{2+2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$, och $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{1+1}{2+2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$. Sedan skulle jag be eleverna förklara vilken av följande lösningar som är korrekt och varför. Avsikten är att eleverna ska bygga en korrekt begreppsbild när de själva måste fundera på vad som är rätt och varför. Om de vid senare tillfälle ska lösa en liknande uppgift och de kanske glömt hur man gör och löser uppgiften felaktigt, ska det skapa en kognitiv konflikt och en känsla att, är detta verkligen rätt?

6.2.3 Likhetstecknet

De missuppfattningar som Hall (2002) beskriver stämmer väldigt bra överens med de missuppfattningar som jag fann i min studie. Eleverna i min studie saknar en förståelse för vad likhetstecknet innebar, då de inte insåg att om de ska förändra ena sidan måste den andra förändras på samma sätt. Det ska efter förändringen fortfarande vara en likhet. Vi kan då se att elevernas begreppsdefinition inte är korrekt, då eleverna inte verkar förstå vad ett likhetstecken betyder. Många elever har troligen någon gång hört av en lärare att samma sak måste göras på båda sidorna, vilket då blivit en del av deras begreppsbild. De saknar kunskapen att när de exempelvis ska multiplicera båda sidor med ett tal måste detta ske för alla termer på båda sidor. I min studie multiplicerade några elever endast en term på ena sidan fast det fanns fler på båda sidor. En del elever gjorde följande lösning på uppgift 4: $x + \frac{1}{3} = 7$ blir till $x + 1 = 21$ som då ger att $x = 20$. Detta är ett tydligt exempel där eleverna inte inser sitt fel, men som Greeno (1982) påpekar kontrollerar inte eleverna sin beräkning genom att stoppa in det värde de fick fram i den ekvation de började med. Om de gjort detta hade de högst troligt insett att, om de adderar 20 med $\frac{1}{3}$ kommer det aldrig kunna bli 7.

6.2.4 Bråk i vardagen

Om vi ser på uppgift 3 och 9 i denna studie handlar dessa om tal i bråkform fast skrivna i blandad form. McIntosh (2008) menar att den vardagliga användningen av tal i bråkform handlar ofta om halvor eller fjärdedelar och att eleverna ofta inte ges den tid som krävs för att kunna skapa en god och korrekt förståelse för dessa typer av tal. Gabriel et al (2013) påpekar att även om användningen av tal i bråkform inte har en väsentlig roll, är det fortfarande en del av våra liv. Tal i blandad form förekommer exempelvis i bakning. Om dessa tal nu är en del av vardagen och finns i vår närmiljö kan det vara bra att när man ska lära ut om dessa tal göra kopplingar till verkliga situationer som eleverna kan relatera till. Det kommer då troligen skapa en känsla hos eleverna att detta faktiskt kan vara användbart utanför klassrummet.

Det var väldigt många elever som hade svårt med just uppgift 9 när de skulle dividera ett tal i blandad form med ett tal i bråkform. Det kan vara så att den kontext som uppgiften är placerad i gör att eleverna har svårt att slutföra den på ett korrekt sätt. För att underlätta hade vi istället kunnat omformulera den till att bli mer lik en situation som hen skulle stöta på i hemmet. Med formuleringen ”Om du har $\mathbf{1}\frac{3}{4}$ liter mjöl och det går åt $\frac{1}{2}$ liter mjöl till varje kaka, hur många kakor kan då bakas?” tror jag betydligt fler elever skulle ha löst uppgiften. Svaren på de båda uppgifterna är samma och de löses med samma uppställning. Men med den senare kanske eleverna kan få en känsla för vad det rätta svaret ska vara och därmed inse om de kanske gjort fel under uträkningen.

6.3 Svar på frågeställningarna

Nedan kommer frågeställningarna att besvaras utifrån studiens resultat. Även vad jag som lärare behöver tänka på och arbeta med för att minimera eventuella missuppfattningar eller brister i elevernas begreppsbild.

6.3.1 Vilka är elevers vanligaste missuppfattningar vid beräkning med tal i bråkform

Om vi ser till de resultat som studien visade var den vanligaste missuppfattningen att eleverna övergeneraliserade uppgifterna. Det leder till att de försöker applicera en metod eller algoritm som inte är applicerbar i sammanhanget, vilket var vanligast förekommande vid addition och multiplikation. Uppgifterna i studien med anknytning till vardagen resulterade i få missuppfattningar.

Det är viktigt att vi som lärare försöker nå ut till våra elever och motverka missuppfattningarna genom att skapa ett klassrumsklimat som uppmanar till diskussion. Om vi som lärare skapar uppgifter som frammanar diskussioner kan det möjliggöra att elevernas eventuella missuppfattningar blir synliga samt att vi då kan arbeta för att motverka dessa.

6.3.2 Vilka brister finns det i elevers begreppsbild/definition om tal i bråkform

Vad min studie visar på är att eleverna ofta när de löser de olika uppgifterna inte har en fullständig begreppsbild eller en korrekt begreppsdefinition. Detta leder till att eleverna istället försöker använda delar av en annan relaterad begreppsbild. Om de ska addera tal i bråkfrom men deras begreppsbild rörande detta inte är fullständig försöker de istället använda sin begreppsbild för hur man adderar heltal, vilket leder till att det blir fel. Liknande problematik kan även ses när eleverna försöker lösa uppgifter som innehåller ord som har olika betydelse i begreppsbilderna för heltalen och tal i bråkform, exempelvis *av*.

Det är viktigt att vi som lärare alltid försöker ge våra elever en korrekt matematisk definition på de olika begrepp som vi försöker lära ut så att det inte skapar felaktigheter i deras begreppsbild. För att detta inte ska ske bör vi kontinuerligt arbeta med att låta eleverna vara delaktiga i undervisningen genom att ställa frågor. Läraren kan då genom de svar eleverna ger förhoppningsvis ställa frågor så att eventuella potentiella konflikfaktorer i elevernas begreppsbild frammanas.

6.4 Didaktiska konsekvenser

Under utbildningen, men främst under de VFU-perioder vi har haft, inser jag hur viktigt det är för eleverna att kunna hantera tal i bråkform på ett korrekt sätt. Om man ser till matematik 1 kurserna där man går igenom eller repeterar tal i bråkform görs det ofta endast i det kapitlet och i den delen. Sedan anses det vara klart och man går vidare till nästa del av innehållet. Vi behöver som lärare på ett bättre och tydligare sätt integrera delarna av matematiken, så det inte blir separata delar som eleverna ska lära sig. Jag tror att detta beror på att just tal i bråkform inte har en explicit och tydlig plats i kursplanen. Om detta är fallet eller ej är svårt att svara på utan att göra en studie på det. Men min åsikt är att de flesta lärare har sin genomgång och sedan visar eleverna en metod eller formel som de kan applicera på uppgifterna. Därefter får de räkna i boken och detta är väldigt likt oavsett innehåll.

Det här leder inte nödvändigtvis till att eleverna lär sig varför de ska använda just den formeln eller metoden. Det är detta jag tror vi måste få tillbaka till matematikundervisningen igen. Vi måste ställa eleverna de jobbiga frågorna; varför gjorde du just så? Varför är det rätt svar? Det tror jag skulle leda till att eleverna måste börja tänka och fundera på just frågan *varför*. Om de måste motivera varför de gör en sak istället för att bara applicera en formel, kommer det leda till ett bättre lärande. Jag anser det minst lika viktigt att vi skapar ett bra klassrumsklimat där eleverna vågar ställa frågor när de inte förstår. Det är inte alltid som vi lärare ser när våra elever inte förstår. Det är då essentiellt att de ställer frågor och att man berättar för dem att om du inte förstår är det mycket troligt att det finns några andra här inne som inte heller förstår. Det kan komma väldigt varierande frågor, vilket kräver att jag är väl förberedd så att jag kan svara på elevernas frågor på ett bra och tydligt sätt. Detta underlättas av att jag som lärare innan lektionen funderat på möjliga frågor eleverna kan komma att ställa.

Om våra elever halkar efter och vi på grund av tidspressen att få med allt innehåll i kursen går vidare, kommer det inte leda till lärande eftersom det innehåll vi då går igenom kommer ligga utanför elevernas ZPD. Lärarens dilemma blir då; ska vi gå vidare i kursen för att kunna täcka allt det centrala innehållet eller ska vi repetera det som eleverna inte kan och som krävs för att komma vidare i kursen och då kanske riskera att inte få med allt innehåll.

Jag tror att det är viktigt att du som lärare tänker på Vygotskijs modell och att i alla undervissituationer försöker att applicera ZPD genom att du alltid försöker utmana eleverna med lite svårare uppgifter så att de kan utveckla sin matematiska förmåga. Vi måste gå ifrån de standarduppgifter som ofta finns i matematikböckerna, särskilt när det kommer till tal i bråkform. Där vet vi att många elever har svårigheter. Vi behöver då som lärare låta eleverna inte bara lösa rutinuppgifter utan även uppgifter som kräver att de måste fundera, diskutera, motivera och se rimligheten i sina lösningar. Det tror jag kommer leda till att vi kan börja få en förbättring i hur elever presterar rörande tal i bråkform. Vidare gäller detta all matematik men är särskilt viktigt i de områden där missuppfattningar är vanliga.

De flesta elever jag undervisat hittills har tyckt det varit lite svårt när de börjar arbeta med uppgifter enligt Vygotskijs modell. Men när de sedan ska skriva provet och de inser att de kan lösa eller göra en början till en lösning på alla uppgifter tycker de det var värt mödan att genomföra de lite svårare uppgifterna. Om eleverna inte har förståelse för bråkbegreppet och sedan ska försöka lära sig exempelvis andragradsekvationer eller kombinatorik, kommer då troligen detta ligga utanför vad de kan lära sig (deras ZPD). På de elever jag testat att ge dem lite mer utmanande uppgifter har det hittills fungerat väldigt bra även om det kan vara lite motstånd i början. Men med tiden börjar de inse att om de kan motivera hur de löser denna typ av uppgift kommer de ofta utan större problem kunna lösa liknande uppgifter. Medan om de bara lärt sig använda en formel eller metod och man sedan byter ut siffror eller ändrar om lite i uppgiften leder det ofta till att eleverna inte klarar att lösa den. Detta visar på att de inte lärt sig innehållet på ett korrekt sätt och är då även en brist i deras begreppsbild.

Vidare anser jag att om vi inte hanterar problemet med de bristande kunskaperna med tal i bråkform, då det är grunden för många andra delar inom matematiken, kan det leda till mycket större problem i framtiden. Jag anser därför att vi behöver agera kraftfullt och försöka få bukt med detta problem, genom att man inkluderar tal i bråkform tydligare i styrdokumenten. Det kan då leda till att fler lärare lägger större vikt vid att eleverna lär sig hantera tal i bråkform. Troligen kommer det att leda till en bättre och tydligare begreppsbild vilket även underlättar beräkningar inom andra områden så som algebra, ekvationer eller derivata.

6.5 Fortsatt forskning

Det skulle vara intressant och spännande att inte bara göra en enkätstudie på området utan även ta steget vidare och intervjua elever som genomför enkäten. Då har man möjligheten att kunna ställa frågor till eleven om deras lösningar efter genomförd enkät. Det skulle leda till en bättre analysfas och även mer reliabla resultat. Samtidigt som man även kan inkludera fler elever från olika skolor och inte enbart från Göteborgsområdet för att få en möjlighet att kunna dra mer generella slutsatser.

Det skulle även vara intressant och göra en variant av en learning study. Man filmar olika lärares lektioner där de går igenom tal i bråkform och analyserar hur de olika lärarna lär ut i relation till hur väl eleverna sedan lärt sig innehållet. Då kan man antingen intervjua eleverna eller göra en enkät. Därefter jämför man de olika elevgruppernas resultat på enkäten eller deras svar på intervjuerna. På så vis ser man vilka eventuella missuppfattningar eleverna uppvisar. Därefter kan man utifrån dessa resultat komma på ett bättre sätt att genomföra just genomgången av tal i bråkform. Vi vet att alla elevgrupper är olika och att samma lektion inte nödvändigtvis kommer att fungera i två olika grupper. Men då har man en grund att arbeta efter och bygga sin lektion utifrån det och då anpassa den till sin elevgrupp.

7 Referenslista

Barmark, M., & Djurfeldt, G. (2015). *Statistisk verktygslåda – att förstå och förändra världen med siffror*. Lund: Studentlitteratur AB

Brown, George, & Quinn, Robert J. (2006). Algebra students' difficulty with fractions: An error analysis. *Australian Mathematics Teacher, 62*(4), 28

Bryman, A., & Nilsson, B. (2011). *Samhällsvetenskapliga metoder* (2., [rev.] uppl. ed.). Malmö: Liber.

Bråk. (2017, 01 oktober). I Wikipedia. Hämtad 2018-03-29, från https://sv.wikipedia.org/wiki/Br%C3%A5k

De Morgan, A. (1910). *On the study and difficulties of mathematics (3rd ed.).* Chicago, IL: The open Court Publishing Company.

Hall, R. (2002). An Analysis of Errors Made in the Solution of Simple Linear Equations. *Philosophy of Mathematics Education Journal, 15.*

Gabriel, F., Coché, F., Szucs, D., Carette, V., Rey, B., & Content, A. (2013). *A componential view of children's difficulties in learning fractions*. Frontiers in psychology, 2013, Vol4, pp.715.

Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics, 12*, 317-326.

Kieran, C. (1984) A Comparison Between Novice and More-expert Algebra Students on Tasks Dealing with the Equivalence of Equations. In J.M. Moser (Ed.), *Proceedings of the Sixth Annual Meeting of PME-NA* (pages 83-91), Madison, University of Wisconsin.

Kieren, T. E. (1980). The rational number construct: Its elements and mechanisms. *Recent research on number learning*, 125-149.

Kiselman, C., & Mouwitz, L. (2008). *Matematiktermer för skolan*. Göteborg: Göteborgs universitet NCM. (Kiselman & Mouwitz, 2008)

Lamon, S. J. (1999). *Teaching fractions and ratios for understanding: Essential content knowledge and instructional strategies for teachers*. Routledge.

Lundgren, U., Säljö, R., & Liberg, C. (2012). *Lärande, skola, bildning* (Fjärde utgåvan, reviderad ed.). Stockholm: Natur & Kultur.

Löwing, M. (2017). *Grundläggande aritmetik: Matematikdidaktik för lärare* (2. uppl. ed.). Lund: Studentlitteratur.

Ma, L. (2010). *Knowing and teaching elementary mathematics teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States* (Anniversary ed., Studies in mathematical thinking and learning). New York: Routledge.

McIntosh, A. (2008). *Förstå och använda tal: en handbok*. Göteborg: Nationellt centrum för matematikundervisning (NCM), Göteborgs universitet.

Mullis, I. V., Dossey, J. A., Owen, E. H., & Phillips, G. W. (1991). The state of mathematics achievement: NAEP's 1990 assessment of the nation and the trial assessment of the states.

Palm, A. (2008). Missuppfattningar i algebra - Problem för läraren eller eleven? *Nämnaren*, (3), 38–42.

Rotman, J. W. (1991). Arithmetic: Prerequisite to Algebra?. Lansing, MI: Annual Convention of the American. Mathematical Association of Two-Year Colleges. (ERIC Document Reproduction Service No. ED 338 279).

Skolverket (2011a) *Ämne - Matematik.* Hämtad 2018-04-03, från: https://www.skolverket.se/laroplaner-amnen-och-kurser/grundskoleutbildning/grundskola/laroplan/subject.htm?tos=GR&subjectCode=GRGRMAT01

Skolverket (2011b) *Ämne - Matematik.* Hämtad 2018-04-03, från: http://www.skolverket.se/laroplaner-amnen-och-kurser/gymnasieutbildning/gymnasieskola/mat?tos=gy&subjectCode=mat&lang=sv

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics 12(2)*, 151-169.

Van Bommel, J. (2012). Att få de rätta felsvaren. *Nämnaren, 3*, 13–16.

Vetenskapsrådet. (2002) Forskningsetiska principer inom humanistisk-samhällsvetenskaplig forskning. Stockholm: Elanders Gotab.

8 Bilagor

8.1 Enkätundersökningen

Diagnos tal i bråkform Klass: _____

Glöm inte att visa hela din uträkning steg för steg.

1) Beräkna $\frac{5}{12} + \frac{3}{8}$
2) Beräkna $\frac{6}{7} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{4}$
3) Hälften av eleverna på en skola ska gå på en konsert. Eleverna kommer att ta fem bussar. Hur stor andel av eleverna på skolan kommer det att finnas på varje buss?
4) Lös ekvationen: $x + \frac{1}{3} = 7$
5) Vad är $\frac{18}{0}$?
6) Vad är $\frac{2}{3}$ av $\frac{3}{7}$
7) Ordna följande bråk i storleksordning, börja med det största. $\frac{4}{7}, \frac{5}{9}$ och $\frac{3}{5}$
8) Beräkna summan av $\frac{7+5}{3+5} + \frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{3}}$
9) Beräkna $\frac{\mathbf{1}\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}}$