Matematiska bevis

- Gymnasielärares tankar och uppfattningar

Sofia Magnusson

Ämneslärarprogrammet med
inriktning mot gymnasieskolan

Examensarbete:	15 hp
Kurs:	LGMA2A
Nivå:	Avancerad nivå
Termin/år:	VT 2018
Handledare:	Jan Stevens
Examinator:	Johan Wästlund
Kod:	VT18-3001-011-LGMA2A

Nyckelord: Bevis. Undervisning. Matematikdidaktik. Bevisföring. Skolverket. Nationella kursprov. Bedömning.

Abstract

The aim of this quantitative study is to investigate Swedish upper secondary school teachers' perception and thoughts concerning mathematical proofs. Four teachers working at the natural science and technology programmes were interviewed to shed light on the topic. The results showed that the teachers considered proofs to be appropriate educational content for students who intend to study mathematics or technical degrees at university, in line with earlier research. The teachers also considered the value of proof to be greater in relation to mathematics as a scientific subject rather than for their teaching and the mathematics in school. However, the explanatory and transfer functions of proof and proving were highly valued by the teachers. The contradiction of not valuing proofs as highly in education but still consider certain functions of proof important can be clarified by considering the teacher's dilemma and how the teachers perceive the Swedish National Agency for Education directions for the National Tests. The teachers' pay attentions to their pupils in their pedagogical choices and since not all student will pursue careers in mathematics or technology the result is that proofs play a diminished role in upper secondary school mathematics. Moreover, the teachers consider the instructions for assessment of the National Tests provided by the Swedish National Agency for Education to focus on certain cognitive levels of proof and proving. By considering these two factors we reach an understanding of how teachers perceive proof and what the effect are on the mathematic education at upper secondary school.

Förord

Jag vill börja med att tacka de medverkande lärarna som gjorde denna studie möjlig. Vidare till jag tacka min handledare Jan Stevens som har väglett mig under studiens gång. Slutligen vill jag rikta ett stort tack till min examinator Johan Wästlund och min opponent Kajsa Lidbom som i slutskedet av examensarbetet hjälpte mig att se arbetet ur nya synvinklar och tillföra nya perspektiv.

Sofia
Den 3 juni 2018

Innehållsförteckning

1 Inledning

I gymnasieskolans undervisning är matematik ett av de ämnen som är gymnasiegemensamt och det betyder att alla elever läser matematik. Det är också ett ämne som förekommer på många högskoleprogram. Emellertid visar studier att det finns ett kunskapsmässigt avstånd mellan undervisningen i matematik på gymnasiet och högskolan. Det problemet har relaterats till elevers erfarenheter med matematiska bevis och därigenom har många likheter upptäckts (Brandell, Hemmi & Thunberg, 2008).

Under mina högskolestudier har jag upplevt samma sak. Det tog lång tid att förstå varför undervisningen på högskolan ser ut som den gör och att förstå bevisens betydelse för matematiken. Men när jag väl fått en förståelse började jag ifrågasätta gymnasieskolans matematikundervisning. Är det rimligt att den matematikundervisning som svenska elever får i grund- och gymnasieskola inte ger en nyanserad bild av ämnet matematik? Varför är det inte mer fokus på bevis och dess betydelse inom matematiken? Det är frågor som jag ställer mig och söker svar på i den här uppsatsen.

I mitt första examensarbete som jag skrev tillsammans med Markus Davidsson undersökte vi forskning och teorier kring bevis och bevisens roller i matematiken och undervisningen. Vi undersökte ämnesplanen i matematik för gymnasieskolan och upptäckte att ordet bevis nästan inte förekommer och att det inte behandlas som ett innehåll som ska bearbetas i undervisning i en större utsträckning (Davidsson & Magnusson, 2016). Det förstärkte min bild av att det är ett stort glapp men gav mig inte några svar till varför det ser ut som det gör. Därför vill jag med den här studien närma mig ämnet från ett annat perspektiv.

I den här studien vill jag undersöka hur gymnasielärare i matematik ser på bevis och dess förekomst i undervisningen och styrdokumenten. Jag hoppas få en förståelse för hur glappet kan motiveras genom att få en förståelse för hur aktiva lärare tänker kring bevis och bevisföring.

2 Syfte

Syftet med den här studien är att undersöka hur lärare ser på matematiska bevis i förhållande till framförallt sitt yrke. Eftersom uppfattningar om bevisens roll inom matematik kan grundas i epistemologiska föreställningar är den första frågeställningen bred men de efterföljande riktar fokus mot min målgrupp och mitt framtida yrke. Förhoppningen är att det tillsammans med studiens teoretiska ramverk ska kunna ge en djupare förståelse för vad det är som påverkar lärare i sina didaktiska val.

- *Hur uppfattar lärare begreppet matematiska bevis?*
- *Hur tänker lärare kring bevisens roll, i allmänhet och i sin undervisning?*
- *Hur ser lärare på skolverkets styrning i förhållande till bevis?*

3 Bakgrund

I den här delen redogörs begreppet matematiska bevis ur olika perspektiv. Bevisen kommer först att presenteras ur ett historiskt och ett filosofiskt perspektiv för att sedan redogöra för hur bevis definieras idag. Slutligen tittar vi på hur bevisen behandlas i ämnesplanen för matematik med ett tillhörande exempel, Pythagoras sats, samt ett exempel från de nationella proven i matematik.

3.1 Bevis i en matematisk historisk kontext

Den logiska deduktiva bevisföringen uppkom i den euklidiska geometrin i det antika Grekland och har haft betydelse såväl för matematiken som för andra vetenskaper. Grabiner (2012) ger sin syn på varför det var just i Grekland som denna resonemangsförmåga uppkom och menar att svaret hittas i skillnaderna gentemot babylonierna och egyptierna som också gjorde stora framsteg inom matematiken. Grabiner (2012) pekar på andra delar av det grekiska samhället så som demokratin och menar att det har influerat de stora filosoferna och matematikerna under den här tiden och det ledde till att även argumentation och övertygelse inom matematiken fick en stor betydelse. Av de stora filosofiska skolor som verkade i Grekland lyfter Kline (1972) bland annat Aristoteles och Platons som bidragande till att utveckla matematiken.

Än idag har den euklidiska geometrin hög status inom matematiken och påverkar hur vi ser på bevis och bevisföring. Systemet som är uppbyggt av axiom, definitioner, härledningar av satser och logiska resonemang är fortsättningsvis den bästa modellen och den som används inom undervisningen vid högskolor och universitet (Hemmi, 2006).

Under 1800-talet kom många matematiker att rannsaka de brister som finns inom den euklidiska geometrin och då utvecklades olika filosofiska strömningar inom matematiken. Genom att titta lite närmare på inriktningarna kan vi få en förståelse för hur man kan se på bevisen och deras roll inom matematiken på olika sätt.

3.2 Matematikfilosofiska huvudriktningar

Historiskt sett har matematiska bevis haft en hög status inom matematiken. Men under 1800-talet och början av 1900-talet uppstod matematikfilosofiska inriktningar som ifrågasatte bevisen och därmed också matematikens värde. Det finns inom matematiken tre huvudsakliga filosofiska riktningar: *logicismen*, *intuitionismen* och *formalismen*. De skiftningar som inriktningarna speglar grundas i epistemologiska uppfattningar om matematikens roll och värde för mänskligheten. Det ger en bakgrund till framförallt de didaktiska teorier som uppfattar den traditionella definitionen av bevis som någonting problematiskt och det kommer vi att beskriva i avsnitt 3.3.

Enligt logicismen uppkom matematiken ur logiken och är följaktligen en gren inom logiken (Kline, 1972). Det var därför länge ett mål för grundarna att skapa ett system som visar hur matematiken grundade sig i logiken och det gjorde de genom att försöka bryta ner matematiken till de minsta byggstenarna. Systemet blev aldrig komplett men logicismens arbete och tankar kan ge oss nya perspektiv på den matematiska vetenskapen.

Intuitionismen är en radikal filosofisk riktning inom matematikfilosofin som menar att matematiken består av mentala scheman med ett intuitivt innehåll (Kline, 1972). Intutionisterna har utvecklat sin egen form av logik där exempelvis inga bevis innehållande en oändlig mängd accepteras då bevis endast tillåts ett ändligt antal steg (Hemmi, 2006). Denna filosofiska riktning har blivit mestadels förbisedd men har också varit en inspiration för utbildare och inom programmering.

Formalismen menar i motsats till logicismen att logiken uppkommit ur matematiken och de vill skapa ett solitt axiomatiserat system. Enligt formalismen ska man förstå matematiken som grunden till det formella systemet och de vill i likhet med den euklidiska geometrin konstruera ett system för hela matematiken (Kline, 1972). Konsekvens är ett ledord för att skapa ett system där allt kan bevisa inom systemets ramar. Gödels ofullständighetssats fastställde dock att det alltid kommer finnas satser och antagande som inte går att bevisa och därmed går det inte att skapa det system som formalisterna eftersträvar menar Benacerraf och Putnam (citerad i Hemmi, 2006).

De olika inriktningarna visar att både bevisen och matematikens plats och värde har problematiserats under de senaste århundradena. Men de filosofiska riktningarna har i praktiken påverkat matematiken onämnbart och har istället resulterat i att det existerande axiomatiska systemet förfinades och fick en mer formell form (Hemmi, 2006). Verksamma matematiker betänker inte dessa frågor i sin vardag utan ser objektiviteten som fastställd och adekvat (Hemmi, 2006).

3.3 Vad är matematiska bevis?

Matematikundervisningen vid högskolor och universitetet präglas av matematiska bevis och det finns studier som menar att studenter skapar en tydlig bild av vad bevis är (Cabassut, Conner, Isçimen, Furinghetti & Jahnke, 2012). Det finns dock ingen definition som delas av det matematiska samfundet. Men de definitioner som ändå existerar förmedlar en traditionell syn av ett formellt bevis (Weber, 2008). Förekomsten av olika sorters bevis råder det däremot inga delade meningar om och bevisens betydelse för matematiken är också en aspekt som den traditionella synen på bevis förmedlar (Rav, 1999).

Kiselman och Mouwitz (2008) presenterar en generell definition av bevis som ”övertygande argumentation för att ett matematiskt resultat skall accepteras” (Kiselman & Mouwitz, 2008, s. 129). Vidare beskrivs bevisens struktur på ett sätt som vi känner igen från Euklides geometri: Ett bevis härleder deduktivt en sats från satsens antagande och matematikens axiom. Trots den historiska kopplingen understryker Kiselman och Mouwitz (2008) att strukturen har varierat under åren. Kiselmans och Mouwitz (2008) definition ligger i linje med hur lärare har definierat bevis i tidigare forskning. I en intervjustudie av Knuth (2002) där 17 högstadie- och gymnasieskolelärare deltar beskriver majoriteten av informanterna ett bevis som ”ett logiskt eller deduktivt argument som demonstrerar sanningen i en påstående” (s.71).

Inom det matematiska samfundet finns det också en syn på matematiska bevis som ett resultat av en social konstruktion (Knuth, 2002). Det handlar då om att distansera sig från en traditionell syn på ett formellt bevis genom att framhäva den sociala process som det innebär att få ett matematiskt bevis accepterat. I den formella och traditionella synen på vad bevis är tänker sig forskarna att det ska finnas ett formellt system som nästintill mekaniserar strukturen av bevis på ett sådant sätt att det endas kan finnas ett korrekt utförande (Hanna, 1990 & Rav, 1999). Det lämnar inget utrymme för personliga och mänskliga omdömen (Hanna, 1990). Emellertid genomgår bevis många granskningar för att accepteras inom det matematiska samfundet och det beskrivs som den sociala processen. Det stöds av en undersökning av didaktikern Weber (2008) som visar att den sociala processen för att bedöma bevis påverkas bedömarnas epistemologiska uppfattningar. Det är därför många forskare formulerar alternativ till den traditionella synen som är mindre formella och ofta bär samlingsnamnet *informella bevis* (Rav, 1999; Dawson, 2006; Hanna, 1990). De alternativa begreppen och dess definitioner skiljer sig från varandra ”men har gemensamt att begreppen gör anspråk på att beskriva hur matematiska bevis är utformade i praktiken” (Davidsson & Magnusson, 2016) och de kulturella betingelser begreppet bär.

Den här studien grundar sin syn på bevis i Kiselman och Mouwitz (2008) definition och tar hänsyn till den sociala och kulturella aspekten av bevisföring. Därmed är synen på vad matematiska bevis är bred och inkluderar såväl formella bevis som härledningar av formler och informella bevis. Den synen delas av många forskare och matematiker (Hemmi, 2006) och som vi kommer se i nästkommande del understryker didaktikerna behovet av en accepterande definition för att bedriva forskning inom undervisning av bevisföring.

3.4 Matematiska bevis i svenska skolan

Det här avsnittet ger oss en bild av hur bevis behandlas av skolverket. Först tittar vi närmar på hur bevis behandlas i läroplanen och vilka bevis som nämns där för att få en förståelse för vilka bevis som gymnasieskolan behandlar. Därefter presenteras ett bevis av Pythagoras sats som förekommer i ämnesplanen för gymnasieskolan. Slutligen presenteras också en uppgift innehållande bevisföring från det nationella provet i matematik 4 med tillförande elevlösning.

3.4.1 Matematiska bevis i läroplanen

Davidsson och Magnusson (2016) undersöker hur läroplanen för gymnasieskolan behandlar bevis. Resultatet visar att ordet bevis endast förekommer i kurserna 1b, 1c, 3b, 3c, 4 och 5 men om man läser skolverkets kommentarer förstår man att det är en del av resonemangsförmågan. Dessutom finner Davidsson och Magnusson (2016) en motsättning i att eleverna ska förväntas genomföra bevis i matematik 3b och 3c men det är först i kurs 4 som bevis beskriv i det centrala innehållet som ett kunskapsområde.

Resonemangsförmågan är en av de sju förmågor som beskrivs som de kompetenser som ämnet ska se till att utveckla hos eleverna. Den beskrivs som förmågan att kunna ” följa, föra och bedöma matematiska resonemang” och ska genomsyra alla kurser (Skolverket, 2011a, s. 90). Davidsson och Magnusson (2016) menar att den formuleringen inte självklart anspelar till att elevers bevisföringsförmåga utvecklas men i skolverkets kommentarer står det att det är bevisföring den ser till att utveckla. De ställer sig frågande till varför formuleringen i styrverket skiljer sig från vad som står i kommentarerna.

Davidsson och Magnusson (2016) konstaterar också en motsättning i kursplanerna som de menar kan leda till förvirring. I kursplanen för matematik 3b, 3c, 4 och 5 står det i betygskriterierna att eleverna ska kunna genomföra bevis för att få betygen C, B och A. Det är dock oklart om eleverna ska undervisas i bevisföring om man ser till kursplanerna. Det är först i kurs 4 som bevisföring återfinns i det centrala innehållet som mer än ett enstaka bevis som ska behandlas i undervisningen. Det står i kursplanen till matematik 4 att undervisningen ska behandla olika sorters bevismetoder. Det kan alltså uppfattas som att eleverna ska kunna utföra bevis och bedömas i sin bevisförmåga innan det har behandlats i undervisningen.

Davidsson och Magnussons (2016) slutsatser är att kursplanen ger en otydlig bild av matematiska bevis och att det finns många aspekter som kan ifrågasättas och behöver konkretiseras. Otydligheten skapar ett tolkningsutrymme som gör att undervisningen följaktligen kan skilja sig åt då lärare kan göra olika tolkningar av styrdokumenten.

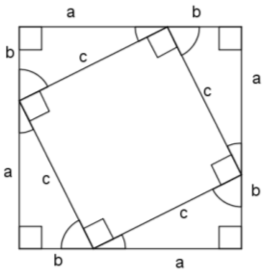
För att skapa en förståelse för vilka bevis som förekommer i ämnesplanen kommer nu de delar i centralt innehåll som behandlar bevis nu presenteras. Det gör att vi kan få en förståelse för hur bevisföringen i undervisningen ser ut och de bevis som gymnasielärarna undervisar i. För matematik 1b och 1c står det att undervisningen ska innehålla ”Illustration av begreppen definition, sats och bevis, till exempel med Pythagoras sats och triangelns vinkelsumma” (Skolverket, 2011b, s. 6 & 9). I kurs 2b och 2c ska eleverna lära sig att använda grundläggande satser inom geometri. Vidare ska undervisningen härleda och ge eleverna möjlighet att använda deriveringsregler för potens- och exponentialfunktioner i matematik 3b och 3c. Dessutom ska undervisningen i 3c innehålla bevis och användning av cosinus-, sinus- och areasatsen. Det är först i den fjärde kursen som kursplanerna behandlar bevis som mer än specifika exempel då det står att undervisningen ska inkludera olika bevismetoder inom matematiken. I matematik 4 ska eleverna också möta faktorsatsen och lära sig att hantera trigonometriska och logaritmetiska uttryck och formler. Den femte kursen i matematik ska behandla konkreta exempel av induktionsbevis (Skolverket, 2011b).

3.4.2 Ett bevis av Pythagoras sats

I det här avsnittet kommer ett bevis för Pythagoras sats att presenteras. Pythagoras sats nämns som ett exempel på bevis som eleverna ska möta i matematik 1b och 1c (Skolverket, 2011b). Det är ett bevis som förekommer i läromedlen i matematik för åk 9 så eleverna redan i grundskolan en förförståelse för satsen. I gymnasieskolan läggs fokus på att eleven ska förstå vad ett bevis är och dess struktur. Det beviset som presenteras nedan är ett populärt bevis som ofta förekommer i gymnasieundervisningen.

Pythagoras sats: för varje rätvinklig triangel råder sambandet $a^2+b^2=c^2$, där a och b är längderna på kateterna och c är längden på hypotenusan.

Bevis: Betrakta figuren nedan.



Figur 1: Illustration av Pythagoras sats.

Arean för den stora omgivande kvadraten är A=(a+b)(a+b).

Arean för en av trianglarna kan uttryckas som $\frac{1}{2}ab$.

Arean för den kvadraten A kan vi också skiva som

$$A = 4 * \frac{1}{2}ab + c^2 = 2ab + c^2.$$

De båda uttrycken för kvadraten A kan då skrivas som likheten

$$(a + b)^2 = 2ab + c^2.$$

Slutligen kan likheten skrivas om på följande sätt:

$$a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = c^2.$$

Således har vi bevisat det samband som beskrivs i Pythagoras sats.

3.4.3 Ett bevis från de nationella proven

I det här avsnittet presenteras en uppgift innehållande bevisföring med medföljande elevlösning från det nationella kursprovet i matematik 4 (Skolverket, 2013). I bedömningsanvisningarna går det att utläsa att uppgiften ger 2 stycken C-poäng och det är resonemangs- och kommunikationsförmågan som testas. Elevlösningen bedöms enligt skolverket som en fullständig lösning varvid den ger full utdelning av poängen.

Uppgift: 9b) Visa att $\sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = cosx - sinx$

Elevlösning:

$$\sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = cosx - sinx$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \cos\frac{\pi}{4} = sin\frac{\pi}{4}$$

$$V.L. = \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}{\frac{1}{\sqrt{2}}} =$$

$$= \frac{cosx * cos\frac{\pi}{4} - sinx * sin\frac{\pi}{4}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = cosx - sinx = H.L.$$

(Skolverket, 2013)

4 Teoretiskt ramverk

I den här delen kommer ett urval av didaktiska teorier kring bevis presenteras. Eftersom de ingår i olika didaktiska paradigm kommer dessa kortfattat behandlas. Inom konstruktivismen presenteras Balacheffs (1988) teori gällande olika kognitiva nivåer av bevisföring. Därefter behandlas bevisen roller inom ett sociokulturellt paradigm då Bells (1976) teori kring bevisens roller utvecklas och nyanseras av de Villiers (1990), Knuth (2002), Hanna (2000), Hemmi (2006) och Hemmi, Lepik och Viholainens (2010).

4.1 Konstruktivismen och kognitiva nivåer

Under de senaste årtiondena har konstruktivismen haft en stor betydelse för matematikdidaktiken (Skott, Jess, Hansen & Lundin, 2010, s.55ff). Konstruktivismen ser lärandet som tillägnande av kunskaper och färdigheter. Det handlar om att eleven ska förstå innehållet och tillägna sig procedurer. Skott et al. skriver att ” [d]et kan tyckas självklart att eleverna ska lära sig matematik med förståelse, men det är inte lika självklart vad som ska till för att de ska göra det” (2010, s.57). Inom konstruktivisten försöker man beskriva hur inlärning inom olika ämnen och områden går till, där utvecklingen ofta beskrivs i form av olika steg. När det kommer till forskningen inom bevisföring finns det flera forskare som har undersökt elevers olika nivåer av bevisföring (Bell, 1976; Recio & Godino, 2001; Miyazaki, 2000) och nedan presenteras matematikdidaktikern Nicholas Balacheffs teori.

Balacheff gjorde år 1988 en studie för att försöka förstå vilken bild elever har av matematiska bevis. Balacheff beskriver elevernas försök till att konstruera bevis i fyra olika kognitiva nivåer: *naiv empirism, det kritiska experimentet, det generiska experimentet och tankeexperimentet*. De krav som eleverna ställer på sina bevis skiljer nivåerna åt och framtydande är att generaliteten blir ett tydligare krav i de högre nivåerna (Balacheff, 1988).

Inom den första kognitiva nivån naiv empirism drar eleverna slutsatser genom att testa ett fåtal specifika fall och om ett motargument tillkommer skapar eleverna en ny regel för detta fall (Balacheff, 1988). På nivån det kritiska experimentet formulerar eleverna olika hypoteser som de sedan undersöker med olika fall och det innebär att eleverna har förstått att generella slutsatser måste dras för bevis. Vidare beskriver Balacheff (1988) det generiska experimentet där hypotesen härleds genom egenskaperna hos ett valt objekt och inte i kraft av hypotesen i sig utan av de objekt som den behandlar. Den högsta nivån tankeexperimentet kräver att eleverna bryter ner objekten i beståndsdelar och utnyttjar det matematiska språket i sina resonemang för att kritiskt reflektera kring sina slutsatser och antagandet.

Balacheffs (1988) teori beskriver de insikter och den förståelse som eleverna behöver ha för att nå den högsta nivån, vilken inte utesluter tillämpande av de tidigare. Men det står klart att det är en stegring som kräver mycket av eleverna. Balacheff (1988) beskriver hur det generiska exemplet och tankeexperimenten kräver att eleverna bygger sin argumentation med teori och logiska slutledningar och att det är krävande för eleverna att överge metoderna som används i de tidigare mer praktiskt motiverade stegen. Det visar de svårigheter elever kan ha när de ska utveckla sin förmåga att föra bevis.

4.2 Det sociokulturella perspektivet och bevisens roller

I det här avsnittet kommer först teorin kring bevisens roller att presenteras. Det är en teori som har fått stort genomslag inom didaktiken och kommit att ingå inom ett sociokulturellt paradigm. Därefter presenteras två studier av Knuth (2002) och Hemmi et al. (2010) som har undersökt lärares uppfattningar om bevisens roller.

4.2.1 De matematiska bevisens roller

Inom matematikdidaktiken har bevisen sedan länge undersökts och ett område som tillägnats mycket intresse är att undersöka vilken roll det matematiska beviset har. Många forskare har utgått från Bells (1976) lista av roller, däribland Hemmi (2006), Knuth (2002), de Villiers (1990) och Hanna (2000). Originallistan bestod av fem punkter som beskriver matematikens roller, nedan är en översättning från Knuths (2002) arbete:

- att *verifiera* sanningen i en sats,
- att *förklara* varför en sats är sann,
- att *systematisera* satser i ett axiomatiserat system,
- att *upptäcka* och skapa ny matematik och
- att *kommunicera* matematisk kunskap.

(Knuth, 2002)

Bells (1976) arbete var inriktat mot matematik och inte mot undervisning men dessa roller har med året blivit trendsättande inom matematikdidaktiken (Knuth, 2002; Hemmi 2006). Nedan presenteras dessa funktioner mer ingående och dessutom ett tillägg i form av att bevisen erbjuder *transfer* som Hemmi (2006) har adderat till den ursprungliga litsan.

Det två förstnämnda rollerna verifikation och förklaring är för många självklara. Verifikation är enligt de Villiers (1990) det som anses vara bevisens huvudsakliga roll, inte minst bland matematiklärare. Det handlar om att en deduktiv argumentation bevisar sanningen i ett påstående. Det är ofta den roll som matematikstuderande möter då de i undervisningen ofta fokuserar på bevis som redan har blivit bevisade och det kan få studenter att tro att det är bevisens enda roll (Knuth, 2002). Även då den verifierande rollen kan framstå som den viktigaste menar de Villiers (1990) och Hanna (2000) att den förklarande funktionen hos bevis kan ha en större påverkan på individen som ofta söker en förklaring till varför en sats är sann. Det handlar då om en individuell upplevelse om att förstå ett bevis (Hemmi et al., 2010). Ofta kan denna roll upplevas som svår för studenter att upptäcka de kämpar med att förstå strukturen av bevisföring (Knuth, 2002).

Systematiseringen av matematiken kan av många anses vara en mindre självklar roll men de Villiers (1990) menar att det är en fundamental viktig roll för att nå en samstämmighet och sammanhang inom matematiken. Systematiseringen av satser i det axiomatiserade systemet bidrar till att skapa stringens. Det bidrar till att uppräcka brister i slutledningar (Hemmi, 2006). Knuth (2002) menar att elever inte ser den här rollen då de ser bevis som oberoende av varandra.

Bevisen uppfyller dessutom en roll att generera nya upptäckter och nya metoder och sätt att använda matematiken. Det kan handla om att man arbetar med satser som ännu inte är bevisade och bevisar dessa. Det kan också handla om att upptäcka nya metoder i sökandet efter nya bevis eller i undersökandet av redan bevisade satser. Därigenom görs nya oväntade upptäckter som gör att vi hittas nya metoder och sätt att använda och förstå matematiken.

Den sista punkten på Bells (1976) lista behandlar den kommunikativa rollen som bevis har. Det kan handla om att kommunicera matematiskt innehåll och då blir bevisen en kunskapsbärare (Knuth, 2002). Det kan också handla om en kritisk debatt inom samfundet där matematiker har olika åsikter om varandras resultat (Hemmi et al., 2010). Bevisen och bevisföringens kommunicerande roll skapar på det sättet möjligheter att föra kunskapen vidare och möjliggör kommunikation över hela världen.

Slutligen kommer nu Hemmis (2006) tillägg till listan att presenteras. Hon menar att bevisen har en transfererande roll som möjliggör att kunskaper som man förvärvar inom bevisföringen kan användas både inom andra områden i matematiken såväl som utanför matematiken. Hemmi framhäver framförallt att det logiska tänkandet övas inom bevisföring och det kan sedan appliceras i andra sammanhang. Exempelvis kan det logiska tänkandet appliceras inom problemlösning och bidra till att utveckla resonemangsförmågan. Det kan hjälpa elever i såväl matematiken som i vardagliga situationer. Hemmi (2006) understryker det faktum att hennes tillägg verkar inom det sociokulturella perspektivet då hon ser på bevisen som en artefakt. Med det menar Hemmi att bevisen är kulturellt betingande och beroende och att vi måste se på dem som ett resultat av sin tid och sitt sammanhang. Enligt den sociokulturella teorin ser man på förvärvet av förmågor som kulturella konstruktioner (Säljö, 2010). Därmed ser vi hur bevisen har engagerat forskare inom olika paradigm och följt trenderna inom den didaktiska forskningen.

4.2.2 Tidigare forskning på bevisens roller

I det här avsnittet kommer resultatet från två studier presenteras. Knuth (2002) undersöker hur amerikanska högstadie- och gymnasieskolelärare ser på bevisen och dess roller. Hemmi et al. (2010) jämför lärare från Sverige, Estland och Finland och hur de ser på bevis och bevisföring.

Knuths (2002) studie visar resultat både i förhållande till bevisens roller men också andra observationer. För bevisens roller menar han att lärarna tänker att den viktigaste rollen bevis har är att utveckla elevernas förmåga att tänka logiskt. Dessutom tycker lärarna att elevernas kommunikativa förmåga kan utvecklas så att de kan förmedla sin tankegång och bli bättre på att argumentera för sin åsikt. Knuths studie visar att lärarna inte tänker på den förklarande rollen som bevis har i förhållande till sin undervisning och det ser han som överraskande men menar att det kan vara för att lärarna fokuserade mycket på sina egna erfarenheter av bevis och bevisföring. Vidare menar Knuth (2002) att det finns en allmän uppfattning om att bevis passar de elever som ska studera matematik på högskola och universitet. Lärarna delade också in bevis i formella, mindre formella och informella bevis för att klargöra vad de pratade om. Med den indelningen menade de också att de formella bevisen inte är för högstadie- och gymnasieskolan medan de informella bevisen lämpar sig bra för skolmatematiken.

Vad gäller bevisens roller finner Hemmi et al. (2010) att lärarna värderar den förklarande funktionen högt eftersom den kan tillföra mycket till undervisningen. Resultatet visar också att lärarna ser bevisens transfererande roll som viktig då den bidrar till att utveckla elevernas logiska tänkande och resonemangsförmåga. En slutsats som Hemmi et al. (2010) kommer fram till är att lärare anpassar sin undervisning och hur den behandlar bevis efter sina studenter och vilka kurser de undervisar i. Resultatet visar exempelvis att svenska lärare återkommande uppger att matematiska bevis lämpar sig för elever som studerar naturvetenskapsprogrammet.

5 Metod

Följande del redogör först för undersökningens metod, urval, genomförande och analys. Därefter behandlas de forskningsetiska principerna och hur studien förhållit sig till dessa. Slutligen beskrivs studiens övervägande gällande reliabilitet och validitet.

5.1 Metodbeskrivning

Den metod som har använts är semistrukturerad intervju. Det är en kvalitativ forskningsmetod som gör det möjligt att undersöka hur lärare tänker kring matematiska bevis och sin undervisning. Kvale och Brinkmann (2014) beskriver den kvalitativa intervjun som en möjlighet att undersöka den intervjuades livsvärld. Det är ett sätt att fördomsfritt försöka samla information och beskriva den intervjuades vardagsliv. Vidare beskrivs den semistrukturerade intervjun som en specifik halvstrukturerad teknik som ”varken är ett öppet vardagssamtal eller ett slutet frågeformulär” (Kvale och Brinkmann, 2014, p.45). Det innebär att intervjun är strukturerad utefter olika teman som den ska behandla men inom dessa lämnas frihet både åt respondenten och forskaren. Respondenten kan själv styra samtalet såsom forskaren som kan ställa följdfrågor eller be respondenten att utveckla uttalanden.

De olika teman som intervjun ska innefatta ska vid en semistrukturerad intervju sammanställas i en intervjuguide. Intervjuguiden innehåller antingen frågor eller ganska specificerade områden som ska behandlas under intervjun (Bryman, 2016). I den intervjuguide (se bilaga 2) som används i den här studien har frågorna utformats utefter fyra områden. Den första delen innehåller frågor om respondentens utbildning, bakgrund och erfarenheter. Sedan finns ett område där respondenten själv får svara på vad den förknippar matematiska bevis med. Därefter tillkommer frågor om respondentens undervisning av matematiska bevis. Slutligen avslutas intervjuguiden med en fråga kring hur respondenten anser att styrdokumenten behandlar matematiska bevis. Frågorna har baserats på Hemmis et al. (2010) enkätundersökning angående gymnasielärares uppfattningar om bevis och bevisföring och kompletteras med ett par följdfrågor.

5.2 Urval

Ett missivbrev (se bilaga 1) skickades ut till lärare på naturvetenskapsprogrammet och teknikprogrammet. Valet av att endast skicka ut brevet till lärare på dessa program grundar sig dels i tidigare opublicerad forskning av Knuth och Reuterswärd som återges av Hemmi et al. (2010) och visar att det finns en uppfattning bland svenska lärare att bevis lämpar sig för elever som studerar på det naturvetenskapsprogrammet och dels på Davidsson och Magnussons (2016) undersökningar som visar att det är i Ma 3b, 3c, 4 och 5 som främst behandlar bevis i kursplanerna.

Missivbrevet skickades ut till 26 lärare på tre skolor i Västra Götaland. Av de förfrågade var det fyra som valde att delta. Lärarna ges fiktiva namn.

5.3 Genomförande

I den här studien genomfördes intervjuer med de fyra lärare som visade intresse. Deltagarna informerades om frivillighet och anonymitet före intervjuerna och gav sitt godkännande till att intervjuerna spelades in. Intervjuerna genomfördes på respektive lärares skola i ett grupprum för avskildhet. Intervjuerna följde de anvisningar som finns för semistrukturerade intervjuer och alla frågorna ställdes till samtliga lärare. Längden på intervjuerna varierade från 20 till 45 minuter.

Det inspelade materialet från varje intervju transkriberades för att senare bearbetas och analyseras. Transkriptionen skedde direkt efter intervjun eller följande dag. I transkriptionen uteslöts tveksamheter från informanten, paralingvistiska aspekter samt till viss del upprepande interjektioner. För att det inte skulle förändra den semantiska meningen har intervjuerna genomlyssnats vid flertalet tillfällen under undersökningen.

5.4 Analys och bearbetning av material

Efter transkriptionen genomfördes en analys som följer den fenomenografiska analysmodell som Dahlgren och Johansson (2015) beskriver i sju steg: *att bekanta sig med materialet, kondensation, jämförelse, gruppering, artikulera kategorierna, namnge kategorierna* och slutligen *kontrastiv fas*. Den första fasen att bekanta sig med materialet innebär för denna undersökning att det transkriberade materialet lästes igenom flertalet gånger för att skapa en uppfattning om innehållet. I fasen kondensation undersöks materialet på nytt och passager och uttalanden som är signifikanta uppmärksammas och markeras med syftet att ge en kort men representativ bild av det avsedda fenomenet. Därefter påbörjas en jämförelse mellan utdragen och informanterna emellan för att upptäcka likheter och skillnader inom materialet vartefter de grupperas efter hur de kan relateras till varandra. I steg fem artikulerar kategorierna som får ett namn i den sjätte fasen. Den sista kontrastiva fasen innebär ofta att kategorierna kondenseras till ett färre antal då man jämför kategorierna för att se om de ryms inom fler än en kategori.

I den här studien har kategorierna formats utifrån ett försök att hitta nya fenomen men också redan beskrivna fenomen i form av bevisens roller, se avsnitt 4.2.1. Det gör att de fenomen som är särskilda för denna studie är *bevisens värde, bevisens struktur, specifika exempel av bevis, de nationella proven och betygsnivåer i bevisföring* och *kritik mot skolverkets styrning*. De fenomen som redan finns beskrivna är bevisens roll att *verifiera, förklara systematisera, upptäcka, kommunicera och transfer*.

5.5 Forskningsetik

Vetenskapsrådets forskningsetiska principer har följts i den här studien. Nedan beskrivs kortfattat hur studien har förhållit sig till de fyra huvudkraven: informationskravet, samtyckeskravet, konfidentialitetskravet och nyttjandekravet. För att understryka vikten av att de forskningsetiska principerna följs menar Kvale och Brinkmann (2014) att om etiken komprometteras bör forskningen inte genomföras. Det har tagits i åtanke genomgående i studiens olika delar.

Inom ramarna för etisk forskning finns det ett informationskrav som beskriver att och hur forskaren skall informera de berörda om forskningens syfte. Deltagarna skall informeras om deras uppgift i projektet och att deltagandet är frivilligt och kan avbrytas. Därtill skall deltagarna informeras om alla aspekter i forskningen som kan tänkas påverka deras beslut att delta (Vetenskapsrådet, 2002). För att följa informationskravet informerade jag deltagarna om dessa aspekter vid tre tillfällen: en första gång i missivbrevet, en andra gång när vi talades vid för att bestämma tidpunkt för intervjun och en tredje gång precis innan intervjun inleddes.

Vad gäller samtyckeskravet ser det till att beskriva hur deltagarna själva har rätt att besluta om sin medverkan i forskningen. Vetenskapsrådet (2002) framhåller att samtycke skall inhämtas från deltagaren. Likt informationskravet tillfrågades deltagarna om samtycke vid tre tillfällen: i missivbrevet, vid telefonkontakt och inför intervjun.

Konfidentialitetskravet behandlar frågor om känsliga uppgifter och anonymitet. Inom ramen för denna studie är det främst frågan om anonymitet som är aktuell. Vetenskapsrådet menar att uppgifter som kan identifiera deltagarna skall hanteras så att det är praktiskt omöjligt att komma åt informationen. För att följa denna princip ges deltagarna fiktiva namn och information om arbetsplats, erfarenheter och utbildning inkluderas endast i studien om det bedöms vara av stor vikt för att beskriva resultatet.

Nyttjandekravet ser till att beskriva hur den data som insamlas ska användas. I enlighet med de forskningsetiska principerna (Vetenskapsrådet, 2002) skall det insamlade materialet endast användas i forskningens syfte och får varken säljas, lånas ut eller användas i andra syften. För att följa detta krav informerades deltagarna om hur materialet behandlades under studiens genomförande och att det kommer att raderas efter slutställande av resultat.

5.6 Reliabilitet och validitet

Reliabiliteten i en studie behandlar tillförlitligheten och huruvida resultatet kan reproduceras (Kvale och Brinkmann, 2014). För att öka tillförlitligheten har jag i denna studie eftersträvat att ha ett varierat urval av deltagare. Informanterna arbetar på olika skolor i länet, de har olika utbildningsbakgrund och de har olika arbetslivserfarenheter samt har arbetat inom yrket olika länge.

Validiteten hos en studie bestäms av att den möter det den utger sig för att mäta (Kvale och Brinkmann, 2014,). I den här studien har jag arbetat med giltigheten genom att diskutera intervjuguiden med min handledare. Dessutom baserades en stor del av frågorna på enkätfrågorna i Hemmi et al. (2010) studie.

6 Resultat

I den här delen kommer först de deltagande lärarna att presenteras och därefter återges resultatet som är uppdelat i tre delar. Den första delen innefattar lärarnas allmänna beskrivningar av bevis och det värde de har för matematiken och undervisningen. Sedan följer en del som behandlar lärarnas tankar kring bevisens olika roller enligt Bells (1976) teori och Hemmis (2006) tillägg. Den avslutande delen innefattar lärarnas uppfattningar om skolverkets styrning och betygsnivåerna på det nationella provet.

De fyra intervjuade lärarna arbetar på antingen teknik- eller naturvetenskapsprogrammet. De har olika utbildningar i grunden men alla innehar en lärarutbildning och lärarlegitimation. De har olika ämneskombinationer och de undervisar alla i matematik när studien genomfördes. Lärarna ges de fiktiva namnen Maria, Kim, Anders, och Magnus och har 4, 10, 20 och 36 års erfarenhet inom läraryrket.

6.1 Lärares tankar om vad matematiska bevis är

Under intervjuerna får lärarna frågor om vad de tänker på när de hör begreppet matematiska bevis och hur de karaktäriserar det. Det finns både likheter och skillnader i hur de besvarar frågorna. Samtliga de fyra lärarna resonerar i termer om bevisens roll i sin egen och/eller elevernas inlärning. Dessutom resonerar också Maria och Magnus i termer om bevisens värde för matematiken.

Bevisens värde. Alla lärare ger uttryck för att bevisen är viktiga, men mindre viktiga i skolmatematiken. Både Maria och Anders tycker att bevisen är av stort värde för matematiken men är pragmatiska i sina resonemang när de säger att inte alla elever kommer bli matematiker och därför inte behöver djupa kunskaper i bevisföring.

> Om man pratar om undervisningssammanhang så känns det som att bevis handlar väldigt mycket om att lära sig resonera logiskt. Jag kan nog tycka att jag associerar bevis till lite olika saker om man tänker på matematik för matematikens egenvärde eller om det är matematik som undervisning. Jag tycker att det är väldigt viktigt med bevisen, även om jag kanske tycker att de på ett sätt har lite lägre vikt när det gäller undervisning (Maria).

Anders säger sig själv uppleva en skillnad mellan hur han ser på bevis och hur en kollega till honom ser på bevis och bevisföring. En möjlig förklaring till detta ser Anders i deras olika utbildningsbakgrund.

> Jag tror att det är en skillnad mellan en ren matematikutbildning och en teknisk matematikutbildning (Anders).

Bevisens struktur. Både Maria och Magnus beskriver i stort sett Kiselman och Mouwitz (2008) redogörelse av bevisens struktur.

> Man utgår ju ändå ifrån någon slags axiom i grunden, och sen bygger man vidare till satser och sen bygger man slutsatser från flera satser så kommer man vidare framåt (Maria).

> Vi jobbar då med axiom, satser, bevis och så vidare för att eleverna ska förstår hur matematiken är uppbyggd utifrån ett logiskt perspektiv (Magnus).

Kim pratar om det deduktiva systemet och hur bevisen kan hjälpa till att förmedla kunskap om logiska resonemang. Dessutom tycker hon att generalitet är karaktäriserande för matematiska bevis.

> Det är lite svårt att få just logik att fastna för de flesta eleverna (Kim).

> Det är just det här att visa att det gäller i det generella fallet som känner jag som karaktäriserar ett matematiskt bevis (Kim).

Specifika exempel av bevis. Under intervjuerna nämner lärarna olika bevis. De bevis som nämns är triangelns vinkelsumma, Pythagoras sats, randvinkelsatsen, medelpunktssatsen, areasatsen, yttervinkelsatsen, toptriangelsatsen. Dessutom pratar lärarna om bevis för aritmetiska summor, logaritmlagar, derivatans definition, trigonometriska satser och för udda och jämna tal inom talteori. Utöver det är implikation och ekvivalens återkommande inslag i intervjuerna och exempel på ett innehåll som lärarna undervisar. Lärarna uppger också att det är inom området geometri som de ser att bevisföring och bevis förekommer i deras undervisning.

6.2 Bevisens roll i matematiken och undervisningen

När det kommer till de matematiska bevisens roller går det att urskilja samtliga som beskrivs i avsnitt 4.2.1. Lärarna diskuterar dem främst i samband med undervisningen i sitt yrke men det finns kopplingar till deras utbildning och matematiken i allmänhet.

Verifikation. Det var tre av lärarna som uttryckte sig i termer om bevisens roll att övertyga. Maria, Kim och Magnus uttrycker sig på olika sätt men pratar alla om en sanning eller en allmängiltighet som inte kan ifrågasättas.

> Men om man håller på med matematik så vet man ju att det här är sant att det är på det sättet. Det finns ju en känsla av fullständighet i det man hållet på med, en kontroll i det man gör (Maria).

> Ett bevis ska visa att det är ett generellt, något generellt som alltid gäller (Kim).

> Till exempel det här är en definition och en definition kan du inte ifrågasätta (Magnus).

Förklaring. När det kommer till den förklarande roll som bevis har så indikerar alla lärare att de delar den uppfattningen. De uttrycker det på olika sätt men samtliga lärare menar att bevisens förklarande roll tillför mycket till undervisningen.

> Egentligen så är det ju så att alla bevis är viktiga i sig. Det är ju för förståelsen. Att man inte bara får en formel och sen vet man inte vart den kommer ifrån. Så det är väl mest det att man ska förstå, varifrån de olika formlerna man använder kommer ifrån (Anders).

> Det känns som att man får de här frågorna från eleverna ibland: varför gör vi det här? För att ge det svar som jag brukar ge till eleverna så är det helt enkelt för att lära dem att se samband med ett bevis och att det ska visa att det är ett generellt (Kim).

Magnus menar också att den förklarande rollen som bevis har är synonym med lärarrollen.

> Det är ju alltid så att i matematiken så försöker vi förklara varför är det så. Det är ju då bevisen kommer in för att kunna motivera att såhär ligger det till […] det blir inte så bra undervisning utan det (Magnus).

Maria ger ett specifikt exempel som hon tycker är extra viktigt. Det gör hon efter att jag har frågat om det är något specifikt bevis som hon tycker är viktigt för eleverna och då menar hon att härledningen av derivatans definition tillför en förståelse och att undervisningen skulle lida av att utesluta det.

> De här bevisen med derivatans definition, har väl kanske lite extra vikt på det sättet att man kanske förstår mer av själva ämnet när man använder beviset (Maria).

Systematisering. Den systematiserande karaktär som bevisen har diskuteras av Magnus och Maria. Maria beskriver bevisen mer allmänt och hur de verkar inom matematiken.

> För matematiken själv så är ju bevisen lite av en […] man skulle kunna beskriva det som en slags ryggrad (Maria).

Magnus däremot beskriver hur eleverna som fortsätter med Ma 2 och fler kurser möter fler bevis och kan få en förståelse för hur matematiken är uppbyggd.

> Det börjar ju i Ma 1 lite grann, men när man fortsätter med matematiken och jobbar med axiom, satser och bevis så gäller det att man verkligen jobbar med det så att eleverna förstår hur matematiken är uppbyggd utifrån ett logiskt perspektiv (Magnus).

Upptäckt. Maria är den lärare som pratar om den upptäckande roll som bevisen har. Det är inte en roll som tillägnas någon längre utläggning utan namns i förbifarten.

> Men för matematiken själv så är ju bevisen enormt viktiga för att bygga ut matematiken och veta att man bygger åt rätt håll (Maria).

Kommunikation. När det kommer till bevisens rolls som en bärare och förmedlare av kunskap genom kommunikation resonerar lärarna både i termer av elevernas framtida studier och sin egen utbildning. Det visar tydligt att de ser bevisens kunskapsförmedlande funktion.

Det är Maria och Magnus som funderar kring sina elevers framtida studier. Då är båda överens om att det finns ett mervärde för elever som ska fortsätta studera ett matematiskt eller tekniskt program att bekanta sig med och förstå bevisens kommunikativa roll.

> De [elever] som tänker att de ska hålla på med matematik senare, eller att man faktiskt vill undervisa i matematik så kan man tillägga att för dem är det viktigt att veta hur matematiken är uppbyggd (Maria).

Magnus går längre än Maria i sitt resonemang och menar att det är nödvändigt för elever att bemästra bevisföring för att fortsätta sina studier i ämnet på högskolan.

> Men det är ju så att om du ska läsa teknik på högskola så är det mycket matematik och ska du ta dig vidare i matematiken och inte bara gissa dig fram så är du tvungen att kunna härleda olika saker. Då måste man förstå det via härledning och inte bara utantill och därför är bevisföringen väldigt viktig (Magnus).

När Anders tänker på bevisföringens kommunikativa roll så tänker han tillbaka på sina egna studier och hur bevisen användes där. Dessutom reflekterar han över de svårigheter han upplevde med bevisen på universitetet och relaterar det till hur hans elever kan tänkas uppleva undervisningen av bevis på gymnasial nivå.

> Jag tänker på universitetet för då skulle man göra en massa bevis hela tiden. Eller man skulle ju lära sig bevisen. Då skulle man ju skriva matematiska bevis på alla tentor (Anders).

Maria, Magnus och Anders kopplar högskolestudier till den kommunikativa förmågan, som förmedlare av kunskap på högskolan. Där ser de ett mervärde för eleverna att ha kunskaper i bevisföring även om de inte är överens om hur mycket kunskaper som krävs.

Transfer. När det kommer till den roll som Hemmi (2006) har adderat till Bells (1976) lista så är det framförallt Maria och Kim som diskuterar den. De beskriver transfer både inom matematiken men också inom andra ämnen och förmågor i stort.

Maria pratar alltigenom intervjun om resonemangsförmågan och den deduktiva struktur som bevisföring har och menar att den främsta anledningen till att använda bevis i undervisningen är för att eleverna ska förbättra dessa förmågor. I detta sammanhang är det inte så att dessa förmågor och kompetenser diskuteras endast i ett perspektiv för att utvecklas inom matematiken utan också mer allmänt. Maria menar att även de som inte ska fortsätta studera matematik med fördel kan tränas i bevisföring.

> Det känns som att bevis handlar väldigt mycket om att lära sig resonera logiskt. […] Men det är ändå ett väldigt bra sätt att öva sig på orsak och konsekvens (Maria).

Maria ger också exempel på andra områden inom matematiken som med fördel kan utvecklas genom att undervisa i bevisföring. Hon förklarar att hon har märkt att elever kan ha svårigheter att hantera problemlösning av större uppgifter som hon har använt sig av i specialiseringskursen i matematik och det skulle underlättas om eleverna kunde utföra bevis.

Maria är den av lärarna som resonerar kring vilken transfer som kan inverka på det demokratiska uppdrag som skolan har när det kommer till att fostra samhällsmedborgare. Det handlar då om kompetenser som eleverna kan applicera på vardagssituationer i hela sina liv.

> Man lär sig att öva sin förmåga att resonera […] det är såklart nästans väsensskilt att prata om politik och matematik. I matte så är det ju lite enklare att analysera till exempel randvinkelsatsen än vad det är att analysera en hel samhällsstruktur i politik, men det finns likheter i hur man resonerar. Man utgår ändå ifrån någon slags axiom i grunden, och sen bygger man vidare till satser och den bygger man slutsatser från flera satser så kommer man vidare framåt (Maria).

Kim som också undervisar i fysik ger många exempel där hon ser till fördelarna med den transfer som bevis kan erbjuda. Hon menar att beräkningar med många variabler inom fysiken kan underlättas av undervisning med algebraiska bevis där eleverna får träna sig i att hantera variabler.

> Det första jag tänker på är att allting som har med algebraiska bevis att göra känns nyttigt. Det känner jag ju som både matte- och fysiklärare att det är där det blöder ihop, i just de två ämnena (Kim).

6.3 Skolverkets styrning och betygssättning

När det kommer till frågan om styrdokumenten blev det snabbt en fråga som utvecklades till att prata om det nationella provet och de anvisningar som medföljer. Maria, Anders och Magnus pratar alla om det nationella provet och dess styrning när det kommer till bedömning. Kim diskuterar nivåer i elevernas betygsföring på ett likartat sätt men associerar inte det med det nationella provet.

De nationella proven och betygsnivåer i bevisföring. Magnus och Anders kopplar styrningen från skolverket direkt till de nationella proven.

> Så kan man väl säga att skolverkets styr mest via nationella provet (Magnus).

> De nationella proven innehåller bevisföring och då känner man ju ändå att det blir viktigt (Anders).

Även Maria beskriver de nationella provens bedömningsmatriser men hon har ett mellansteg där hon menar att bevis kan kopplas till resonemangsförmågan och det är den som bedöms i samband med uppgifter som innehåller bevisföring på det nationella provet.

> När det gäller själva nivå-bedömningen så använder jag mig snarare av det nationella provets bedömningsmatriser och syn på till exempel resonemangsförmåga. Jag upplever att det handlar ofta om att bevis är en hög nivå av resonemangsförmåga. Där till exempel att göra många exempel är en lägre form av resonemangsförmågan (Maria).

I ovanstående resonemang kommer Maria också in på att prata om de olika nivåerna av bevisförmåga som det nationella provet förmedlar. Det utvecklar hon tydligare i nedanstående utdrag.

> Att göra ett exempel för att förklara att det stämmer i ett fall är typ E-nivå. Nästa nivå är att visa det i flera fall och dra slutsatser. Och sista nivån är att man har en generell utgångspunkt och drar en slutsats (Maria).

Kim förmedlar en likartad bild men inte lika tydligt formulerad som Maria. Kim ser det som en skillnad i nivåer mellan Ma 1 och Ma 2 att eleverna möter fler exempel på generalitet och skall kunna utföra bevis på en generell nivå för att nå ett högre betyg i Ma 2.

Magnus och Anders förmedlar en annan tolkning av bedömningen av bevisföring. De menar att eleverna ska kunna använda sig av de kunskaper som bevisen förmedlar för att uppnå ett godkänt i betyg.

> Sedan är det ju såhär att för de elever som har lite svårt för bevis så begär vi inte att de på E- och D-nivå ska genomföra de matematiska bevisen utan då är det ju att de kan använda bevisen (Magnus).

> I vissa uppgifter ska de göra bevis, alltså bevisa något. Men det brukar ofta vara av lite enklare karaktär då. Det brukar vara svårt nog för de som ligger på E i betyg och de kanske bara använder formlerna då istället (Anders).

Maria ger uttryck för att det finns andra nivåer inom bevisföringen. Hon menar att de inte är något krav för gymnasieskolan och att de inte behandlas i undervisningen.

> Där är det ju ändå en skillnad för slutsatsen även om slutsatsen ser generell ut och gäller för exempelvis alla *n* så baseras den ju fortfarande på exempel. Och att man kan också visa att det finns en ännu högre nivå där vi inte gör en undersökning med exempel utan verkligen är generella från start till slut. Jag tycker att det finns många olika nivåer i bevisföring (Maria).

Kritik mot skolverkets styrning. Det är två lärare som riktar kritik mot skolverkets anvisningar för bedömning och betygsättning. Maria menar att uppgifter innehållande bevisföring ofta blir en fråga om allt eller inget enligt hennes tolkning av bedömningskriterierna där en generell lösning ger högsta betyg. Hon kallar det en ”betygs-skada” eftersom det hindrar elever från att utforska uppgifter och bevisföringen på med olika fall.

> Men jag ser också att en del elever kan försöka gå på den generella metoden och misslyckas, och då försöker de inte med de en nivå lägre. För då tänker de att om de inte har gjort det med variabler så är det inget värt. Och det är lite synd tycker jag att betygskriterierna kan uppfattas så att det med att prova och testa inte är en bra metod i matte. Men det är ju oftast en bra metod för att komma på hur man ska lösa det utan att prova och testa (Maria).

Magnus däremot menar att elever behöver kunna utföra bevis på en generell nivå för att klara tekniska högskoleprogram och att kraven på E-nivå är för låga.

> Skolverket styr mest via nationella provet och har då väldigt låga E-krav. Då blir det så att vi får lite för många elever som lämnar den här skolan utan att få en bra gymnasieutbildning (Magnus).

7 Diskussion

Den här delen inleds med diskussioner om resultat och metod och därtill kommer de didaktiska konsekvenserna och fortsatt forskning diskuteras. Resultatdiskussionen ser till att behandla de frågeställningar som presenterades inledningsvis. Sedan diskuteras valet av metod och analys och hur det har påverkat arbetet. I avsnitten didaktiska konsekvenser och fortsatt forskning behandlas hur studien kan bidra till den didaktiska forskningen respektive till skolväsendet.

7.1 Resultatdiskussion

I det här avsnittet kommer studiens frågeställningar diskuteras i förhållande till bakgrunden, det teoretiska ramverket och resultatet. Det gör att vi kan skapa en förståelse för hur de intervjuade lärarna uppfattar de matematiska bevisen och deras roll samt hur skolverket behandlar bevis.

7.1.1 Lärarnas uppfattning av matematiska bevis

Resultatet för den här studien visar att de intervjuade lärarna uppfattar bevisen på ett sätt som är i linje med tidigare forskning. Därtill gör de en tydlig skillnad mellan bevisens värde för matematiken som vetenskap och den matematik som behandlas i gymnasieundervisningen.

Under intervjuerna berör lärarna aspekter om bevisens värde och struktur men en definition av begreppet uteblir. Lärarnas uppfattningar om bevisens struktur och värde ligger i linje med resultat från tidigare forskning. Maria och Magnus beskriver bevisens struktur på ett sätt som överensstämmer väl med den redogörelse som Kiselman och Mouwitz (2008) gör. Det bekräftar också tidigare forskning som menar att definitioner förmedlar en traditionell beskrivning av bevis (Weber, 2008) eftersom den stämmer överens med strukturen av bevis som uppstod i antikens Grekland. Därtill står det klart att lärarna är samstämmiga i sin syn på bevisens värde då de flertalet gånger påtalar hur viktiga de är för matematiken. De beskriver också bevisen systematiserande roll som utgör en ”ryggrad” för matematiken. I kontrast mot det står utelämnandet av en definition, men det speglar hur komplext begreppet är. Jag får en känsla av att förståelsen för begreppet är en tyst överenskommelse mellan mig och informanterna. Vi vet att vi delar samma bild av begreppet och behöver aldrig närma oss en förklaring då samtalet gång på gång bekräftar vår uppfattning och förståelse av begreppet. Det är intressant och stämmer väl överens med de studier om visar att de som studerar matematik på högskola och universitet får en klar bild av vad bevis är utan att det finns en definition som delas av hela samfundet.

Dock uttrycker lärarna att det finns en skillnad i bevisens värde för matematiken som vetenskap och som skolämne. De menar att bevisen och bevisföring inte är lika viktig för den undervisning de genomför och förklarar det med att inte alla elever kommer läsa matematik på högskola eller universitet. Det är en pragmatisk bild över de faktiska kunskaper eleverna kommer att behöva. Den bilden stämmer överens med Knuths (2002) studie där lärarna också uttrycker att endast de elever som ska studera matematik på högskola behöver ha kunskaper i bevisföring men också Hemmis et al. (2010) där svenska lärare uttrycker att bevis passar elever som studerar på naturvetenskapsprogrammet. Trots att bilden stämmer överens med tidigare forskning blev jag förvånad över att lärarna som undervisar på teknik- och naturvetenskapsprogrammet gör samma uppdelning. Jag hade hoppats att kunna tillföra förståelse till Hemmis forskning om varför lärare anser att bevis passar elever på naturvetenskapsprogrammet. Istället fann jag att även lärare på detta program har en syn på bevis som är att bevisen inte är för alla elever. Jag tror att den här uppfattningen kan ge förståelse till det glapp som existerar mellan undervisningen på gymnasieskola och universitet när det kommer till bevisföring. Av den pragmatiska avvägningen tror jag att resultatet blir att eleverna får mindre bevisföring i gymnasieskolans undervisning än vad de behöver för att möta förväntningarna på universitet. Eller tvärt om, universitetens undervisning tar inte hänsyn till den nivå av bevisföring som eleverna får från gymnasieskolan.

7.1.2 Bevisens roll för lärarna och deras undervisning

Alla av Bell (1976) och Hemmis (2006) roller för bevis finns representerade i materialet och resultatet. Men lärarna uttrycker framförallt bevisens roller att förklara och transferera i samband med sin undervisning. Den kommunicerande rollen värderas för elever som skall studera vidare och de systematiserande, verifierande och uppräckande rollerna nämns i förbifarten.

Lärarnas värdering av bevisens roll att förklara och transfer indikerar att lärarna använder och ser värdet av bevisen i sin undervisning. Samtliga lärare menar att den förklarande rollen är särskilt viktig. Magnus menar också att bevisens förklarande roll är synonym med läraryrket. Maria ger ett specifikt exempel på derivatans definition som ett näst intill obligatoriskt inslag på grund av den förståelse den tillför till undervisning. de Villiers (1990) menar också att det är den förklarande rollen som har störs inverkan på individer då de ofta vill förstå bevisen och deras bidrag till matematiken. Det överensstämmer med Hemmis et al. (2010) forskning där lärarna menar att bevisen tillför mycket till undervisningen. Maria och Kim är dessutom eniga i värdet av bevisens transfererande roll både inom matematiken såväl som i andra skolämnen och som en samhällsnytta. Ett återkommande område som tillägnas reflektion under intervjuerna är det om den logiska struktur som bevis har och att det är en viktig kunskap för eleverna. Det är i linje med Hemmis (2006) transfererande roll där hon förklarar att det är det logiska tänkandet som ger bevisen möjlighet att appliceras inom andra områden i matematiken såväl som utanför vetenskapen. Lärarna ger exempel på hur transfer kan ske till ämnet fysik och dessutom bidra till skolans demokratiska uppdrag. Samtliga resultat ovan talar för att lärarna ser ett värde för bevisens roll i undervisningen. De beskriver olika sätt där bevisen kan tillföra mycket i undervisningen och ge eleverna kunskaper som andra områden i skolan inte kan tillfredsställa. Hur kommer det sig att lärarna värderar bevisen lägre när det kommer till sin undervisning? Den frågan hoppas jag kunna behandla och ge en förståelse för i nästkommande avsnitt (7.1.3).

De resterande fyra rollerna kommunikation, verifikation, systematiserande och upptäckande berörs på olika sätt. Lärarna understryker värdet av bevisens kommunikativa roll, om än för en högre utbildning. De uppfattar att den kommunikativa rollen är mer påtaglig på högskolan eftersom det är mer specialiserade och fördjupade kurser. De anser i stor utsträckning att bevisföring är en färdighet som behövs för eleverna som planerar att läsa en matematisk eller teknisk utbildning. Verifikation är någonting som Maria, Kim och Magnus konstaterar helt sonika genom att uttrycka att det finns en sanning och allmängiltighet i bevis som inte kan ifrågasättas. de Villiers (1990) menar att det är den roll som inte minst bland matematiklärare anses vara bevisens huvudsakliga roll. Det är dock i motstridighet till resultatet. Matematiklärarna ser det som en självklarhet men det är inte den roll som de anser vara viktigaste när det kommer till deras undervisning. Å andra sidan kan man argumentera för att direktheten i deras uttalande tyder på att det är en självklarhet som varken behöver diskuteras eller kan ifrågasättas. De systematiserande och upptäckande rollerna uttrycks också av lärarna i förbifarten och inte roller som de tillägnar längre utlägg. Det är därför svårt att diskutera dessa i större utsträckning men ovanstående resonemang är applicerbart även här, antingen prioriteras dessa roller lägre för lärarna i deras undervisning eller så ser de dem som obestridbara och självklara faktum som inte kräver en längre utläggning. Jag tror att en anledning till att de inte talar om dessa roller i relation i sin undervisning är för att det krävs att eleverna förstår bevisens värde innan de kan förstå dessa roller. Det är svårt att skapa en förståelse för hur matematiken är uppbyggd och vilket värde bevisen har innan eleverna har fått en inblick i vad bevis är för något.

7.1.3 Lärarnas uppfattningar av skolverkets styrning och olika nivåer av bevisföring

Det område som i intervjuguiden var tänkt att behandla styrdokumenten kom istället att behandla de nationella proven då lärarna anser att det är främst i de nationella proven som skolverket styr undervisningen och bedömning. De tolkningar som lärarna gör kan förklara hur de uppfattar skolverkets styrning då lärarna har tydliga beskrivningar av olika betygsnivåer av bevisföring. Dessa nivåer kan i sin tur förstås utifrån Balacheffs (1988) kognitiva nivåer och få en förståelse för hur lärarna ser på skolverkets styrning i förhållande till vilka nivåer av bevisföring eleverna ska möta i gymnasieskolan.

Balacheffs (1988) teori kan ge oss en förståelse för lärarnas tolkningar av betygskriterierna för de nationella proven. Maria och Kims tolkning av de olika nivåerna av betygsättning förmedlar en uppfattning för att även om det handlar om att eleverna ska nå en generell slutsats gör de det genom att testa olika fall. Det stämmer överens med de två lägre kognitiva nivåerna i Balacheffs teori, naiv empirism och det kritiska experimentet. Balacheffs beskriver dem som de praktiska nivåerna där eleverna testar olika fall för att nå en slutsats. Maria gör under intervjun en ansats att förklara att det finns högre nivåer inom bevisföring än dem som förekommer i gymnasieskolans undervisning. Hon beskriver det som att man på dessa nivåer inte testar olika fall utan rör sig på ett mer teoretiskt plan. Den beskrivningen spelar också det som karakteriserar Balacheffs två högre kognitiva nivåer av bevisföring, det generiska experimentet och tankeexperimentet. Den här tolkning kan ses som en förklaring till hur lärarna uppfattar styrdokumenten och vilka kognitiva nivåer av bevisföring som deras undervisning innehåller. Det får som följd att det är de två lägre kognitiva nivåerna av bevisföring som eleverna möter och förväntas bemästra inom gymnasieskolans matematik. Dessutom tror jag också att det här inverkar på hur lärarna resonerar kring bevis då de under intervjuerna ofta gör en uppdelning mellan matematik som vetenskap och gymnasieskolans undervisning. Eftersom de två högre kognitiva nivåerna inte behandlas får lärarna aldrig chansen att visa eleverna bevisens väsentliga roll inom matematiken och det gör att bevisen får en lägre status inom gymnasieskolans matematik.

När jag ställer frågan om hur styrdokumenten behandlar matematiska bevis blir det en diskussion om de nationella proven. Det framgår att lärarna tycker att kursplanerna är svårtolkade och istället lutar sig mot de nationella proven och de medföljande bedömningsstöd. Lärarna ser anvisningarna till proven som en konkretisering av de svepande formuleringarna som förekommer i kursplanernas bedömningsanvisningar. Lärarna hänvisar många gånger till att det ofta finns uppgifter innehållande bevis och bevisföringar på proven och att det framförallt är därigenom de kan utläsa att det skall behandlas. Maria säger också att när det kommer till de uppgifter som behandlar bevis på de nationella proven är det enligt bedömningsanvisningarna resonemangsförmågan som ska bedömas. Det är i linje med Davidsson och Magnussons (2016) granskning av skolverkets kommentarer till kursplanerna där det blir uppenbart att resonemangsförmågan beskrivs som en förmåga att föra bevis. En relevant fråga att ställa sig är om kursplanernas svepande formuleringar inte förmedlar en tillräckligt stark koppling mellan bevisföring och resonemangsförmåga eftersom lärarna inte ser den lika tydligt. Det är bara Maria som gör denna koppling och då i förhållande till hur de nationella proven behandlar bevisföring. Resultatet för denna studie visar tydligt att det är en förmåga som är svårtolkad och borde konkretiseras för att säkerställa att lärare uppfattar den på samma sätt.

7.2 Metoddiskussion

För att undersöka lärares livsvärld valdes en fenomenografisk analysmetod till de semistrukturerade intervjuerna. Fenomenagrafin tillåter fenomen att undersökas och träda fram och på så sätt kan man både undersöka materialet utifrån teorier och hitta nya skiftningar. Eftersom materialet består av lärares yttringar är det viktigt att ha i åtanke att det faktiskt inte är informanternas faktiska livsvärld som undersöks utan hur informanterna själva uppfattar den och väljer att uttala sig om den. Intervjuarens medverkan i samtalet spelar också in på hur intervjun tar form. Dessutom genomgår materialet en transformation i transkription och analysfasen.

Den här studien hade ett begränsat urval då det var svårt att få tag på lärare som ville ställa upp. Med det i åtanke fanns det mycket material för att undersöka de aspekter som studien fokuserar på och både likheter och skillnader i svaren kunde analyseras. Dessutom fanns det en variation i arbetslivserfarenhet och utbildning bland lärarna. Eftersom det är en kvalitativ studie har ambitionen aldrig varit att generalisera resultatet utan ge en förståelse till fenomenen från yrkesverksamma lärare.

Det teoretiska ramverket består av teorier som har skapat både inom ett konstruktivistiskt och ett sociokulturellt paradigm. Teorierna komplimenterar varandra och belyser problematiken ur olika perspektiv. Resultatet och diskussionen visar också att man kan analysera materialet ur båda dessa synvinklar för att tillföra en förståelse för bevisföring.

Den semistrukturerade intervjun passade bra för att undersöka lärarnas tankar och uppfattningar. Intervjuguiden tillät att göra detta på ett allmänt plan om bevisens värde såväl som ett mer specialiserat plan om hur skolverket behandlar bevis. I efterhand har jag kommit på att om jag inkluderat fler följdfrågor hade jag fått ett mer välnyanserat resultat. Jag hade en förhoppning om att jag skulle kunna undersöka lärarnas epistemologiska uppfattningar om vad bevis är men jag märkte att materialet inte räckte för att göra det. För att undersöka djupgående uppfattningar behöver man göra mer grundliga intervjuer, kanske en serie intervjuer med samma informant. Dock tror jag att det är en intressant aspekt att undersöka i förhållande till undervisning av matematik och i synnerhet bevis.

7.3 Didaktiska konsekvenser

Framförallt tycker jag att studien belyser och ger en förståelse till läraryrkets komplexitet och de dilemman som lärare möter dagligen. Komplexiteten består i att lärare har olika uppdrag som beskrivs i styrdokumenten att förhålla sig till samtidigt som lärare gör pedagogiska val och är medmänniskor. Lärarna i studien belyser bevisen ur olika perspektiv: allmänt, matematiskt, tjänstemanamässigt, erfarenhetsmässigt, yrkesmässigt och dessutom tar lärarna hänsyn till eleverna i hög utsträckning. Det ger en djupare förståelse för hur det är att undervisa i bevisföring och matematik och de aspekter som faktiskt påverkar lärarna. Det ger också en förståelse för att det kan finnas variationer och skillnader i de val som lärare gör och de uppfattningar de har om hur undervisningen ska utformas.

Eftersom många lärare uppfattar styrdokumenten som svåra att tolka kan resultatet och diskussionen kring bevisföringens olika kognitiva nivåer tillföra en förståelse för hur gymnasieundervisningen utformas i praktiken. Studien visar tydligt att lärarna använder sig av det nationella provet och dess anvisningar för att bedömning och betygsättning. Det gjorde att intervjuerna gav en detaljerad bild av hur de uppfattar skolverkets styrning när det kommer till betygssättning och vilket innehåll som således ska behandlas i undervisning. När de betygsnivåer som lärarna beskriver kontrasteras med Balacheffs (1988) kognitiva nivåer skapas också en förståelse för vilka kognitiva nivåer gymnasiematematiken ser till att utveckla. Det gör det också möjligt att fråga om glappet mellan undervisning i gymnasiet och högskola kan beskrivas utifrån Balacheffs kognitiva nivåer. Är det så att högskolans undervisning kräver att eleverna bemästrar högre kognitiva nivåer av bevisföring? Att som lärare på gymnasieskolan och universitetet ha en förståelse för de kognitiva nivåerna och hur de behandlar på respektive nivåer kan erbjuda en flexiblare övergång för eleverna och studenterna.

7.4 Fortsatt forskning

Eftersom en stor del av den här studien kom att kretsa kring de nationella proven och hur de behandlar bevis och bevisföring så skulle det vara intressant att undersöka proven närmare. Det skulle ge en djupare förståelse för hur skolverket ser på bevis och bevisföring och hur de i sin tur påverkar lärarna. Det skulle också vara intressant att jämföra de nationella proven och kursplanerna för att se om det finns någon skillnad i hur de behandlar bevis och bevisföring.

Maria tillför kritik mot skolverkets framställning av de olika betygsnivåerna inom bevisföring. Hon menar att de bidrar till att få eleverna att tänka att de inte kan använda sig av taktiker som tillhör en lägre nivå. Marias kritik ligger i linje med hur Balacheff (1988) resonerar kring de kognitiva nivåerna då han menar att även vid de högre nivåerna kan det finnas inslag av praktiska prövningar. Nivåerna är inte statiska eller uteslutande utan samverkande. Det är en insikt som eleverna behöver få med sig för att fortsätta utvecklas i bevisföring. Det är en kritisk aspekt som Maria identifierar och som kräver vidare granskning. För att öka förståelsen ytterligare kan man undersöka det underlag som skolverket använder sig av när de utformar sina dokument och anvisningar för att se om skolverkets resonemang stämmer överens med lärarnas uppfattningar.

Referenslista

Balacheff, N. (1988). Aspects of Proof in Pupils’ Practice of School Mathematics. I Pimm, D. (Red.), *Mathematics, Teachers and Children* (s. 216-235). Hodder & Stoughton: London.

Bell, A. (1976). A study of pupils' proof-explanations in mathematical situations. *Educational Studies in Mathematics,* 7(1), 23-40.

Benacerraf, P., & Putnam, H. (1998). Introduction. In P Benacerraf & H. Putnam (Red.), *Philosophy of mathematics, Selected readings* (2 uppl.). Cambridge: Cambridge University Press.

Brandell, G., Hemmi, K., & Thunberg, H. (2008). The Widening Gap - A Swedish Perspective. *Mathematics Education Research Journal*, 20(2), 38-56.

Bryman, A. (2016). *Social research methods* (Fifth ed.). Oxford: Oxford University Press.

Cabassut, R., Conner, A., Isçimen, F.A., Furinghetti, F., Jahnke, H. N., & Morselli, F. (2012). Conceptions of Proof – In Research and Teaching. I Hanna, G. & de Villers, M. (Red.), *The 19th ICMI Study: Proof and Proving in Mathematics Education.* (s. 169–190). New York: Springer.

Dahlgren, L. O., & Johansson, K. (2015). Fenomenografi. I A. Frejes & R. Thornberg (Red.), *Handbok i kvalitativ analys* (s. 162–175). Stockholm: Liber.

Davidsson, M., & Magnusson, S. (2016). *Matematiska bevis – ett historiskt, matematiskt och didaktiskt perspektiv* (Kandidatuppsats). Göteborg: Institutionen för pedagogik och specialpedagogik, Göteborgs Universitet. Tillgänglig: https://gupea.ub.gu.se/handle/2077/51307

Dawson J., J. W. (2006). Why Do Mathematicians Re-prove Theorems? *Philosophia Mathematica*, 3(14), 269-286. doi: 10.1093/philmat/nkl009

de Villiers, M. (1990). The role and function of proof in mathematics. *Pythagoras,* South Africa, 23, s. 17-24.

Grabiner, J. V. (2012). Why Proof? A Historian’s Perspective. I Hanna, G. & de Villiers, M. (Red.), *The 19th ICMI Study: Proof and Proving in Mathematics Education* (s. 147-167). New York: Springer.

Hanna, G. (1990). Some Pedagogical Aspects of Proof. *Interchange*, 21(1), s. 6–13. doi: 10.1007/BF01809605

Hanna, G. (2000). Proof, Explanation and Exploration: An Overview. *Educational Studies in Mathematics*, 44(5), s. 5-23. doi:10.1023/A:1012737223465

Hemmi, K. (2006). *Approaching Proof in a Community of Mathematical Practice* (Doktorsavhandling). Stockholm: Matematiska institutionen, Stockholms universitet.

Hemmi, K., Lepik, M., & Viholainen, A. (2010). Upper secondary school teachers' views of proof and proving: An explorative cross-cultural study. *Proceedings of the 16th Conference of Mathematical Views* (Mavi16).

Kiselman, C., & Mouwitz, L. (2008). *Matematiktermer för skolan*. Göteborg: Nationellt centrum för matematikutbildning, NCM.

Kline, M. (1972). *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*. New York: Oxford University Press.

Knuth, E. J. (2002). Teachers' Conceptions of Proof in the Context of Secondary School Mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 5(1), 61–88.

Kvale, S., & Brinkmann, S. (2014). *Den kvalitativa forskningsintervjun* (3. [rev.] uppl.). Lund: Studentlitteratur.

Miyazaki, M. (2000). Levels of Proof in Lower Secondary School Mathematics. *Educational Studies in Mathematic*s, 41(1), 47-68.

Rav, Y. (1999). Why Do We Prove Theorems? *Philosophia Mathematica,* 7(3), 5-41. Hämtad 2016-09-01, från http://philmat.oxfordjournals.org/

Recio, A., & Godino, M. (2001). Institutional and personal meanings of mathematical proof. *Educational Studies in Mathematics*, 48(1), 83–99.

Skolverket. (2011a). *Läroplan, examensmål och gymnasiegemensamma ämnen för gymnasieskola 2011*. Stockholm: Skolverket.

Skolverket. (2011b). *Ämnesplan för gymnasieskolan, Matematik.* Hämtad 2018-03-24, från http://www.skolverket.se/

Skolverket. (2013). *Nationellt kursprov i matematik 4*. Hämtat 2018-04-20, från http://www.edusci.umu.se/

Skott, J., Jess, K., Hansen, C., & Lundin, S. (2010). *Matematik för lärare, delta didaktik.* Malmö: Gleerups Utbildning AB.

Säljö, R. (2010) Den lärande människan – teoretiska traditioner. I U.P. Lundgren, R. Säljö & C. Liberg (red), *Lärande, skola, bildning. Grundbok för lärare* (s. 139–197). (2.uppl.). Stockholm: Natur & Kultur.

Vetenskapsrådet. (2002). *Forskningsetiska principer inom humanistisk-samhällsvetenskaplig forskning*. Stockholm: Vetenskapsrådet.

Weber, K. (2008). How Mathematicians Determine if an Argument Is a Valid Proof. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39(4), 431-459. Hämtad 2016-09-01, från http://www.jstor.org.ezproxy.ub.gu.se/stable/40539306

Bilaga 1 – Missivbrev

Hej!

Mitt namn är Sofia Magnusson och jag studerar min sista termin på ämneslärarprogrammet på Göteborgs Universitet. Det är nu dags för mig att skriva mitt sista examensarbete i ämnet matematik och skulle vara väldigt tacksam om du vill hjälpa mig.

Syftet med arbetet är att undersöka lärares förhållande till matematiska bevis. Det hoppas jag kunna göra genom att genomföra intervjuer med verksamma lärare i matematik. Intervjuerna förväntas ta ca 30–40 minuter.

Deltagande är naturligtvis frivilligt och studien kommer följa vetenskapsrådets principer. Du som blir intervjuad är anonym och kan bestämma hur länge du vill delta samt vilka villkor deltagandet sker på.

Det vore väldigt värdefullt för mig i min framtida yrkesutövning att få ta del av dina upplevelser och jag är mycket tacksam om du vill delta i min studie.

Om du är intresserad eller har några frågor så tveka inte att höra av dig!

Vänliga hälsningar
Sofia Magnusson

Email: xxxxxxxxx@student.gu.se
Telefon: XXX – XXX XX

Bilaga 2 – Intervjuguide

Presentation

Vilka kurser undervisar du i?

Hur lång erfarenhet har du av att undervisa som lärare?

Vilken utbildning har du?

Beskriv skolan (storlek, arbetslag, ämneslag)

Om matematiska bevis

Vad tänker du på när du hör matematiska bevis?

Vad tycker du karaktäriserar matematiska bevis?

Om undervisning

Hur använder du matematiska bevis i din undervisning?

Tycker du att det finns några bevis som är viktiga för eleverna att bekanta sig med och i så fall varför?

Har du några tankar kring varför elever borde bli mer bekanta med bevis och bevisföring i matematik?

Om skoldokumenten

Hur tycker du att styrdokumenten behandlar bevis, och hur påverkar det dig i din undervisning?