GÖTEBORGS UNIVERSITET

Innan polletten trillar ner

En studie om matematisk begreppsbildning

Lea-Marie Sittler

Ämneslärarprogrammet med inriktning mot arbete i gymnasieskolan

Uppsats/Examensarbete:	15 hp
Kurs:	LGMA2A
Nivå:	Avancerad nivå
Termin/år:	VT 2018
Handledare:	Laura Fainsilber
Examinator:	Jan Stevens
Kod:	VT18-3001-012-LGMA2A

Nyckelord: Concept image, concept definition, begreppsbild, begreppsdefinition, förståelse, funktioner, förstaderivata, derivata, grafisk förståelse, algebraisk förståelse, strukturellt synsätt, operationellt synsätt

Abstrakt

Syftet med denna studie är att undersöka elevers mentala bilder av begreppen *funktioner* och *förstaderivata*, samt deras förståelse av hur en funktionsgraf hänger samman med tillhörande förståderivatas graf. För att ge ett teoretiskt ramverk för olika synsätt på matematiska begrepp samt för hur mentala begreppsbilder kan beskrivas, presenteras i denna studie två artiklar – Tall och Vinners ”Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity” (1981) samt Sfards “On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin” (1991). Med hjälp av de i dessa artiklar presenterade teorierna undersöks tre elevers mentala bild av begreppen *funktion* och *derivata* samt elevernas förhållningssätt till dessa begrepp. Undersökningen görs med hjälp av enskilda, semistrukturerade intervjuer med eleverna. Den teoretiskt tematiska analysen av elevernas förhållningssätt görs utifrån den av Sfard beskrivna operationell-strukturell-dualismen. Särskilt elevernas hanterande av sambandet mellan funktionsgrafer och den grafiska framställningen av tillhörande derivata undersöks. Resultatet pekar på två saker: För det första att elevernas mentala bild av derivatabegreppet är tämligen fragmentarisk, medan deras mentala bild av funktionsbegreppet verkar vara mer koherent. Hur de grafiska framställningarna av funktioner och tillhörande derivata hänger samman har eleverna ingen utvecklad förståelse för. För det andra pekar denna studie på att det är möjligt att på ett mycket nyanserat vis undersöka individers matematiska tillvägagångssätt utifrån Sfards operationell-strukturell-dualism. De didaktiska konsekvenserna av denna studie består av att det är möjligt att som lärare kartlägga elevers mentala begreppsbilder och att jobba mot att utveckla dessa till att bli sammanhängande och användbara. Studien pekar även på att det är värdefullt att som lärare vara medveten om olika synsätt på matematiska begrepp.

Förord

Det har varit en stor utmaning att skriva detta examensarbete. Här vill jag gärna tacka några personer som har bidragit till att skrivprocessen nästan hela tiden har känts rolig och stimulerande. Tack Ida Andersson för att du tog dig tid att läsa min uppsats när den fortfarande var kaotisk och långt ifrån klar – dina synpunkter och konstruktiva kritik har varit ovärderliga. Ett stort tack till min handledare Laura Fainsilber – ditt intresse och din kunskap om matematisk förståelse, begreppsbildning och didaktik samt ditt engagemang i min skrivprocess har gett mig både drivkraft och inspiration under arbetet med min uppsats. Jag vill här även passa på att tacka mina tre intervjupersoner Frodo, Carina och Lena, som tog sig tid att delta i denna studie.

Innehållsförteckning

Figurer

Inledning

När är det egentligen vi förstår något? När kan vi börja säga att vi har fått grepp om någonting? Är det när vi kan hänga med i någons resonemang? Är det när vi kan föra resonemanget själva? Är det när vi kan använda oss av ett begrepp för att lösa något större problem eller är det först när förståelsen sipprar in i vårt undermedvetna och innehållet finns där som en intuition, en automatism som aktiveras när den behövs? Frågan är djupt filosofisk och grundar sig i epistemologiska frågor som *vad är kunskap? Kan kunskap likställas med förståelse av något? Går det att förstå något helt och fullt?* Om svaret på frågan ”kan kunskap likställas med förståelse” skulle vara *ja!*, blir frågan om just förståelsens natur allt mer angelägen. Inte minst för oss lärare. En stor del av vårt samhällsuppdrag består i att förmedla kunskap till elever. Låt oss titta närmare på matematikämnet och en matematiklärares uppdrag: jag upplever ofta att det elever får med sig på matematikundervisning är praktiska färdigheter i algebra, sannolikhetslära, geometri, olika sorters problemlösning och statistik. Leder utövandet av praktiska färdigheter till förståelse? Eller är förståelse för en procedur en förutsättning för genomförandet? När en elev löser en uppgift rätt, har hon då begripit det matematiska innehållet uppgiften behandlar? Eller går hon bara efter ett recept, steg för steg, och löser uppgiften på det viset? Icke att förglömma det ack så vanliga svaret jag får då jag frågar människor i min omgivning vad de tycker om matematik; att det är kul när man *förstår*. En annan fråga apropå förståelse: Vad händer under all den tid innan ”polletten trillar ner”? Yrar den oförstående omkring i halvmörker tills lampan plötsligen tänds eller blir det sakta men säkert ljusare och ljusare fram tills den efterlängtade, förståelse-bringande helhetsbilden träder fram? I denna uppsats undersöker jag matematisk begreppsbildning, förståelse och olika sätt att förhålla sig till matematiska begrepp.

1.1 Syfte och frågeställning

Syftet med denna fallstudie är att undersöka och belysa tre elevers olika syn på begreppen *funktioner* och *derivatan*[1] samt deras förståelse av hur en funktionsgraf hänger samman med den grafiska framställningen av tillhörande förstaderivata. Förhoppningen är att, med hjälp av två teorier om begreppsbildning och förståelse, lyckas kartlägga de viktigaste dragen för elevernas framtida lärande i deras bild och förståelse av begreppen *funktioner* och *derivatan.*

I denna studie utgår jag från följande frågeställningar:

- *Hur kan en individs förståelse av ett begrepp beskrivas?*
- *Hur växer matematisk förståelse fram?*
- *Vilka olika tillvägagångssätt förekommer hos elever i hanterandet av funktioner och derivatan? Hur tar de sig uttryck?*
- *Hur hanterar elever sambandet mellan den grafiska representationen av en funktion och tillhörande derivata?*

[1] Varje gång som jag i denna uppsats använder begreppet *derivata,* syftar jag till *förstaderivatan.*

2 Teoretisk bakgrund

I denna del kommer det sammanfattas och presenteras två vetenskapliga artiklar. Den första är skriven av David Tall, professor emeritus på University of Warwick och Shlomo Vinner, professor emeritus på Hebrew University of Jerusalem och publicerades 1981. Denna artikel behandlar individers begreppsdefinitioner och mentala begreppsbilder av gränsvärde och kontinuitet. Den andra artikeln skriven av Anna Sfard, forskare på University of Haifa, publicerades 1991 och handlar om två olika sätt att förhålla sig till matematik, samt om individers förståelseprocess i lärandet av matematiska begrepp. De teorier som presenteras i artiklarna utgör det teoretiska ramverket för analys av denna studies empiriska data.

2.1 Tall och Vinner

Artikeln av Tall och Vinner (1981)[2] bär titeln *Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity* och behandlar den kognitiva strukturen som hos en individ associeras med ett givet begrepp. I en sådan kognitiv struktur ingår bl. a. alla med ett givet begrepp associerade bilder, egenskaper och procedurer. Hos de flesta individerna ingår även någon form av begreppsdefinition i den kognitiva strukturen som utgör den mentala bilden av ett givet begrepp. Det är möjligt att en sådan mental begreppsbild inte är helt koherent och att den innehåller attribut som motsäger varandra.

2.1.1 Begreppsdefinition

Tall och Vinner betonar att det finns formella och personliga begreppsdefinitioner. Låt oss börja med att reda ut vad en formell begreppsdefinition anses vara. Enligt Tall och Vinner är det en „form of words used to specify [a] concept“ (Tall & Vinner, s. 152), alltså en sammansättning ord som används för att specificera ett begrepp. Ett exempel för en formell begreppsdefinition är Dirichlet-Bourbaki-definitionen för funktioner:

$$f\colon X \to Y \text{ är } en\ delmängd\ av\ X \times Y\ så\ att\ om\ (x, y_1) \in f och\ (x, y_2) \in f \Rightarrow y_1 = y_2$$

Formella definitioner av detta slag är accepterade av matematikersamfundet. Lärandet av formella definitioner kan ske på olika sätt. Bland gymnasieelever är det vanligt att formella definitioner lärs in utantill, utan större relation till begreppet som helhet. På universitet är det vanligare att definitioner lärs in meningsfullt, med stark koppling till den egna matematiska praktiken. En personlig begreppsdefinition är däremot en individs egna förklaring av ett givet begrepp. Även en individs personliga rekonstruktion av en formell definition av ett begrepp kan sägas vara en personlig begreppsdefinition.

2.1.2 Den mentala begreppsbilden

En mental begreppsbild utgörs som sagt av den totala kognitiva strukturen som en individ associerar med ett visst begrepp. Denna kognitiva struktur inkluderar bilder, egenskaper och procedurer som associeras med ett begrepp. Även en individs personliga begreppsdefinition av ett givet begrepp är del av individens mentala bild av begreppet. Det är inte enbart under mattelektionerna och andra formella sammanhang som mentala begreppsbilder byggs upp och utvecklas, utan det sker även i informella situationer utanför skolan. En individs mentala begreppsbilder förändras och revideras då individen utsätts för nya stimuli och situationer och i takt med att individen mognar. Här är det viktigt att tillägga att även eventuella felaktiga

[2] Varje gång som jag i denna uppsats refererar till Tall och Vinner refererar jag till deras artikel skriven 1981. Därför kommer jag i fortsättningen inte att skriva ut årtalet.

uppfattningar om ett begrepp är en del av individens mentala bild av begreppet i fråga. Som det i avsnitt 2.1.4 kommer att förklaras mer ingående, kan sådana felaktiga uppfattningar om ett begrepp innehålla frön till kognitiva konflikter hos individen.

2.1.3 Den framkallade mentala begreppsbilden

Om vi tänker oss den mentala begreppsbilden som mängden av alla med ett begrepp associerade bilder, procedurer och egenskaper, så är *den framkallade mentala begreppsbilden* den delen av en individs mentala bild av ett begrepp som i en viss situation är aktiverad. Till exempel aktiveras under den algebraiska uträkningen av en funktions största värde inte nödvändigtvis den delen av begreppsbilden som innehåller grafer och koordinatsystem, utan möjligtvis snarare den delen som innehåller de för uträkningen nödvändiga procedurerna. Beroende på situation kan helt olika, möjligtvis motsägelsefulla delar av den mentala begreppsbilden framkallas.

2.1.4 Potentiell konfliktfaktor

Två delar av en individs mentala begreppsbild som skulle kunna hamna i konflikt med varandra kallar Tall och Vinner för *potentiella konfliktfaktorer*. Det är möjligt att de potentiella konfliktfaktorerna förblir oupptäckta och därmed aldrig leder till någon faktisk kognitiv konflikt hos studenten. I sådana fall fortsätter respektive del att framkallas i olika situationer, utan att studenten blir varse om att de två delarna motsäger varandra. Ett exempel på en potentiell konfliktfaktor som Tall och Vinner tar upp blir tydligt i följande scenario som handlar om talet $\sqrt{5}$. En individ – låt oss kalla honom Kristian – får som uppgift att placera talet $\sqrt{5}$ i någon av talmängderna naturliga tal ($\mathbb{N}$), rationella tal ($\mathbb{Q}$) eller reella tal ($\mathbb{R}$). Kristian placerar talet $\sqrt{5}$ i $\mathbb{R}$-lådan. Vid ett annat tillfälle, då även talmängden komplexa tal ($\mathbb{C}$) finns att välja på, skrivs talet $\sqrt{5}$ som komplext tal $\sqrt{5}+0i$ – ett komplext tal där den imaginära delen är 0. Då hamnar $\sqrt{5}+0i$ (och därmed $\sqrt{5}$) i $\mathbb{C}$-lådan. Alltså ingår i Kristians begreppsbild av talet $\sqrt{5}$ både egenskapen *är ett reellt tal* och *är ett komplext tal*, beroende på situationen och hur talet framställs. Det kan hända att dessa två uppfattningar aldrig framkallas samtidigt och fortsätter finnas sida vid sida hos den studerande. Denna potentiella konflikt hos Kristian blir till en faktisk kognitiv konflikt, då Kristian konfronteras med att talet hade placerats i *både* $\mathbb{R}$ och $\mathbb{C}$. “Ett tal kan väl inte vara både reellt och komplext?!” skulle kunna vara en av Kristians reaktioner. Här blir det tydligt hur en kognitiv konflikt i många fall leder till insikter. Kristians kognitiva konflikt kommer – förhoppningsvis – leda till insikten att ett tal, exempelvis $\sqrt{5}$, visst kan förekomma i både $\mathbb{R}$ och $\mathbb{C}$ samtidigt, eftersom $\mathbb{R}$ är en delmängd av $\mathbb{C}$. En kognitiv konflikt bör alltså inte betraktas som något negativt, utan snarare som en nödvändig del i lärandeprocessen.

I nästa avsnitt presenteras två teorier av Anna Sfard (1991). I motsats till Tall och Vinners teori som handlar om att beskriva en individs begreppsbild av ett visst matematiskt innehåll, fokuserar Sfards på begreppsbild*ningen* och på individers synsätt på begrepp, alltså snarare på ett *görande* än på ett *varande*. Begreppsbilden lämnas dock inte helt åt sidan av Sfard – hon ger till och med själv en rätt så koncis beskrivning av den mentala begreppsbilden, som hon kallar *conception*[3]:

The whole cluster of internal representations and associations evoked by the concept[4] – the concept’s counterpart in the internal, subjective ”universe of human knowing” (Sfard, 1991, s. 3)

[3] eng.: uppfattning, idé, föreställning
[4] eng.: begrepp

2.2 Anna Sfard

I denna studie, som bär titeln *On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin,* behandlas utvecklandet av matematisk förståelse, samt olika sätt att förhålla sig till matematik. Sfard (1991)[5] använder ett kombinerat ontologiskt-psykologiskt perspektiv. Ontologi är inom filosofin namnet på *läran om det varande* och behandlar till exempel frågor om hur världen eller tingen är beskaffade samt vilka deras väsensbetingade drag är (Wikipedia, 2018). I studien belyses å enda sidan matematiska begrepps natur, vilket alltså är en ontologisk angelägenhet, å andra sidan den psykologiska frågan om hur dessa begrepp uppfattas av individen. Genom att analysera olika matematiska definitioner och representationer kommer Sfard fram till att abstrakta begrepp kan uppfattas på två fundamentalt olika sätt. Å ena sidan *strukturellt*, alltså som objekt, å andra sidan *operationellt*, som processer. I avsnitt 2.2.1 beskrivs dessa två synsätt närmare.

Sfard (1991) speglar matematiska förståelseprocesser hos individer i den historiska utvecklingen av matematiken och visar med hjälp av olika exempel att många matematiska begrepp för en början uppfattades och behandlades enbart operationellt för att så småningom – efter många diskussioner, debatter och om och men – börja ses som självständiga, manipulerbara matematiska objekt. I figur 1 (s. 5) illustreras till exempel talbegreppets utveckling från att vara något man räknade olika objekt med till att ses som en mängd med olika delmängder såsom naturliga, rationella och komplexa tal som i sin tur har olika egenskaper osv.

Utöver att beskriva och problematisera de två sätten att uppfatta abstrakta begrepp, formulerar Sfard en tre-stegs-modell som beskriver hur en individs förståelseprocess av matematiska begrepp skulle kunna se ut. Med hjälp av denna modell illustrerar hon att en förståelse- och därmed lärandeprocess ofta börjar med att individen fokuserar mycket på procedurer som har att göra med det begrepp som ska läras in, medan individen senare under lärandeprocessen börjar se begreppet mer och mer på ett strukturellt sätt, begreppet reifieras. Modellen är med andra ord en nyanserad beskrivning av den studerande individens förståelseprocess och består av följande tre steg:

(1) Internalisering
(2) Kondensering
(3) Reifikation[6]

När det i fortsättningen skrivs att en individ lär sig *ett högre matematiskt begrepp* eller *ett begrepp på nästa abstraktionsnivå* menas det ett begrepp som kan läras först när det/de föregående har lärts in.

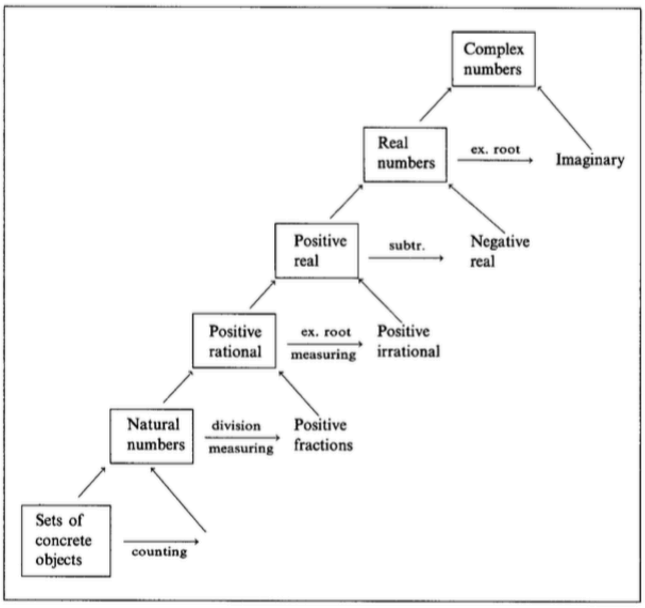
Sfard lägger särskilt fokus vid det tredje steget i modellen, reifikationen, då detta steg enligt henne är nödvändigt för att internaliseringen av ett högre matematiskt begrepp ska kunna ske. Att på något sätt kunna se eller föreställa sig abstrakta matematiska begrepp som objekt verkar utgöra en väsentlig del i matematisk förmåga överlag.

I avsnitt 2.2.1 följer först en närmre beskrivning av en strukturell respektive operationell förståelse, sedan görs en närmare redogörelse av de tre stegen i Sfards modell. Både beskrivningen av det strukturella och det operationella synsättet i individers förståelse och förhållningssätt samt tre-stegs-modellen kommer att exemplifieras med hjälp av exempel som illustrerar lärandet och hanterandet av funktioner och derivata.

---

[5] Varje gång som jag i denna uppsats refererar till Sfard refererar jag till hennes artikel skriven 1991. Därför kommer jag i fortsättningen inte att skriva ut årtalet.

[6] Reifikation kommer från latinska *res* (”sak”) och *facere* (”göra”) och betyder förtingligande, alltså att föreställa sig någon komplex företeelse som ett objekt, ett ting, som kan manipuleras och betraktas från olika håll. Det tillhörande verbet är *att reifiera något.*



Figur 1. Utvecklingen av talbegreppet illustrerat med hjälp av Sfards tre-stegs-modell i spiralform.

2.2.1 Det strukturella och det operationella

Att ha ett strukturellt synsätt i mötet med matematik innebär att kunna referera till det abstrakta matematiska begreppet som om det var ett verkligt ting. Det innebär även att kunna uppfatta hela begreppet ”at a glance” (Sfard, 1991:4) och att kunna manipulera det som en helhet utan att behöva tänka på begreppets små nyanser och egenskaper. Eller som Hadamard (1949) beskriver: ”I need [an image] in order to have a simultaneous view of all elements… to hold them together, to make a whole of them…; to achieve synthesis… and give the concept its physiognomy”. Att istället tillämpa ett operationellt synsätt innebär att uppfatta ett begrepp som en process som innebär bl. a. att se begreppet som ett verktyg. Hos likhetstecknet blir de två synsätten tydliga: Det kan ses som ett symbol för identitet, vilket är det strukturella sättet att se på saken, medan det även kan ses som ett ”kommando” för att utföra en operation, vilket vore en operationell uppfattning av likhetstecknet. Medan den strukturella uppfattningen kan sägas vara omedelbar och integrativ, är den operationella snarare dynamisk, sekventiell och detaljerad.

Sfard argumenterar för att dessa två sätt att ta sig an matematiska begrepp, trots att de på första blick verkar inkompatibla – hur kan något vara både en process och objekt på samma gång? – egentligen kompletterar varandra. Hon tar avstamp i liknande uppdelningar som har gjorts då olika teoretiker har försökt beskriva matematiken och matematiskt tänkande. Hon nämner Halmos (1985) och Anderson (1976) som ställer den abstrakta och den eller procedurbetonande matematiken mot varandra. Liknande uppdelningar görs av Henrici (1974), som delar in matematiken i en dialektisk och en algoritmisk del samt Piagets (1971) kategorisering av matematiskt tänkande i ett figurativt, respektive operativt sådant. Piaget förtydligar att det *figurativa* refererar till statiska tillstånd och därmed kan sägas hänga samman med Sfards idé om ett strukturellt synsätt, medan det operativa handlar om transformationer (Piaget, 1971) och hänger nära samman med det operationella synsättet. Förutom uppdelningen av själva matematiken och det matematiska tänkandet har även uppdelningar av den matematiska förståelsen gjorts. Lesh och Landau (1983) har definierat kategorierna *conceptual* och *procedural* förståelse medan Skemp (1976) gör uppdelningen instrumentell och relationell förståelse. Som nämnt ovan utmanar Sfard det dikotomiska i alla dessa uppdelningarna och menar att hennes uppdelning – strukturellt vs. operationellt – snarare är en dualism än en dikotomi. En dikotomi innebär en uppdelning av en helhet i två separata, ömsesidigt uteslutande delar (Wikipedia, 2018), medan Sfard med en dualitet menar en uppdelning av en helhet i två varandra kompletterande delar.

Det är inte ovanligt att ett strukturellt tankesätt inom matematiken (och andra områden i livet för den delen) anses vara överlägset det operationella, att ”the special ability to develop a structural conception is what distinguishes mathematicians from ’mere mortals’” (Sfard, 1991:9-10). Men Sfards tanke om att de två synsätten inte går att separera från varandra och bilder en dualitet gör det i princip överflödigt att ens diskutera vilket av de två synsätten som är överlägset det andra. Något som däremot ryms i Sfards teori är att en operationell förståelse av ett begrepp kan förutsätta en strukturell uppfattning av begreppet och tvärtom. Bemästrandet av procedurer, alltså det operationella, ligger i många fall till grund för en mer strukturell förståelse, medan det finns visst matematiskt innehåll – ofta geometriskt sådant – där ett operationellt tillvägagångssätt oftast föregås av en strukturell uppfattning i den studerandes förståelseprocess. Ett exempel på det senare fallet är introducerandet av cylindern och uträknandet av cylinderns volym. Ett vanligt sätt för en lärare att introducera detta skulle vara att visa en bild på en cylinder, påpeka bl. a. att basen är cirkelformad, för att sedan introducera formeln $V = \pi r^2 h,$ som tack vare den grafiska, objekt-fokuserade introduktionen antagligen blir mer lättillgänglig och intuitiv än utan en sådan introduktion.

I sin artikel analyserar och nyanserar Sfard distinktionen mellan den strukturella och den operationella uppfattningen av matematiska begrepp. I figur 2 illustreras denna distinktion med hjälp av en tabell, där den ena spalten exemplifierar ett strukturellt, den andra ett operationellt sätt att se på olika matematiska begrepp. Till exempel kan en individ associera funktionsbegreppet till ordnade par vilket indikerar en strukturell förståelse, eller så ser individen funktioner som en regel som tar en från ett x-värde till det tilldelade y-värdet och vice versa, vilket är ett tecken på att individen snarare har en operationell förståelse av begreppet.

	Structural	Operational
Function	Set of ordered pairs (Bourbaki, 1934)	Computational process or Well defined method of getting from one system to another (Skemp, 1971)
Symmetry	Property of a geometrical shape	Transformation of a geometrical shape
Natural number	Property of a set or The class of all sets of the same finite cardinality	0 or any number obtained from another natural number by adding one ([the result of] counting)
Rational number	Pair of integers (a member of a specially defined set of pairs)	[the result of] division of integers
Circle	The locus of all points equidistant from a given point	[a curve obtained by] rotating a compass around a fixed point

en

Figur 2. Distinktionen mellan strukturell och operationell förståelse exemplifierat med hjälp av olika matematiska innehåll (Sfard, 1991:5)

Förståelsen av just funktionsbegreppet undersöks i en studie gjord av Vinner och Dreyfus (1989), där deltagarna bland annat skulle ge exempel på en funktion där alla funktionsvärden är lika. Vissa svarade mera generellt med $y = c,$ andra med specifika exempel som $y = 5.$

Dessa svar visar på en strukturell förståelse hos deltagarna. Andra deltagare gav istället exempel som $y = \frac{x}{x}$ eller $y = 0x$, vilket kan antas vara ett uttryck för operationell uppfattning av funktioner – en måste alltid *göra något* med x *för att få ut* ett *y*-värde. Ytterligare ett exempel är de rationella talen. En operationell förståelse visar sig i att en individ ser rationella tal som resultatet av en division av två heltal, medan en individ med en strukturell förståelse skulle beskriva rationella tal som ordnade par.

2.2.2 Tre-stegs-modellen

I följande tre avsnitt redogörs de tre stegen i en av Sfards utvecklade modeller som beskriver hur matematisk förståelse utvecklas. Här sätts de olika stegen i modellen först i relation till matematisk förståelse i allmänhet för att sedan exemplifieras mer specifikt med hjälp av funktionsbegreppet och derivatan.

2.2.2.1 Internalisering

Då ett nytt begrepp introduceras, lär den studerande vanligtvis känna olika procedurer som kan utföras med hjälp av det nya begreppet. Efter ett tag blir den studerande skicklig i att utföra dessa procedurerna, hon börjar nu att *internalisera* dem. För att kunna appliceras, analyseras eller jämfört behöver begreppet inte längre bli utfört steg för steg. Då en elev möter funktionsbegreppet för första gången är det vanligt att hon stöter på övningsuppgifter där hon ska räkna ut olika *y*-värden med hjälp av givna *x*-värden och vice versa. I denna fas är det även vanligt att rita grafer med hjälp av värdetabeller. Förståelsen av till exempel funktioner präglas i internaliseringsfasen av bland annat algebraiska procedurer då olika *x*- och *y*-värden beräknas samt på värdetabeller som används som hjälpmedel för att kunna rita grafer. Grafer används i denna fas vanligtvis som verktyg för att läsa av olika *y*- eller *x*-värden eller för att få en bild av ett visst händelseförlopp. Ett operationellt synsätt är oftast dominerande i denna fas. Deriveringen av $f(x) = x^2$ hos en student som håller på att internalisera derivatan skulle kunna se ut på följande vis:

$$f(x) = x^2$$
$$f'(x) = 2x$$

Den studerande behöver inte skriva ut mellansteget $f'(x) = 2 \cdot x^{2-1}$.

2.2.2.2 Kondensering

Med *kondensering* menar Sfard den fas då längre procedurssekvenser ”pressas samman” till mera hanterbara enheter. I detta stadium börjar den studerande kunna tänka på procedurer som helheter, utan att behöva utföra dem; procedurer blir allt mer intuitiva. Det är i denna fas som det nya begreppet börjar ta en tydligare form i den studerandes huvud. Då funktionsbegreppet utvecklas hos den studerande, kännetecknas kondenseringsfasen av att den studerande till exempel kan titta på en funktion och tänka sig hur grafen ungefär kommer att se ut. När till exempel funktionen $f(x) = x^2$ är given kan en individ som i sin förståelse av begreppet befinner sig i kondenseringsfasen snabbt se att funktionsvärdet är samma då $x = 2$ och då $x = -2$, och kommer till exempel inte behöva göra en utförlig värdetabell för att kunna rita upp funktionsgrafen. Det blir även möjligt för eleven att tänka igenom lösningen av ett matematiskt problem. I arbetet med ett extremvärdesproblem kan eleven till exempel tänka att hon först ska derivera funktionen för att sedan sätta $f'(x) = 0$, vilket ger henne ett eller flera *x*-värden som hon sedan sätter in i ursprungsfunktionen för att få fram extrempunktens eller extrempunkternas y-värde(n). Eleven kan i denna fas, som beskrivet ovan, tänka på procedurer som helheter. Hon behöver inte längre utföra dem för att de ska framstå som meningsfulla.

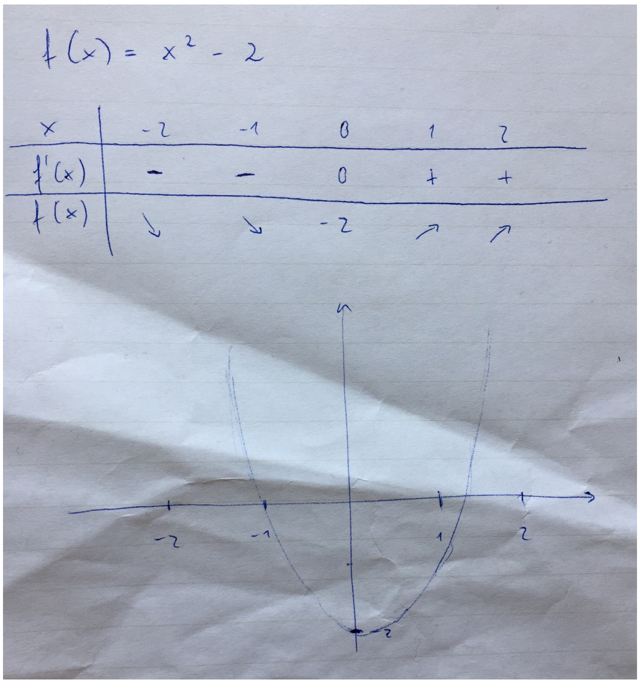
2.2.2.3 Reifikation

Först när en individ kan uppfatta ett begrepp ungefär som ett rumsligt objekt, som har olika egenskaper och kan manipuleras och betraktas från olika håll, kan hon sägas ha *reifierat* begreppet. Sfard menar att det i detta steg händer ett *ontologiskt skifte* – den plötsliga förmågan att se något bekant i ett helt nytt ljus. Medan första och andra steget, internalisering och kondensering, sker gradvist, kan detta steg sägas likna ett *instantaneous quantum leap*, ett ögonblickligt kvantsprång, likt vatten som värms upp. Uppvärmningen sker gradvis, men övergången mellan flytande till gasformigt sker plötsligt vid exakt 100 °C. I utvecklandet av funktionsbegreppet kan en individ som befinner sig i denna förståelsefas föreställa sig funktioner – både framställt som uttryck men även som grafer, värdetabeller och teckentabeller – som manipulerbara objekt med olika egenskaper. För att komma tillbaka till exemplet $f(x) = x^2$, så begriper en individ som är i reifikationsstadiet egenskaper som att funktionen är symmetrisk, att den är deriverbar, att $\lim_{x \to \pm\infty} x^2 = +\infty$ och att det går att göra operationer som $(f(x))^2$ eller $\int f(x)dx$. Individen är nu redo att övergå till nästa abstraktionsnivå, att lära sig procedurer som förutsätter att de nu reifierade funktionerna med alla sina egenskaper kan hanteras som självständiga objekt. Ett exempel på en sådan procedur är beräkning av integraler. Sfard menar att reifikationen sker just när ”an interiorization of higher-level concepts (those which originate in processes performed on the object in question) begins” (Sfard, 1991:20), alltså då ett begrepp på en högre abstraktionsnivå som förutsätter begreppet i fråga börjar internaliseras.

Något som, enligt Sfard, på ett avgörande sätt bidrar till reifikationen av matematiska koncept är beteckningar, symboler, grafer och andra representationer som på något vis illustrerar det givna begreppet som ett objekt. Tallinjen, som stödjer reifikationen av negativa tal, är ett exempel på en sådan representation. Barn som har internaliserat addition, subtraktion och multiplikation med positiva tal associerar addition till exempel med att summan av två positiva termer blir större än varje term för sig. Mötet med summan av ett positivt och ett negativt tal, till exempel $(-4) + 6 = 2$, kan då leda till förvirring. Introducerandet av tallinjen kan bidra till att barnen utvecklar sin begreppsbild av addition från ”en summa av två positiva termer är alltid större än varje term för sig” till att till exempel ”absolutbeloppet av en summa av två positiva respektive negativa termer är alltid större än absolutbeloppet av varje term för sig. Detta gäller inte för summan av ett negativ och ett positivt tal”.

Ytterligare ett exempel på en representation som underlättar reifikationen av ett begrepp är teckentabellen [figur 3, s. 9]. Teckentabellen används på olika sätt hos olika lärare och stödjandet av reifikationen av funktioner inte på ett lika självklart sätt som tallinjen stödjer reifikationen av negativa tal. Vissa matematiklärare ser och behandlar teckentabellen enbart som ett hjälpmedel i ritandet av funktionsgrafen, alltså något med fokus på den operationella förståelsen. Eleven får möjlighet att utveckla sin förståelse av funktioner och funktionsgrafen från att ha internaliserat procedurer till att befinna sig i kondensationsstadiet. Andra lärare använder teckentabellen som både ett verktyg samt en representation av funktioner. Till exempel i figur 3 har teckentabellen ritats så att teckentabellens x-värden hamnar precis ovanför koordinatsystemets x-värden. Detta sätt att avbilda en funktions teckentabell och graf stödjer, enligt vissa, elevers förmåga att se sambanden mellan derivatans värde och funktionsgrafens lutning

Sfards tre-stegs-modell skulle kunna ses som en tre-stegs-cykel eller tre-stegs-spiral, då de tre stegen sker om och om igen. Efter att ha gått igenom de tre stegen med ett visst begrepp har den studerande hamnat i steg ett igen, i internaliseringsfasen, med det nya begreppet på ett



Figur 3. En funktion med tillhörande teckentabell och graf, avbildat på ett sätt så att teckentabellen och funktionsgrafen direkt kan relateras till varandra.

lite högre abstraktionsnivå som förutsätter det begrepp som nyligen reifierats. Som Sfard betonar sker reifikationen av ett visst begrepp då en ny procedur eller ett nytt begrepp börjar internaliseras. En individ har gått igenom förståelseprocessens alla tre steg först när hon är tillbaka på steg ett, internaliseringsfasen, fast på nästa abstraktionsnivå. Där börjar cykeln om och den nya rundan kan avslutas först när nästa har börjat. Kort sagt så förutsätter internalisering av ett nytt begrepp förtingligandet av de begreppen och procedurerna som ligger till grund för det nya begreppet. Här hamnar vi, som Sfard själv problematiserar, i ett dilemma, eftersom reifikationen av ett begrepp förutsätter internaliseringen av nästa samtidigt som internaliseringen av ett begrepp förutsätter reifikationen av det förra. Vi har alltså att göra med två företeelser som förutsätter varandra, vilket är ett cirkelresonemang och därmed ett fel i argumentationen.

3 Metod

I detta kapitel redogörs för urvalet av intervjupersoner samt för de olika metoderna som användes då intervjuerna genomfördes, transkriberades samt analyserades. Kapitlet avslutas med några ord om studiens trovärdighet samt en beskrivning av de forskningsetiska principerna jag under studiens gång har tagit i beaktan.

3.1 Urval

För att undersöka elevers begreppsbildning och förståelse av *funktioner* och *derivatan* valde jag att göra en intervjustudie på en gymnasieskola i Västra Götaland. Intervjupersonerna är tre elever från samma klass som går i årskurs tre på ekonomiprogrammet. De har alltså haft samma matematikundervisning sedan årskurs ett. Då jag genomförde intervjuerna läste eleverna kursen matematik 3b. Det finns flera anledningar till att just denna grupp elever valdes ut. För det första har de under veckorna före intervjuerna jobbat med det för studien relevanta innehållet *funktioner* och *derivatan*. För det andra har jag viss inblick i elevernas personliga matematikundervisning då jag under veckorna före intervjun var på min sista verksamhetsförlagda utbildning (VFU) på elevernas gymnasieskola. Under VFU:n höll jag i stora delar av deras matematikundervisning.

3.2 Kvalitativ fallstudie

Studien består av en enskild intervju med varje elev. Varje intervju består av å ena sidan ett samtal mellan mig och en av eleverna, följt av en skriftlig uppgift [bilaga 1] som respektive elev fick arbeta med under intervjun. Intervjuerna är ca 45 minuter långa. Intervjuguiden som jag under intervjuerna utgick ifrån finns som bilaga till denna uppsats [bilaga 2]. Metoden jag har använt mig av är den halvstrukturerade livsvärldsintervjun, med en fenomenologiskt-hermeneutisk ansats. En fenomenologisk ansats används i kvalitativa studier generellt då forskaren intresserar sig för fenomen utifrån ”aktörernas egna perspektiv och beskriver världen som den upplevs av dem” (Kvale & Brinkman, 2014:44). En utgångspunkt inom fenomenologin är antagandet ”att den relevanta verkligheten är just vad människor uppfattar att den är” (Kvale & Brinkman, 2014:44). Det som är relevant i denna studie är just hur de intervjuade eleverna upplever det matematiska innehållet som presenteras för dem under intervjuerna. I den delen av analysen då jag försöker greppa elevernas förståelse för funktioner och förstaderivator, hur deras individuella begreppsbildning ser ut, utgår jag från en metod som kallas hermeneutisk meningstolkning. En modell som förekommer inom den hermeneutiska meningstolkningen är den hermeneutiska cirkeln, även kallad *den hermeneutiska spiralen*. En viktig aspekt i den hermeneutiska cirkeln är den ständiga rörelsen ”bakåt och framåt mellan delar och helheten” (Kvale & Brinkman, 2014:252). Denna rörelse hittar vi såväl i Tall och Vinners teori om den mentala begreppsbilden såväl som i Sfards operationell-strukturell-dualism. När det gäller en individs mentala begreppsbild kan vi se ett begrepp som helheten i sagda rörelse, medan alla bilder, egenskaper och procedurer som en individ associerar med begreppet utgör delarna. Även den strukturella och den operationella synen på ett begrepp kan sägas utgöra delar i begrepps-helheten. Förutom att jag i denna uppsats utgår ifrån att eleverna förstår och tolkar begrepp i enlighet med den hermeneutiska cirkeln, följer även min tolkning av meningen i intervjuerna den hermeneutiska traditionen. Medan det fenomenologiska i min metodik alltså lägger grunden för mitt förhållningssätt till elevernas möten med verkligheten, är det hermeneutiska snarare ett sätt att se på elevernas begreppsbildning och förståelseprocess samt ett rättesnöre i min tolkning och analys av intervjuerna.

Kvale och Brinkman (2014) tar upp två kontrasterande föreställningar om intervjun som kunskapskälla. Å ena sidan att den kunskap som fås genom intervjuer ska ses som en rapport om den intervjuades tidigare erfarenheter, å andra sidan att intervjun är en redogörelse av kunskapen som producerats intersubjektivt mellan intervjuaren och den intervjuade. Kunskapen som fås genom de i denna studie genomförda intervjuerna kan ses som både beskrivande och rapporterande. Intervjuns första del, där eleverna svarar på frågor som ”vad är en funktion?”, ger kunskap i form av en rapport om den kunskap och de föreställningar intervjupersonerna har med sig in i intervjun. Intervjuns andra del däremot, där eleverna löser och belyser ett matematiskt problem med både algebraiska och grafiska verktyg, möjliggör en redogörelse av den under intervjun producerade kunskapen. Den produceras intersubjektivt, då jag som intervjuare och matematiklärare fanns där som hjälp och bollplank då eleverna jobbade med uppgiften.

3.3 Genomförandet av intervjuerna

Intervjuerna hade tre komponenter; samtal mellan mig och intervjupersonen, visuell kommunikation i form av teckningar och uträkningar med hjälp av papper och färgpennor och till sist visualisering av funktioner och derivatan med hjälp av GeoGebra[7]. Jag valde att inkludera olika kommunikationsformer i intervjun, då enbart verbal kommunikation möjligtvis hade gett en för ensidig uppfattning om såväl elevernas mentala begreppsbilder som det strukturella och det operationella i elevernas sätt att ta sig an matematik. Som Sfard betonar stödjer visuella representationer ett mer strukturellt sätt att se på matematiska begrepp, medan verbala beskrivningar och algebraiska uträkningar snarare framhäver det operationella i individers synsätt. Som det sägs ibland: En bild kan säga mer än tusen ord. Med inkluderingen av olika kommunikationsformer i intervjuerna hoppas jag alltså att få en nyansrik uppfattning om elevernas bild av och förhållningssätt till funktioner och derivatan, en uppfattning som förhoppningsvis rymmer både det strukturella och operationella synsättet.

Under intervjuerna har jag varit mycket medveten om maktasymmetrin i samtalen. Stor tydlighet om syftet med studien och om mina intentioner har förhoppningsvis bidragit till att eleverna blev motiverade till att vara öppna och ärliga under hela samtalet. Utöver det var jag noggrann med att försäkra eleverna om att det inte är deras prestationer som kommer att avgöra om deras deltagande i studien är givande, jag intresserar mig för deras tankar och associationer kring funktions- och derivatabegreppet; hur nära eller långt associationerna än må vara från de formella definitionerna. Jag hoppas att dessa tydliggöranden till viss del eliminerade de hämningarna som elever kan uppleva i en lärar-elev-situation på grund av den i sådana situationer rådande maktasymmetrin.

3.4 Transkription av intervjuerna

Det som undersöks i denna studie är bland annat individers begreppsbilder av olika matematiska företeelser. Eftersom det är omöjligt att kliva in i en individs hjärna och ta kort på hennes mentala bilder av olika begrepp, är ett sätt att komma åt dessa bilder att be individen i fråga berätta om den, illustrera sina tankar och berättelser samt skriva ner dessa på papper. Just för att det bara är intervjupersonernas utsagor och anteckningar jag har tillgång till i beskrivandet och tolkandet av deras respektive begreppsbildningar och förståelseprocesser har jag valt att göra transkriptionen av intervjuerna ordagrant. Jag valde att inkludera utfyllnadsord som ”ehm...” i transkriptionerna för att förtydliga när intervjupersonen behövde fundera eller blev osäker. I de fallen där intervjupersonen funderade längre än någon sekund skrev jag *(funderar)* i transkriptionen. Som Kvale och Brinkman (2014) betonar är intervjutranskriptionen en översättning från det muntliga språket språket till det andra, från det muntliga till det skriftliga,

[7] GeoGebra är ett datorprogram som i princip fungerar som en grafritande miniräknare med extra funktioner. Programmet kan hantera algebra, geometri och analys.

där konstruktionen av utskriften bygger på olika beslut och bedömningar som bör ha sin grund i avsikten med transkriptionerna och studiens syfte. Att inkludera bland annat saker som ”ehm...” i första transkriptionen motiveras med att en sådan ordagrann utskrift möjligtvis avslöjar nyanser i intervjupersonernas tankesätt och förståelse som annars kanske förblivit i det dolda. Dock har jag valt att i den här rapporten återge de olika citaten i en mer formaliserad stil så att citaten blir mindre mödosamma att läsa, just för att ”ordagranna intervjuutskrifter skapar hybrider, artificiella konstruktioner som inte är adekvata för vare sig det levda muntliga samtalet eller den skrivna textens formella stil” (Kvale & Brinkman, 2014:218). Eftersom jag för just läsflödets skull har gjort ändringarna i citaten har jag valt att inte markera de ställena där ändringar har gjorts. Kort sagt så har jag försökt att ha kvar kärnan i det som sägs. Efter citaten förtydligas hur och varför jag uppfattar, tolkar och analyserar det som sägs på det viset jag gör.

3.5 Kodningen och analysen av intervjuerna

Metoden jag använt mig av under kodningen och analysen av det empiriska materialet kallas teoretisk tematisk analys (Braun & Clarke, 2006). Den teoretiska tematiska analysen innebär att kategorierna som det empiriska materialet kodas utifrån är givna av teorin. Denna studies empiriska data kodades utifrån såväl Sfards som Tall och Vinners teorier. Jag kategoriserade all data i tre kategorier, *Sfard, Tall och Vinner* och *intervjuaren påverkar.* I de första två kategorierna ingår ett antal koder. Koderna jag använde för att undersöka de av Sfard beskrivna fenomenen är följande: *Internalisering, kondensering, förtingligande, operationellt synsätt* och *strukturellt synsätt.* För att undersöka intervjuernas resonans med Tall och Vinners teori om den mentala begreppsbilden använde jag mig av koderna *värde vs. lutning, den mentala begreppsbilden* och *intervjuaren påverkar.* Koden *den mentala begreppsbilden* består av de två underkategorierna *begreppsdefinition derivata* och *begreppsdefinition funktioner*. Många av elevernas utsagor kodades utifrån flera koder. Till exempel kan en elevs personliga begreppsdefinition av funktioner säga någonting om till exempel hur eleven tillämpar ett operationellt synsätt i just denna situation. Därmed skulle utsagan kodas som både *begreppsdefinition funktioner* och *operationellt synsätt.* Den tredje kategorin, *intervjuaren påverkar,* formulerade jag eftersom det under analysen är mycket viktigt att vara medveten om när jag som intervjuare har lotsat den intervjuade eleven fram till ett svar och när eleven har varit så självständig som situationen tillåter henne att vara.

3.6 Forskningsetiska principer

Vetenskapsrådet (2002) har formulerat fyra forskningsetiska principer, som jag är förpliktad att ta hänsyn till. Den första principen innebär att deltagarna blivit informerade om både hur informationen jag som forskare samlar in kommer användas och intervjuernas upplägg. Den andra principen innebär att deltagandet är frivilligt och att deltagarna måste bli informerade om att de när som helst får avbryta intervjun om de så vill. Det är även viktigt att deltagarna innan start godkänner att intervjun spelas in. Princip nummer tre går ut på att intervjupersonerna måste vara anonymiserade i texten. Jag har valt att av anonymitets skäl inte heller specificera elevernas skola. Den fjärde principen kräver att det insamlade materialet endast nyttjas i denna studies syfte. Inspelningarna kommer alltså raderas då inte längre behövs för denna studie.

3.7 Trovärdighet

För att en studie kan sägas vara trovärdig behöver den vara både reliabel och valid. Min medvetenhet om min roll under genomförandet av intervjuerna samt i kodandet av dessa säkerställer reliabiliteten i denna studie. I analys och diskussion av det empiriska materialet är jag genomgående noggrann med att förklara tydligt varför jag tolkar elevernas utsagor på det vis jag gör. Elevernas anteckningar och ritningar är ofta till hjälp i dessa förklaringar. Utöver reliabiliteten utgörs en studies trovärdighet även av dess generaliserbarhet. Generaliseringen som utifrån denna studie kan göras är naturalistisk, för att låna ett begrepp av Kvale och Brinkman (2014:311). Naturalistiska generalisering utvecklas genom personlig erfarenhet; det jag som forskare under studiens gång förvärvar är till stora dela tyst kunskap om hur elever ser på matematik, tänker och resonerar. Denna tysta kunskap verbaliseras i denna studie och övergår därmed ”från tyst kunskap till explicit påståendekunskap” (Kvale & Brinkman, 2014:311). Genom denna verbalisering kan läsare av denna studie såväl ta del av mina erfarenheter och förhoppningsvis få djupare förståelse för de i denna studie presenterade teorierna, då dessa blir greppbara genom att förankras i empiri. Utöver reliabilitet och generaliserbarhet är även studiens validitet given, då studien konsekvent besvarar de behandlade forskningsfrågor.

4 Resultat

I detta kapitel presenteras en sammanfattning av studiens empiriska data. Kapitlet är uppdelat i tre avsnitt, ett avsnitt per intervjuperson. Anledningen till denna uppdelning är att läsaren ska få en bild av de tre olika eleverna och elevernas tankesätt, då det är undersökandet av just individuella begreppsbildningar som är ett av syftena med denna studie. Sammanfattningen görs i enlighet med den hos Kvale och Brinkman (2014) beskrivna metoden för meningskoncentrering. Denna meningskoncentrering görs genom kategorisering av meningen i intervjupersoners uttalanden. Kategoriseringen jag gjorde är både teori- och datastyrd, vilket enligt Kvale och Brinkman (2014) tjänar flera syften. Ett av syftena med en kategoriseringen är att ge struktur åt det innehållsmässigt ofta komplexa och formmässigt kaotiska empiriska materialet. Ett annat syfte är att en kategorisering underlättar jämförelsen av de olika intervjuerna. I vårt fall kommer olika elevers begreppsbildning samt deras tillvägagångssätt i samtalet om och lösningen av en uppgift att jämföras.

4.1 Lena

En av de första frågorna jag ställde under intervjuerna var vilka styrkor och svagheter eleverna anser sig själva ha i matematik. Lena verkar ha en tydlig bild av både sina kunskaper och sin utveckling inom matematikämnet. Hon betonar att hon har lätt för algebra, då hon tycker att det är enkelt att komma ihåg procedurerna som krävs för att räkna ut saker och ting.

1) *Lena: Jag har definitivt svagheter i problemlösning. Jag har alltid tyckt att de här större frågorna vart jobbiga, såna som är mer läsförståelse. Annars med uppgifter som är ganska simpla och utan mycket text, när det till exempel står "derivera", då har jag väl ändå lätt att komma ihåg metoden för det. Men det är väl när det är problemlösning så har jag svårt o hitta de grejerna som ska sitta i formlerna. Liksom sätta rätt tal på rätt plats. Sen så har jag alltid tyckt att det vart svårt med geometri. Men jag tycker ändå det är kul med längre uträkningar typ eller lite sånt... Ganska sådär vad ska man säga, typ bara paff på med siffror. Det är kul! Man får upp lite fart i det.*

Även ekvationssystem tycker hon om att jobba med. Problemlösning och geometri har hon däremot svårigheter med, enligt henne själv. Efter att Lena hade berättat om sin matematiska självbild gick intervjun över till att handla om funktionsbegreppet. Jag bad henne berätta för mig vad en funktion är enligt henne. Hon gav följande svar:

2) *Lena: Y är lika med nånting för att jag tänker oftast att y... jag ser framför mig i huvet*
$y = f(x)$... *kanske det är heeelt fel men jag tänker på den här formuleringen för jag vet att den används ofta.*

När vi senare under intervjun pratar om den grafiska framställningen av derivatan verkar hon mindre säker än när hon pratade om funktioner. I följande utdrag ur intervjun ber jag henne rita derivatans graf till en tredjegradsfunktionen [figur 4]:

3) *Lena: Om man skulle räkna ut derivatan precis här… Jag vet inte om man hade satt en punkt. Eller två punkter bredvid varandra? Men alltså antingen faller det eller så ökar det o då förändras ju lutningen o då kan ju inte derivatan beskriva liksom hela det här området.*

Lea: Så vad lär derivatans värde vara vid de punkterna?

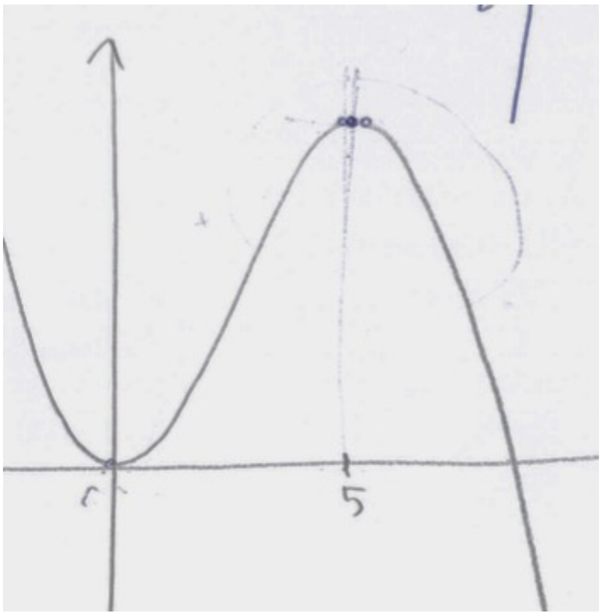
Lena: Noll… Är det bara ett streck då? Typ så? [Ritar ett lodrätt streck genom grafens maximipunkt]

Lea: Du ritar ett streck som ser ut som en symmetrilinje

Lena: Ja det gör det. Så där derivatan är noll är symmetrilinjen

Lea: Är det derivatans värde som är noll eller...?

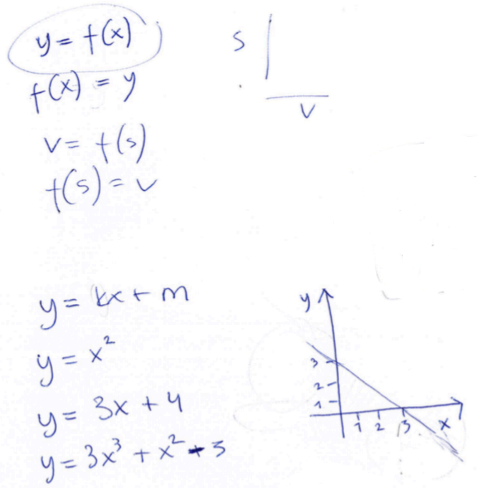
Lena: Nej men lutningen i den punkten. Derivatan är väl... betyder inte det att derivatan är liksom lika med... lutningen i en viss punkt på grafen?



Figur 4. Lena ritar punkter och en linje som ska föreställa derivatan.

Precis som hos de andra eleverna verkar det i Lenas informella definition av derivata ingå att derivatan beskriver lutningen i en viss punkt på grafen. Hon förklarar att derivatan är noll precis där ”symmetrilinjen” är. Att hon använder begreppet symmetrilinje i beskrivningen av en tredjegradsfunktion indikerar att hennes förståelse av begreppet *symmetrilinje* inte är kopplat enbart till andragradfunktioners egenskap av att vara symmetriska. Istället verkar hon koppla samman begreppet *symmetrilinje* med extrempunkter i allmänhet, vilket är en felaktig användning av symmetrilinjen, då de flesta funktionerna – bl. a. tredjegradsfunktionen –inte är linjesymmetriska. Dock behövs betonas att det är först då jag som intervjuare som kallade den av henne ritade lodräta linjen för ”symmetrilinje” som hon börjar prata om den, det är alltså inte säkert att hon hade tagit upp begreppet själv.

Efter att ha pratat om funktioner och förstaderivator i allmänhet övergår vi till att arbeta med uppgiften [bilaga 1]. Trots att Lena vid flera tillfällen säger att hon har svårt för ”mattespråket”, upplever jag att hon har en matematisk vokabulär som hon använder sig av på ett naturligt sätt. Även hennes matematiska skriftspråk verkar ske naturligt, hon skisserar koordinatsystem på ett självklart vis och hennes uträkningar har ett visst flyt. Några exempel på detta går att se i figur 5.



Figur 5. Lena skriver och ritar exempel på funktioner.

Lena verkar som sagt trygg i algebraiska uträkningar, vilket stämmer överens med hennes matematiska självbild. Denna trygghet visar sig återigen då vi börjar arbeta med uppgiften. Det första hon säger är ”ska jag bara lösa den här nu?”. Hon verkar inte bli stressad av uppgiften och plockar direkt ut viktig information ur frågeställningen, vilket vittnar om att Lena inte har några större svårigheter med läsförståelse:

> 4) *Lena: Man kanske bara kan … det den vill är ju vilket värde på x som ger största möjliga volym. Så det är ett x-värde man ska komma åt. Och när de skriver "beräkna med hjälp av derivata" så tänker jag att jag först ska skriva ut alltså själva uttrycket och derivera det.*

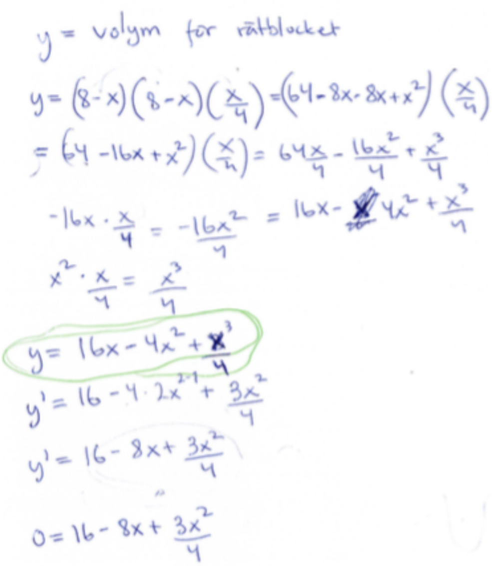
Någon gång då hon försöker minnas proceduren som krävs för att lösa extremvärdesuppgiften, har hon svårigheter med att komma ihåg alla procedursteg:

> 5) *Lena: Det är ju nåt räknesätt där, jag vet att vi gjort det innan också. Man gör det här först o sen så gör man det andra. Men det är ju nåt steg där emellan innan man sätter in det i ursprungsfunktionen…*

Lena kan i sina beräkningar tänka några steg framåt, vilket blir tydligt då hon skriver upp uttrycket för rätblockets volym.

> 6) *Lea: Vad står uttrycket* $f(x) = 16x^2 - 4x + \frac{x^3}{4}$ *för?*
>
> *Lena: Volymen på det där rätblocket. Och det är förenklat egentligen. Man kan skriva det så men man kan skriva det såhär också [pekar på polynommultiplikationen* $(8-x)(8-x)\frac{x}{4}$*]. Men det första uttrycker känns ju lättare o derivera, det känner man igen.*

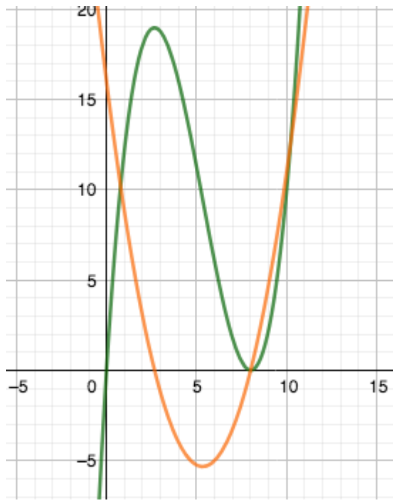
Det uttryck hon först får fram är $y = (8-x)(8-x)(\frac{x}{4})$. Då hon funderar över om hon ska multiplicera parenteserna tänker hon på att hon senare kommer att behöva derivera funktionen och inser att det kommer att bli svårt att beräkna derivatan om inte parentesuttrycken först multipliceras med varandra. Lena är i allmänhet noggrann då hon utför beräkningar och verkar inte tycka om att hoppa över steg för att minska risken för slarvfel. Till exempel då hon deriverar termen $4x^2$ skriver hon $4 \cdot 2x^{2-1}$ och först i nästa rad $8x$ [figur 6].



Figur 6. Lenas beräkningar under arbetet med rätblock-uppgiften.

I det stora hela upplever jag att Lena under de tillfällen under intervjun då vi tittar på och pratar om olika grafer inte verkar vara lika trygg som i dem algebraiskt präglade momenten. Hennes osäkerhet blir tydlig framför allt då det kommer till att rita och tolka grafer till en given funktions *derivata*. Ett exempel på en sådan situation är då vi i slutet på intervjun med hjälp av GeoGebra ritade funktionsgrafen till uttrycket för rätblockets volym samt denna funktions derivata [figur 7]. Lena kommenterar:

> 7) *Lena: Okej jag ska säga vad jag tycker är krångligt nu. Du sa ju att det oranga strecket [se figur 7] ska vara derivatan. Men då är ju… Derivatan är ju lutningen i en viss punkt på grafen, men vilken punkt är det?? (skrattar)*



Figur 7. Grafen till funktionen för rätblockets volym (grön) samt grafen till funktionens derivata (orange).

Med Lena har vi alltså att göra med en elev som lätt kommer ihåg metoder och procedurer. Hon har lätt för läsförståelse och algebraiska uttryck medan hennes förståelse av den grafiska framställningen av funktioner och framför allt av derivatan inte verkar vara lika intuitivt. När hon väl kommer ihåg alla steg i en procedur utför hon den med säkerhet. Glömmer hon bort något steg blir hon däremot osäker och verkar sakna verktyg för att komma på vad det bortglömda steget skulle kunna vara.

4.2 Frodo

Eleven Frodo vill gärna förstå innan hon gör. Hon säger om sig själv:

> 8) *Frodo: Det har alltid tagit mycket längre tid för mig att lära mig matte för att jag bara vill förstå alltid. Jag kan till exempel inte acceptera att π är 3,14. Varför är det 3,14? För att jag ska kunna använda det så måste jag förstå hela alltet liksom.*

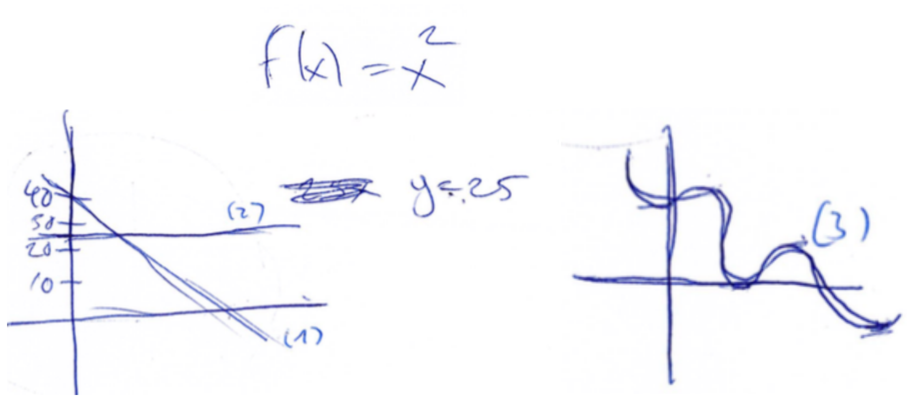
Hon upplever att det tar lång tid för henne att lära sig olika metoder och begrepp, just för att hon inte tycker om att till exempel utföra procedurer där hon inte har förstått varför olika steg ska utföras samt var de eventuella i proceduren förekommande formlerna kommer ifrån. Samtidigt som hon lägger vikt vid att verkligen förstå logiken bakom det hon lär sig är hon även otålig, vilket enligt henne leder till mycket slarvfel.

> 9) *Frodo: Jag hade jättesvårt för till exempel pq-formeln. Varför kan jag bara byta in p och q… Det går ju inte, det är inte logiskt! Varför kan jag byta ut bokstäver mot siffror? Såna där grejer tar lite längre tid, men när jag väl lärt mig dem så sitter det... Sen så är jag väldigt snabb i tanken men det leder ofta till slarvfel. Ibland hänger jag inte med mina tankar och hoppar över ett steg o så tänker jag inte att just det, man borde gjort såhär…*

Senare i intervjun återkommer hon till bilden av att hon inte hänger med sina tankar och att hon ofta har rätt intuition i början när hon ska lösa en uppgift, men att hon sedan inte litar på sin intuition och förlorar sig i olika procedurer. Hennes bild av sina kunskaper inom matematik verkar vara att hon oftast har en helhetsbild av ett begrepp men saknar många av de tillhörande detaljerna som till exempel vissa procedurer och formler. Enligt henne själv saknar hon även tålamod, något som skulle hjälpa henne i framförallt utförandet av långa beräkningar. När vi senare under intervjun pratar om begreppet *funktioner* definierar hon det på följande vis:

> 10) *Frodo: En linje? Alltså en funktion beskriver en händelse eller ett förlopp av tid skulle jag säga. Nämen vänta… Jag kanske har missuppfattat det helt men jag tänker på typ grafer o sånt.*

Frodos personliga definition innefattar förutom grafiska representationer även någon form av händelseförlopp i tid. Under samtalet kring funktioner skriver hon ett algebraiskt exempel och ritar två grafer [figur 8] som hon beskriver i citat 11.



Figur 8. Frodos exempel på funktioner. Jag kallar den räta linjen med negativ lutning för graf 1*, den räta linjen med y'=0 för* graf 2, *grafen längst till höger för* graf 3.

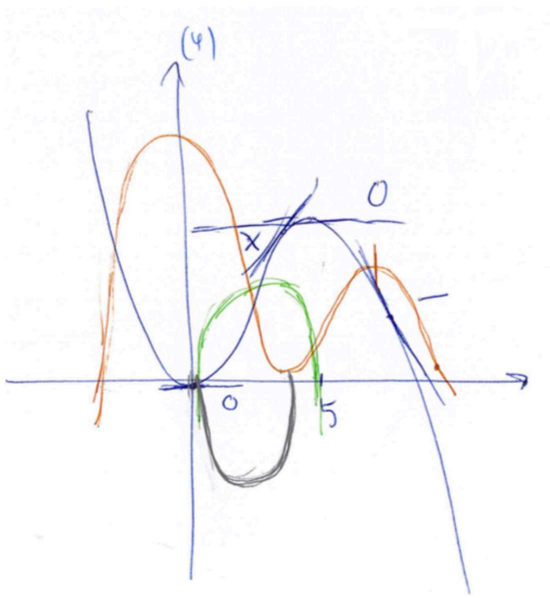
11) *Frodo: K-värdet är negativt och både x-värdet o y-värdet är positiva [figur 8, graf 1]. Den [hon pekar graf 3] har ju både minimipunkter och två maximipunkter, alltså extrempunkter som inte den här [graf 1] har. Jag tycker om dem [graf 1], de är väldigt mycket enklare de här, de är helt raka. Men alltså man måste räkna ut om det finns nollställen, typ nästan fyra stycken av dem, fem om man... [lägger till en minimipunkt i högra änden av graf 3 genom att låta grafen vända uppåt istället för nedåt ...] o så finns det nollställen som det kanske inte finns på samma sätt här [graf 1]. Det finns ju ställen där den [graf 1]skär i både x- och y-axeln men inte där noll är lutningen, utan den har samma lutning genom hela alltet. Och ska den ha samma lutning så får den se ut.... så! [ritar graf 2]*

Begreppsbilden som Frodo verkar ha av funktioner innefattar grafer, både sådana med konstant lutning (räta linjer) samt sådana med varierande lutning. Då hon pratar om graf 1 uttrycker hon sig korrekt kring lutningen, hon säger att *k*-värdet är negativt. Hon nämner *k*-värdet av eget initiativ, vilket tyder på att hon associerar räta linjer inte bara med grafer utan även med formeln $y = kx + m$. Hon ritar efter eget initiativ graf 2, som hon kommenterar med ”och ska den ha samma lutning får den se ut så”. Visst har graf 2 konstant lutning, men det har även graf 1. Det Frodo antagligen ville illustrera med graf 2 är en rät linje som har samma *y*-värde för varje *x*. Här blandas begreppen *lutning* och *y-värde* ihop, något som vi återkommer till i avsnitt 5.4.1 samt i diskussionen i avsnitt 6.3. När det gäller räta linjer verkar växlandet mellan de olika representationsformerna gå smidigt både från algebraiskt uttryck till graf och vice versa. Då hon beskriver graf 3 är hennes kommunikation inte lika tydlig; hon använder till exempel begreppet *nollställe* då hon antagligen menar *extremvärde* eller *extrempunkt.*

Efter att ha pratat om begreppet *funktioner* ber jag henne resonera kring begreppet *derivata*:

12) *Frodo: Alltså förstaderivatan beskriver i en punkt på den här linjen vad det är för lutning i just den punkten skulle jag säga. Alltså om man skulle rita en derivata [ritar tangenter] då skulle det vara lutningen på den i just den punkten. Derivatan är i det här fallet noll [pekar på tredjegradsfunktionens maximipunkt, se figur 9]. Men om man skulle rita här så är lutningen negativ o sen så är det positiv lutning om man skulle rita den här. För att om man tänker siffror så är det värdet, eller liksom lutningen i en viss punkt.*

Då jag ber Frodo rita en graf för derivatan till tredjegradsfunktionen [figur 9] börjar hon göra det utan att tveka, vilket visar att hennes förståelse av begreppet *derivata* innefattar möjligheten att det för det första är möjligt att rita derivatan som graf, för det andra att det med hjälp derivatans graf går att beskriva en funktions lutning. I samband med beskrivningen av såväl räta linjer som tredjegradsfunktionen i figur 9 använder sig Frodo av begrepp som till exempel *positiv lutning, negativ lutning, punkt på linjen* samt *minimi- och maximipunkt* med säkerhet. Då derivatan ska beskrivas avtar hennes säkerhet en aning, hon blandar ihop begreppen *extrempunkt* och *nollställe* – vilket inte är förvånande, då en funktions eventuella extrempunkter motsvaras av derivatans nollställen. Även begreppen *lutning* och *värde* förväxlar hon vid olika tillfällen.



Figur 9. Frodos anteckningar..

I intervjuns sista del, arbetet med uppgiften [bilaga 1], försöker Frodo först att lösa uppgiften genom att testa olika värden. Precis som hon beskrev sig själv i början på intervjun så tänker hon snabbt igenom olika alternativ, hon verkar vilja få överblick:

> 13) *Frodo: Egentligen borde jag gjort en sån fin uträkning där jag multiplicerar sidorna med varandra. Men när jag bara tittar på det så tänker jag att volymen nog blir störst då* $x = 4$*. Volymen blir 16 då. Om man tar nåt större tal på* $\frac{x}{4}$*, då blir det mycket mindre här [pekar på* $8 - x$*] men om man tar ett lägre tal bara för att man ska få högre här [pekar på* $8 - x$*] så blir det noll komma nånting här [pekar på* $\frac{x}{4}$*] vilket gör att om man multiplicerar dem blir det mindre. Så om man till exempel skulle ta* $x = 3$ *[Räknar* $(8-3) \cdot (8-3) \cdot \frac{3}{4} = 18{,}75$*, vilket är större än 16] Ah… så jag tänkte fel.*

I hennes funderingar blir det tydligt att hon känner sig trygg i aritmetiska beräkningar samt huvudräkning. Efter att ha testat olika *x*-värden inser Frodo att hon behöver skriva ett uttryck som beskriver rätblockets volym, *"en sån fin uträkning"*, vilket hon gör utan problem [figur 10].

$$y = \frac{x}{4}(8-x)^2$$
$$y = \frac{x}{4}(64 - 16x + x^2)$$
$$y = 16x - 4x^2 + \frac{x^3}{4}$$
$$y'(x) = 16 - 8x + \frac{3x^2}{4}$$

Figur 10. Frodo beräknar och deriverar uttrycket för rätblockets volym.

Då vi tittar på grafen till volymen i GeoGebra läser Frodo av att den största volymen fås då $x = 2{,}67$. Sedan funderar hon på hur hon skulle räknat ut det på pappret. Hon säger att denna procedurkunskap sitter långt inne. Jag får hjälpa till för att hon ska komma på att nästa steg i den algebraiska lösningen av uppgiften är att lösa ekvationen $f'(x) = 0$.

4.3 Carina

Carina är en elev med väldigt svagt självförtroende i matematik. Då jag bad henne berätta om sina styrkor och svagheter i ämnet svarade hon att hon nog inte har några styrkor. Hon förklarar:

> 14) *Carina: Jag tycker att matte är ett svårt ämne o jag har lite problem med att förstå instruktioner. Det påverkar nästan alla ämnen. Och framför allt matte då. Jag har alltid haft svårt för siffror, liksom att förstå mig på tänket bakom. Det känns som att det är mycket man bara ska förstå, där det bara är såhär. Att det inte är nån rimlig förklaring bakom, jag vet inte...*

Jämfört med Lena verkar Carina inte tycka att det är lika lätt att komma ihåg metoder. Hon säger att det är just utantillkunskapen som krånglar till det för henne:

> 15) *Carina: Jag vet inte hur jag ska beskriva det, men... Jag tycker det är jobbigt när något bara är på ett sätt utan att förstå varför.*

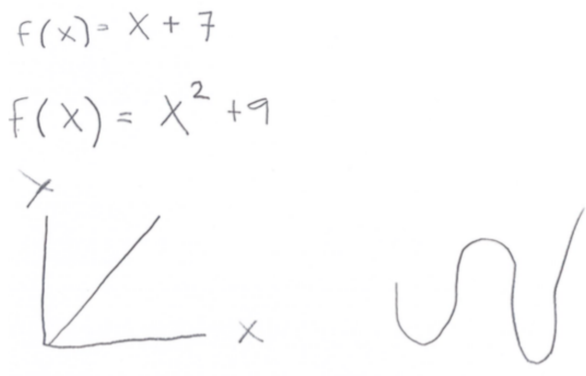
Något som hon tycker är roligt att göra på matten är enkel ekvationslösning:

> 16) *Carina: Lösa ekvationer, det kan jag tycka är kul. Jag vet inte riktigt vad det är som är bra med det men... [fnissar] Jag tycker det går snabbt o enkelt i alla fall.*

Hon berättar under intervjun att hon önskade att lärarna gick igenom grunderna mer istället för att bara räkna A-uppgifter på tavlan. Då jag ber Carina definiera funktionsbegreppet ger hon följande svar:

> 17) *Carina: Jag tänker att en funktion är en massa siffror o bokstäver som sedan blir en graf. Och tvärtom-hållet.*

Hon anger två algebraiska och två grafiska exempel. Att hon saknar en grundtrygghet i ämnet märks i både hennes matematiska skriftspråk, grafiska framställningar samt muntliga kommunikation. Hennes exempel på funktioner är på en grundläggande nivå [figur 11].



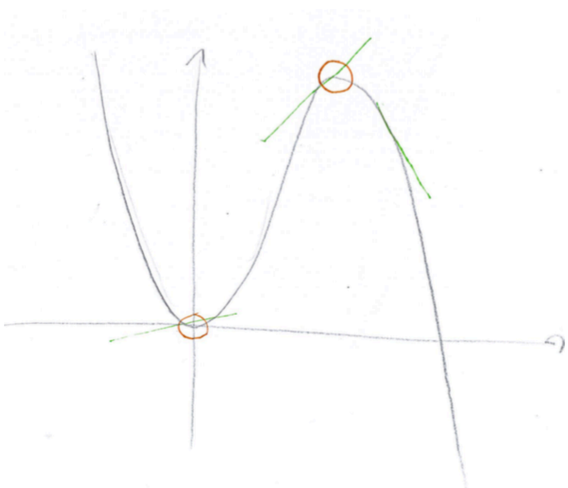
Figur 11. Carinas exempel på olika funktioner.

Carina beskriver graferna i figur 11 på följande sätt:

18) Carina: Funktionen [räta linjen] kan va åt olika håll beroende på om den är positiv eller negativ. Och sen är det andragradsfunktioner o så kan de ju gå lite upp o ner o... då är det inte någon rät linje, utan det kan va kurvor mer. Det här tror jag är en andragradsfunktion, och den har två ställen där lutningen är noll.

I sin beskrivning av graferna använder hon få matematiska begrepp. Till exempel använder hon orden *går upp* och *går ner* istället för *växer/har positiv lutning* och *avtar/har negativ lutning.* De matematiska begreppen hon använder, *positiv* och *negativ*, används felaktigt.

Carinas begreppsbild av funktioner inkluderar såväl grafiska representationer som algebraiska. Den första grafiska framställningen av funktioner hon ritar är den räta linjen $y = x$, som hon ritar in i ett koordinatsystem. Hennes andra exempel på en funktionsgraf ser ut att framställa en funktion av fjärde grad, dock saknar denna kurva sammanhang i form av ett koordinatsystem. Att funktioner kan ha både positiv och negativ lutning verkar vara en dominant detalj i hennes mentala begreppsbild av funktioner. I citatet kommer det även fram en faktor som brukar skapa förvirring hos elever; att det är skillnad mellan *positivt värde* och *positiv lutning*, medan en funktion *har negativt värde* och *är avtagande.* Det är oklart om Carina menar lutningen eller *y*-värden då hon använder begreppen *positiv* och *negativ* i sin beskrivning av den räta linjen. Att hon kallar den andra grafen för *andragradsfunktion* ger oss anledning att tro att hennes begreppsbild av *andragradsfunktioner* innefattar olika funktionsgrafer med polynomgrad > 1. Efter att ha pratat om Carinas egna grafiska exempel på funktioner, ritar jag en tredjegradsfunktion [figur 12] som vårt samtal kretsar kring en stund.



Figur 12. Carina ritar tangenter till en tredjegradsfunktion som jag ritade under intervjun.

Samtalet handlar nu om begreppet *derivatan*. I följande citat ger hon sin personliga definition av derivatan:

19) Carina: Förstaderivatan har man väl för o kolla lutningen i en viss punkt?

Då jag ber henne rita grafen till tredjegradsfunktionens derivata [jämför figur 9] minns hon att hon på mattelektionerna hade stött på en liknande uppgift men säger att hon inte kan komma ihåg lösningen. Efter en stunds funderingar ritar hon tangenter som ska illustrerar funktionens lutning.

Efter att ha pratat om funktioner och derivatan i mer allmänna termer börjar jag och Carina arbeta med uppgiften [bilaga 1]. Hennes reaktion efter att ha läst igenom instruktionerna till uppgiften:

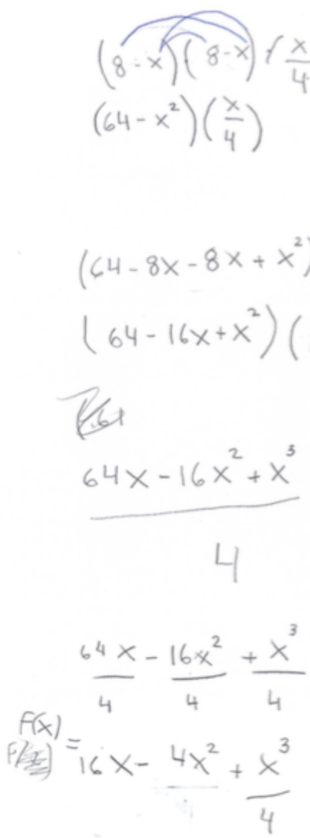
20) *Lea: O det vi ska räkna ut är för vilket x som det här rätblocket får största möjliga volym? Berätta vad du tänker!*

Carina: Nä men det här, det här är ju någonting jag inte tror att jag kan lösa riktigt... Det är som att jag inte kan formeln för volym riktigt.

Eftersom hon känner sig osäker i hur uppgiften skulle kunna lösas, pratar vi en stund om hur volymen på ett rätblock beräknas. Med hjälp av formeln för volymen av ett rätblock får Carina fram det korrekta uttrycket $(8-x)(8-x)\frac{x}{4}$. Då hon förenklar uttrycket blir hennes svårighet när det gäller hanterandet av siffror tydlig. Hon utför följande beräkning:

$$(8-x)(8-x)$$
$$=$$
$$(64-x^2)$$

Felet hon gör är mycket vanligt; enligt min egna erfarenhet som matematiklärare är det en återkommande svårighet bland gymnasieelever att komma ihåg och applicera såväl kvadreringsreglerna som metoder för multiplikation av parentesuttryck. Då jag påminner henne om att varje term i den ena parentesen behöver multipliceras med varje term i den andra genom att rita förklarande bågar med bläckpenna [figur 13], kommer hon ihåg detta räknesätt och utför beräkningen korrekt.



Figur 13. Carina förenklar uttrycket för rätblockets volym.

I nästa citat pratar jag och Carina om uttrycket som hon kom fram till efter att ha multiplicerat rätblockets olika sidor med varandra:

21) Lea: Det här ser ju ut som en funktion lite grann, det du har skrivit här nere [pekar på $16x - 4x^2 + \frac{x^3}{4}$*].*

Carina: Ja det gör det, det saknas bara nåt sånt här framför [skriver $f(x)$ *framför]*

I Carinas mentala begreppsbild av funktioner ingår alltså att det måste stå $f(x) =\ldots$ för att det ska räknas som en funktion, bara själva uttrycket utan $f(x)$ framför verkar inte vara användbart. När vi har fått fram funktionen $f(x) = 16x - 4x^2 + \frac{x^3}{4}$ föreslår jag att mata in funktionen i GeoGebra. På detta förslag svarar hon direkt:

22) Carina: O då kan man se det högsta värdet.

Carina associerar den grafiska framställningen av funktionen direkt med att kunna läsa av ett extremvärde, i vårt fall *x*-värdet som ger rätblockets största volym. Efter vi fått upp grafen till $f(x) = 16x - 4x^2 + \frac{x^3}{4}$ i GeoGebra [figur 14] fortsätter vår konversation på följande vis:

23) Carina: Då ser jag ju att… [funderar] det blir 19 tror jag.

Lea: [klickar på speciella punkter[8]]

Carina: 18,96

Lea: Vad är det?

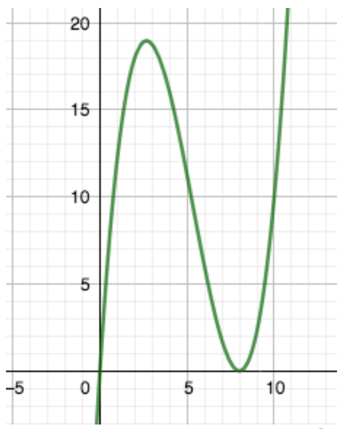
Carina: Det är y-värdet.

Lea: För vilket x får vi det här y-värdet?

Carina: 2,67

Lea: Precis. Så när x är 2,67 då är volymen 18,96

Carina: Jaha! Så då ska x här vara 2,67 [pekar på rätblocket på stencilen]



Figur 14. Grafen till funktionen $f(x) = 16x - 4x^2 + \frac{x^3}{4}$*, ritat med hjälp av GeoGebra*

[8] Ett kommando i GeoGebra som gör att grafens extrempunkter markeras med prickar och beteckningar A, B, C, osv. För att få en lita med extrempunkternas *x*- och *y*-värden måste man klicka på någon av prickarna.

Den grafiska representationen av funktionen som uttrycker rätblockets volym, åtminstone då $0 < x < 8$, verkar vara mer intuitiv för Carina än det algebraiska uttrycket. Vi kan prata om x- och y-värden utan problem och hon verkar greppa att det är just funktionens y-värden som säger något om rätblockets volymen. Även att y är beroende av x verkar hon ha utvecklat en viss förståelse för.

Carinas matematiska kompetens verkar ligga på en mer grundläggande nivå än vad den i intervjun behandlade uppgiften kräver. Då Carina blir påmind om metoder och olika samband verkar hon komma ihåg och och kunna använda dessa. Svårigheterna hon har ligger bland annat i att själv komma på och tillämpa olika metoder, knep och samband för att kunna lösa uppgifter och förstå begrepp. Detta kan bero på att hon, enligt vad hon i början av intervjun beskrev, har problem både med siffror i allmänhet samt med att förstå instruktioner.

5 Diskussion

I detta kapitel kommer jag att diskutera studiens resultat, metod och analys. Under diskussionens gång kommer jag knyta an till de fyra forskningsfrågorna som ligger till grund för uppsatsen och reflektera över i vilken utsträckning jag har lyckats besvara dem. Efter att ha diskuterat resultatet kommer jag att diskutera mitt teoretiska ramverk i stort samt dess användbarhet i besvarandet av den första och andra forskningsfrågan. Sedan kommer jag att diskutera huruvida metoderna jag valt har bidragit till att jag på ett givande vis har kunnat undersöka och möjligen besvara forskningsfrågorna. Även för- och nackdelar med att jag har känt de tre respondenterna sedan innan intervjuernas genomförande kommer diskuteras. Till slut kommer jag att redogöra för de didaktiska konsekvenserna som jag anser att denna studie ger upphov till både för mig och andra (blivande) matematiklärare.

5.1 Analys

I detta avsnitt förankras studiens resultat i Tall och Vinners och Sfards teorier. I avsnitt 5.1.1 utgår jag, precis som i resultatdelen, från de enskilda intervjupersonerna Lena, Carina och Frodo. Efter att ha studerat elevernas begreppsbilder och förhållningssätt närmare undersöker jag avsnitt 5.1.2 den hos eleverna återkommande svårighet i hanterandet av sambandet mellan funktionsgrafen och tillhörande derivatas graf.

5.1.1 Elevernas begreppsbilder och förhållningssätt

Det jag analyserar i detta avsnitt är de tre elevernas mentala bilder av begreppen *funktion* och *derivata* så som de kommer fram under intervjuerna, deras förhållningssätt i mötet med rätblocks-uppgiften [bilaga 1] samt elevernas matematiska språk och självbild. Här är det på sin plats att betona att allt som skrivits i resultatdelen rörande *funktioner* och *derivatan* också kan räknas in i elevernas bilder av dessa begrepp.

5.1.1.1 Lena

De bilderna, egenskaperna och procedurerna som Lena tillskriver begreppet *funktioner* är bl. a. följande:

- Funktioner av grad 2 och högre har extrempunkter
- Symmetrilinjen
- I extrempunkter är $f'(x) = 0$
- En minimipunkt kan beskrivas som ”en glad mun”
- $f(x)$ ska stå i vänsterled
- Med hjälp av $f''(x)$ kan vi undersöka om en extrempunkt är en max- eller minpunkt
- Räta linjer har konstant lutning
- Personlig definition av funktionsbegreppet: $y = f(x)$

Vissa av punkterna indikerar operationella, andra mer strukturella element i Lenas mentala bild av funktionsbegreppet. Att funktioner av minst grad 2 har extrempunkter och att en minimipunkt kan beskrivas som ”en glad mun” visar på ett strukturellt sätt att se på funktioner. Även att räta linjer har konstant lutning visar på ett strukturellt tänk. Lenas bild av att andragradsfunktioner har en symmetrilinje kan ses som ett utryck för ett strukturellt synsätt, samtidigt som symmetrilinjen kan användas som ett verktyg, alltså operationellt, för att beräkna nollställen och extrempunkten. Även att $f'(x)$ och $f''(x)$ ses som verktyg i undersökandet av extrempunkter är uttryck för det operationella i hennes synsätt. Hennes föreställning om att

$f(x)$ ska stå i vänsterled samt hennes personliga definition $y = f(x)$ är inte lika självklart kategoriserbara. Jag skulle i Lenas fall säga att båda dessa egenskaper hos *funktioner* visar på ett operationellt synsätt, då båda egenskaperna kopplar funktioner till beräkningar.

Om vi tittar närmare på Lenas utsagor om derivatan, ser vi att hon även här verkar tänka övergripande operationellt. Faktumet att hon har svårigheter med såväl ritandet som tolkandet av derivatans graf indikerar att hon inte har börjat se derivatan som ett självständigt, manipulerbart objekt med egenskaper än. Trots att hennes personliga definition av begreppet *derivata* betonar att den visar *"lutningen i en viss punkt"* [se citat 3] verkar hon ha användning för derivatan enbart i algebraiska sammanhang, då hon vill få reda på *x*-värden i funktioners eventuella extrempunkter. Åtminstone under intervjun behandlar Lena derivatan enbart som verktyg och saknar i mina ögon en strukturell syn på begreppet. Att det operationella synsättet dominerar hos Lena blir tydligt även i hennes reflektioner kring sina styrkor och svagheter inom matematikämnet [citat 1, s. 13].

Problemlösningsuppgifter, som Lena hävdar att hon har svårigheter med, brukar kräva ett strukturellt synsätt, då man ofta behöver titta på begreppet i fråga ”från olika håll”. Lena betonar att hon gillar uppgifter som är ganska simpla med tydliga instruktioner, då hon har lätt att komma ihåg metoden för att lösa dem. Hon nämner uppgifter där det står ”derivera”, vilket är typiskt för uppgifter som testar elevers procedurförmågan. Under följande citat försöker Lena komma på hur hon kan använda sig av derivatans uttryck för att komma fram till funktionens extremvärden [citat 5, s. 15]. Det är tydligt att hon letar efter en metod, där hon först gör det ena procedurssteget, sedan det andra. En elev med ett mer strukturellt tankesätt hade antagligen tänkt på funktionen som en graf, hade tänkt på lutning en i extrempunkterna och på sambandet mellan derivatans värde och funktionsgrafens lutning. Därigenom hade hon möjligtvis kommit på att det i extrempunkter gäller att $f'(x) = 0$, vilket förutom en egenskap hos extremvärden även är en ekvation som kan lösas. Även hennes ordval i meningen ”det är ju nåt räknesätt där” visar på ett operationellt tänk – det hon försöker komma åt verkar vara en procedur, inte någon grafisk förståelse av funktionsgrafer med tillhörande förstaderivator.

Det algebraiska och därmed operationella i Lenas begreppsbild av funktioner är både mer dominant och mer koherent och nyanserat än det grafiskt strukturella. Detta blir tydligt i citat 6 [s. 15]. Lena har greppat att uttrycken som utgör funktionerna kan skrivas på olika sätt, alltså t. ex. att $(8-x)(8-x)\frac{x}{4} = 16x^2 - 4x + \frac{x^3}{4}$, samt att uttrycket i högerled är lättare att derivera än uttrycket i vänsterled. När hon skriver ett uttryck tänker hon alltså redan på att uttrycket eventuellt kommer behöva deriveras. Detta skulle kunna tolkas som att hon befinner sig i kondenseringsstadiet i Sfards tre-stegs-modell när det kommer till hennes algebraiska förståelse av funktioner och derivator. Hon är kapabel till att tänka på hela processer utan att känna behovet av att utföra dem. Kondensationsstadiet är ”a period of ’squeezing’ lengthy sequences of operations into more manageable units” (Sfard, 1991:19).

Medan hon uppvisar mycket koherens i den operationsbaserade delen i hennes bild av funktionsbegreppet, verkar den del som består av grafer och växlandet mellan uttryck till graf snarare inkoherent. Detta blev tydligt då hon fick titta på grafen på en en tredjegradsfunktion i första delen av intervjun. Hon sa nästan direkt att det var en tredjegradsfunktion, associationen från graf till uttryck gick fort – vilket i sig är ett tecken på att hon föredrar algebrans procedurer före grafiska framställningar av funktioner. Senare, när hon jobbade med rätblocks-uppgiften och fick fram uttrycket $y = 16x - 4x^2 + \frac{x^3}{4}$ för rätblockets volym verkade hon, efter att ha matat in uttrycket i Geogebra, bli förvånad över dess utseende. Denna förvåning kan tolkas som att om hon får en funktion i form av en graf vill hon hitta det algebraiska uttrycket för att kunna beräkna saker. Men att tvärtom rita en graf utifrån ett uttryck skulle inte ge henne någonting, då grafen – i hennes mentala begreppsbild av funktioner – förutom att vara en illustration antagligen inte är användbar i sig. Följande citat stödjer mitt antagande:

24) Lena: De skriver "du får använda GeoGebra som hjälpmedel". Men jag tänker först på att lösa den algebraiskt, eftersom man kanske inte behöver göra linjer liksom… För att jag tänker att det här ju är en box och ingen kurva…

Sista meningen i citat 24 är mycket talande; det verkar inte ingå i Lena begreppsbild av funktioner att en funktionsgraf visar ett samband, i vårt fall mellan x:et i uttrycken för rätblockets sidor och rätblockets volym. För henne utesluter *”boxen”* (alltså rätblocket) och *”kurvan”* varandra.

5.1.1.2 Frodo

Låt oss ta en titt på de egenskaper, bilder och procedurer som Frodo verkar associera med funktionsbegreppet:

- Linjer och grafer
- En funktion beskriver en händelse eller ett förlopp av tid
- Räta linjer och funktioner av högre grad
- Extremvärden
- Nollställen
- Positiv och negativ lutning
- Positiva och negativa y-värden
- En funktion har en derivata

Alla dessa punkter ger uttryck för att Frodo tillämpar ett huvudsakligen strukturell synsätt. Då hon pratar om och hanterar funktioner verkar hon oftast associera till helheten snarare än till detaljer eller olika procedurer. Som hon säger i citat 8 [s. 17] trivs hon bäst då hon ”förstår hela alltet”, vilket jag tolkar som att hon inte riktigt trivs med att ”blint och lydigt” utföra procedurer utan att ha en helhetsbild av begreppet i fråga. Som hon själv säger tar hennes sätt att lära sig matematiska begrepp och procedurer längre tid än att bara ”acceptera” att vissa saker – som talet π eller pq-formeln – bara är som de är. Frodos självuppfattning, att det går långsammare för henne än för andra (vilka det nu är) att lära sig matte, må stämma överens med verkligheten. En tänkbar förklaring kan hittas i antagandet att hon oftast strävar efter en strukturell förståelse som möjligtvis är mer krävande än en rent operationell förståelse. Att se matematiska begrepp som abstrakta entiteter, vilket är karakteristiskt för ett strukturellt synsätt, kräver enligt Sfard djupare begreppsförståelse än lärandet av procedurer. Denna hierarki bland de två synsätten hittar vi även i hennes tre-stegs-modell, där reifikationen av ett begrepp – ett stadium som genomsyras av att kunna se begreppet som ett självständigt objekt – föregås av det procedurspräglade internaliseringsstadiet. Frodo nöjer sig inte med att utan djupare förståelse kunna utföra olika procedurer och därmed kunna lösa uppgifter. Hennes matematiska intresse verkar ligga i det strukturella snarare än det operationella, vilket skulle förklara hennes otålighet när det kommer till procedurer.

Även i hanterandet av derivatan visar Frodo en delvis strukturell förståelse. Hon verkar vara någorlunda trygg i att hantera derivatan som graf, vilket visar på att hennes begreppsbild av derivatan sträcker sig utöver beskrivningen av lutningen i enskilda punkter till att alla dessa lutningar bildar en egen funktion. Trots att Frodo generellt sett verkar applicera ett strukturell synsätt, visar hon under några tillfällen under intervjun på ett operationellt sätt att se på bl. a. derivatan. Hon verkar se den som ett verktyg. En intressant aspekt är att Frodo ser tredjegradsfunktionen [figur 9, s. 18]på ett strukturellt sätt, som ett matematiskt objekt med olika egenskaper (lutar olika mycket på olika ställen, har extrempunkter, har en derivata), medan hon när det kommer till derivatan tillämpar ett mer operationellt tillvägagångssätt. Frodo verkar alltså tillämpa ett strukturellt och ett operationellt synsätt på samma gång, vilket illustrerar att dessa två synsätt, eller element, som enligt Sfard tillsammans bildar en dualism, kan förekomma samtidigt. Mer om detta i avsnitt 6.3 i diskussionen.

5.1.1.3 Carina

Följande attribut associerar Carina med funktionsbegreppet:

- Räta linjen
- Positiv och negativ lutning
- Översättningen från en funktions algebraiska till dess grafiska representation är möjlig
- Derivatan
- Man kan rita tangenter till funktionsgrafen
- Det måste stå $f(x) =$... för att ett uttryck ska representera en funktion.

Carinas mentala begreppsbild av funktioner är mycket fragmentarisk. Hennes förståelse verkar vara ytlig, vilket visar sig i hennes vaga och tämligen onyanserade beskrivningar av såväl funktioners egenskaper som de av henne och mig ritade graferna. Det synsättet som verkar dominera hos Carina är det operationella. Något som är iögonfallande är att Carina ofta tillämpar ett operationellt synsätt just i situationer då hon verkade känna sig osäker, då hon verkade tro att hon ska lösa någonting men saknade metod. Till exempel i citat 20 [s. 21], då hon ombes att reflektera kring uppgiften, fokuserar hon direkt på de verktygen som möjligtvis behövs för att kunna komma fram till en lösning, i detta fall formeln för volym. Att hon direkt fokuserar på verktygen och proceduren snarare än på exempelvis rätblockets olika egenskaper indikerar att hon i denna situation tillämpar ett operationellt synsätt. Det är möjligt att även mitt ordval ”i det vi ska räkna ut…” spelar in i att hon fokuserar på själva uträkningen istället för de strukturella aspekterna i uppgiften. Carina tillämpar ett strukturellt synsätt då hon pratar om funktioner i allmänhet i citat 18 [s. 21].

Då jag i slutet av intervjun föreslår att mata in funktionen som uttrycker rätblockets volym i GeoGebra, reagerar hon direkt med att säga att vi då kan ”se det högsta värdet” [citat 22, s. 23]. Det är tydligt att hon fokuserar på att lösa uppgiften. Carina verkar se grafen som vi med hjälp av GeoGebra kommer åt, enbart som medel för att hitta en lösning. Det är typiskt för ett operationellt synsätt.

5.1.2 Derivatans graf

I denna del presenteras några utdrag ur intervjuerna med Lena, Frodo och Carina som jag för överskådlighetens skull utelämnade i resultatdelen.

De tre eleverna delar såväl uppfattningen om att derivatan beskriver lutningen i en viss punkt på grafen, som en viss osäkerhet kring hur derivatans graf hänger ihop med funktionsgrafen med varandra. Denna osäkerhet för med sig en viss förvirringen kring begreppen *negativ, positiv, avtagande* och *växande* som jag ser hos alla tre elever. Jag har intrycket av att eleverna har stött på derivatan mer i algebraiska än i grafiska sammanhang.

Jag ger till en början några exempel för att förtydliga den bild jag har av elevernas förvirring kring derivatans lutning och värde samt kring hur eleverna verkar uppleva att dessa egenskaperna hänger samman med funktionsgrafen.

25) *Carina: Lite olika beroende på var man kolla på själva linjen så är den… Här är den ju negativ, här är den positiv o här är den negativ [figur 12, s. 20].*

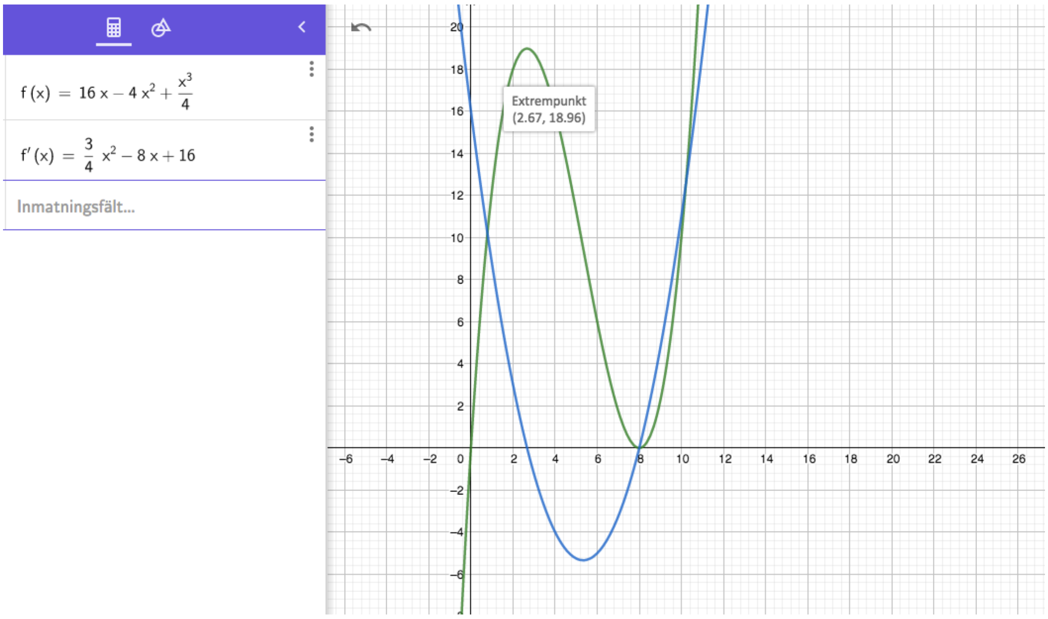
Lea: vad är det som är negativt o positiv?

Carina: Punkterna. Eller jag menar lutningen i punkterna.

Carina verkar kunna skilja på begreppen växande och positiv såväl som avtagande och negativ då hon tänker efter, dock är hennes användning av de olika begreppen inte intuitiv än.

26) [Lea och Carina tittar på figur 15 i GeoGebra]

Carina: Där [pekar på derivatans graf där $x = 8$] är ju derivatan noll, men den ser den ju ut o va avtagande… Eller nej! Den ser ut o va växande



Figur 15. Den blå grafen är den grönas derivata.

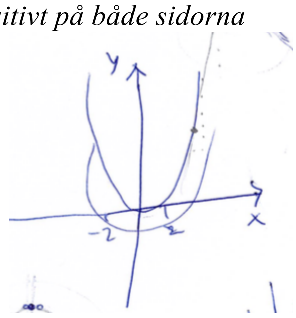
Då Carina reflekterar över derivatans beteende då $x = 8$, blir den i detta avsnitt behandlade problematiken tydlig. Hon verkar osäker kring vilka av derivatans egenskaper som är väsentliga då den sätts i relation till funktionsgrafen – är det derivatans y-värde eller lutning? Låt mig fortsätta med ett utdrag ur intervjun med Lena:

27) Lea: Den här parabeln [figur 16], vad har den för egenskaper?

Lena: den är lika stor på båda sidorna av y-linjen, den är positiv på höger sidan o negativ på vänster sidan för x.

Lea: Vad menar du med positiv o negativ?

Lena: Alltså positiva x-värden på höger sida och negativa x-värden på vänster sida, men y är ju fortfarande positivt på både sidorna



Figur 16. Ett av Lenas grafiska exempel på en funktion.

Detta exempel innefattar inte någon beskrivning av derivatan, men det framgår intressanta aspekter i Lenas uppfattning om *x*- och *y*-värden samt begreppen *positiv* och *negativ.* Då Lena i första repliken i citatet använder Lena begreppen *positiv* och *negativ* är det svårt att med säkerhet avgöra vad hon menar. En möjlighet är att hon egentligen menar *växande* och *avtagande*. Hon betonar i sin andra replik att *x*-värdena är positiva på höger sida och negativa på vänster sida. Att detta alltid är fallet i ett koordinatsystem verkar inte vara självklart för henne. Till sist säger hon att *y* är positivt på både sidorna, vilket kan tolkas som att det nu är *y*- värdena hon anser vara lika stora i sin första replik då hon säger ”den är lika stor på båda sidorna av *y*-linjen”.

> *28) Lea: Vad kommer derivatan vara mellan extrempunkterna? [Se figur 4, s. 14]*
>
> *Lena: Mellan de här två så kommer den vara positiv. Eller växande. Och efter det, efter att den har varit noll då, så blir den avtagande eller... negativ*

Lena verkar vara säker på att derivatan kommer att vara positiv mellan extrempunkterna och negativ efter maximipunkten. Dock lägger hon till ordet *växande* när hon har sagt att derivatan kommer vara positiv mellan minimi- och maximipunkten, och *avtagande* efter att hon har berättat att $f'(x) < 0$ höger om maximipunkten. Hon verkar ha lärt sig associera orden *växande* och *positiv* till varandra, samt *avtagande* och *negativ.* Att det är derivatans *y*-värden som illustrerar funktionsgrafens lutning verkar hon dock inte ha utvecklat någon intuitiv förståelse för.

I slutet på intervjuerna med Lena kretsade samtalet kring de två grafernas egenskaper då $x < 2{,}67$ [figur 15, s. 29]. Då jag frågar Lena hur hon skulle förklara att funktionsgrafen och grafen till första derivatan i princip går åt motsatta håll, svarar hon:

> *29) Lena: (skrattar) ja men har inte det o göra med det här med växande o avtagande typ... För den är ju negativ vänster om y-axeln [hon pekar på den gröna funktionsgrafen]. Eller nej, eller den är ju inte negativ, det är den inte alls... hade vart skönare om det var det (skrattar). Jag tycker att den egentligen är stigande där*
>
> *Lea: Vilken är stigande?*
>
> *Lena: Den gröna. Den stiger ju uppåt, och den blå faller. Alltså jag ser en sån teckentabell framför mig, du vet en sån när man sätter plus och minus. Jag tänker att det vänster om y-axeln ska vara minus, och därför blir den ... ah, nu känns det som att det inte blir så ändå! (skrattar)*
>
> *Lea: Men om vi kollar mellan extrempunkterna da?*
>
> *Lena: Ja! Alltså här är ju extrempunkten för derivatan. Och vänster om den så är den fallande, men jag tänkte att den extrempunkten är precis emellan funktionens extrempunkter... Precis i mitten här, nånstans här är den [funktionsgrafen] ju också fallande, men inte alls samma där... näh... (fnissar)*

Redan i Lenas första replik blir oklarheten kring grafers lutning och värde tydlig: Hon säger först att funktionsgrafen är negativ då $x < 0$, vilket är korrekt, för att sedan rätta sig och säga att den är stigande, vilket också är korrekt. Att båda egenskaper som hon tillskriver funktionen är korrekta har hon inte utvecklat någon förståelse för, vilket blir tydligt då hon säger att det hade varit skönt om funktionsgrafen *hade varit* negativ vänster då $x < 0$. Här kan kan vi tala om en kognitiv konflikt hos Lena. De delarna i hennes mentala begreppsbild av funktioner som ger upphov till den kognitiva konflikten är egenskaperna *negativ* och *växande.* Det hon behöver för att kunna undanröja konflikten är en tydligare förståelse för skillnaden mellan orden *negativ* och *avtagande* samt mellan orden *positiv* och *växande*. En nyanserad förståelse för dessa egenskaper hos funktioner skulle få Lena att inse att egenskaperna *negativ* och *växande* inte utesluter varandra. Denna insikt skulle lösa den kognitiva konflikten som vi ser hos Lena.

Det förekommer alltså hos alla tre elever en mer eller mindre djupgående förvirring kring sambandet mellan en funktion och tillhörande derivata, framför allt då de framställs grafiskt. Frågan om vad denna förvirring beror på kommer jag nu försöka besvara med hjälp av Tall och Vinners och Sfards teorier.

Låt mig titta närmre på Tall och Vinners teori om den mentala begreppsbilden. De tre elevernas begreppsbild av derivatan verkar fortfarande vara fragmentarisk. Eleverna verkar associera många olika attribut med förstaderivatan, bland annat att tangenter till funktionsgrafen är något slags hjälpmedel i beräkningen av derivatan i en viss punkt, att derivatan har att göra med lutning, att man med hjälp av derivatans uttryck kan beräkna extrempunkters *x*-värden, att man med hjälp av derivatans graf kan läsa av extrempunkters *x*-värden, att derivatan har en ”böj” färre än funktionsgrafen, skrivsättet $f'(x)$ och att derivatan på något vis kan ritas. En individ som har en begreppsbild av derivatan som inte bara *innefattar* alla dessa punkter utan där alla de nyss nämnda egenskaperna även hänger samman och bildar en helhet, kan sägas ha en koherent mental begreppsbild av derivatan. Hos Lena, Frodo och Carina verkar de olika egenskaper som de tillskriver derivatan inte hänga ihop tillräckligt för att man skulle kunna tala om koherens i begreppsbilden. Deras begreppsbilder är snarare inkoherenta. Viktigt att påpeka här är att inkoherens och koherens i det här fallet inte bildar någon slags dikotomi utan snarare befinner sig i varsin ände av en skala, där de tre eleverna befinner sig på olika ställen. Frodos begreppsbild av derivatan är, åtminstone så som jag har tolkat det, mest koherent av de tre, medan Carinas begreppsbild verkar vara mest fragmentarisk, alltså mest inkoherent. En del i elevernas begreppsbild av förstaderivatan är någon form av personlig definition och hos alla tre beskriver den derivatan som något som beskriver lutningen i en viss punkt. Eleverna verkar fastna i idén om att det rör sig om lutningen *i en viss punkt*, vilket kan anses vara föga förvånande, då detta även förekommer i den formella definitionen av derivatan. Första delen av definitionen säger att derivatan av funktionen f i punkten x_0 definieras som gränsvärdet

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Att inte från början, utöver idén om att derivatan beskriver en egenskap i en viss punkt, betona derivatans grafiska egenskaper kan antas bidra till att det känns kontraintuitivt för många elever att föreställa sig och rita derivatan som graf. Ytterligare en faktor som möjligtvis bidrar till att elevernas begreppsbild av derivatan saknar koherens även efter många veckors arbete med funktioner, derivatan och andraderivatan hittar jag i titeln på den ena av artiklarna som utgör denna studies teoretiska ramverk: ”On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin” (Sfard, 1991). Om vi ser matematiska begrepp som ett mynt, har begreppet förståtts i sin helhet först då båda sidorna finns med i individens begreppsbild. Den ena sidan av myntet utgörs av de med begreppet förknippade processerna, medan det är begreppet som objekt som utgör myntets andra sida. Att med Sfards ord säga att en individ kan se bägge sidor av begrepps-myntet skulle kunna förstås synonymt med att individen har en koherent begreppsbild. Med denna bild i åtanke vill jag belysa sättet som jag upplever att derivatan behandlas i skolmatematiken. Det är mycket vanligt att övningarna i matematikböckerna – som enligt min erfarenhet i hög grad brukar prägla matematikundervisningen – fokuserar mycket på algebraiska uträkningar av extrempunkter etc. Förutom att en procedurbetonad undervisning snarare stödjer det operationella än det strukturella synsättet hos elever, försvårar en ensidig representation av derivatan reifikationen av derivatan.

Något som jag i avsnitt 5.2 lovade att diskutera är min uppfattning om att ett operationellt och ett strukturellt synsätt ibland tillämpas samtidigt, vilket blir tydligt då Frodo verkar se på funktioner på ett strukturellt sätt samtidigt som hon verkar hantera förstaderivatan operationellt. Frodo, som i mina ögon har reifierat funktionsbegreppet, befinner sig i hanterandet av derivatan snarare i internaliseringsstadiet. Som nämnt tidigare karaktäriseras reifikationsstadiet av ett strukturell tänk, medan internaliseringsstadiet präglas av det operationella. Hon växelverkar mellan reifikation av det ena och internalisering av det andra begreppet, vilket förklarar att de två synsätten förekommer samtidigt.

5.2 Det teoretiska ramverket

Låt mig börja med att diskutera Tall och Vinners teori om den mentala begreppsbilden. Teorin har bidragit till att jag ser på individers begreppsbildning på ett mycket mer nyanserat sätt än innan arbetet med denna uppsats. Införandet av olika element som kan innefattas av en individs mentala begreppsbild, som bl. a. begreppets egenskaper, med begreppet associerade procedurer och bilder samt olika sorters definitioner av begreppet, ger en struktur som möjliggör en både nyanserad och överskådlig analysen av individers mentala bilder av olika matematiska begrepp.

Sfards operationell-strukturell-dualism är upplysande av liknande anledningar: Den kastar ljus på typiska skillnader i olika individers beteende och tankegångar i arbetet med matematiska begrepp. Att kunna dela in olika sätt att tänka, kommunicera och agera på i det strukturella och det operationella synsätt har snarare fördjupat än förenklat intrycken jag fått av min tre respondenters förhållningssätt till matematiskt innehåll. Sfards tre-stegs-modell har också bidragit till en nyansering och fördjupning av mitt intryck och min analys av de tre elevers förståelse av funktioner och derivatan. Även min uppfattning av vad begreppsförståelse innebär har nyanserats genom studien av tre-stegs-modellen, vilket har bidragit till att jag har kunnat göra en djupare analys av elevers förståelseprocess än vad jag hade kunnat utan Sfards modell. Särskilt reifikation-internalisering-dilemmat [se avsnitt 2.2.2.3] samt frågan om vad *reifikation* egentligen innebär har varit mycket inspirerande att reflektera över. Dilemmat, så som Sfard själv beskriver det, ligger i att reifikationsstadiet och internaliseringsstadiet verkar förutsätta varandra. Dock ser jag relationen mellan de två stadierna inte som att de *förutsätter* varandra utan snarare som en *växelverkan.*

Denna studies teoretiska ramverk ger svar på min första och andra forskningsfråga: Hur kan en individs förståelse av ett begrepp beskrivas och hur växer matematisk förståelse fram? Tall och Vinners teori om den mentala begreppsbilden ger ett svar på första delen av frågan, som handlar om beskrivandet av individers begreppsförståelse. Modellen av den mentala begreppsbilden och alla i en sådan begreppsbild förekommande nyanser såsom personlig begreppsdefinition, med begreppet associerade bilder, egenskaper och procedurer samt konfliktfaktorer möjliggjorde en detaljerad och strukturerad analys av Lenas, Carinas och Frodos mentala begreppsbilder av funktioner. Sfards synsätts-dualism har varit ett rättesnöre i att ytterligare nyansera beskrivningen av elevernas begreppsbild. Ett svar på den andra forskningsfrågan, som handlar om hur matematisk förståelse växer fram, får vi av Sfards tre-stegs-modell [avsnitt 2.2.2].

5.3 Metoddiskussion

Att använda mig av en fenomenologisk-hermeneutisk ansats både i genomförandet och i analysen av intervjuerna har av olika anledningar varit mycket givande. En anledning hittar vi i den tredje forskningsfrågans karaktär. Den handlar om att ta reda på individers sätt att se på samt hantera funktioner och derivatan. Framför allt individers sätt att se på och uppleva saker och ting är en djupt fenomenologisk angelägenhet. Något annat som jag genom den fjärde forskningsfrågan ville åt är att ta reda på hur de tre eleverna hanterar sambandet mellan den grafiska representationen av en funktion och tillhörande derivata. I mina försök att besvara denna fråga har jag utgått från Sfards teorier om det strukturella och det operationella synsättet i hanterandet av matematiskt innehåll, hennes tre-stegs-modell samt den hermeneutiska cirkeln. Den hermeneutiska cirkeln är en modell som har varit ett stort stöd i mitt försök att få grepp om elevernas hantering av funktioner och derivata samt elevernas förvirringen kring dessa begrepp. Den har även fungerat som en bro mellan Sfards och Tall och Vinners teoribildningar; både Sfards och Tall och Vinners olika modeller och teorier går att koppla till den hermeneutiska cirkeln. Här är det på sin plats att återigen betona att jag tillämpat ett hermeneutiskt tankesätt på två nivåer; på den ena nivån är eleverna subjekten vars förståelseprocess av det matematiska innehållet beskrivs med hjälp av bland annat den hermeneutiska cirkeln. På den andra nivån är det jag som är subjektet som tolkar och försöker förstå elevernas utsagor för att komma fram till en beskrivning av deras mentala begreppsbilder, synsätt och förståelseprocess. Att ha kunskap om några delar av elevernas skolvardag så som kursupplägg, läromedel och deras ordinarie matematiklärares undervisningssätt samt att ha mött dem i olika undervisningssituationer gör att jag på någorlunda goda grunder kan föreställa mig elevernas förståelsehorisont[9]. Detta upplevde jag som huvudsakligen fördelaktigt, såväl i genomförandet av intervjuerna som i analysen av det empiriska materialet, men jag ser även vissa nackdelar både med att ha inblick i elevernas skolvardag och med att själv ha hållit i vissa delar av deras matematikundervisning undervisning. En sådan nackdel är att det finns vissa begrepp och procedurer som jag undermedvetet tänker att de behärskar eller åtminstone borde behärska, vilket får mig att tolka elevernas utsagor mer välvilligt än vad jag annars hade gjort. Man skulle kunna säga att jag är partisk, både eftersom jag vill att eleverna ska känna sig duktiga och för att jag vill känna att jag har lyckats förmedla kunskap. Partiskhet kan utgöra negativ påverkan på reliabilitet men min medvetenhet om denna torde minska risken för detta i min studie.

Som jag beskrev i avsnitt 3.2 användes olika kommunikationsformer under genomförandet av intervjuerna. Utöver samtalet uppmanades eleverna kommunicera sina tankar även genom skriftliga uträkningar samt illustrationer. Användandet av GeoGebra utgjorde intervjuernas tredje, digitala kommunikationsform. Det var Tall och Vinners beskrivning av de olika elementen som ingår i den mentala begreppsbilden – alla med ett begrepp associerade bilder, egenskaper och procedurer – som inspirerade mig till att låta intervjuerna bestå av mer än bara verbal kommunikation. Det skulle varit svårt att bilda mig en uppfattning om de bilderna och procedurerna som eleverna associerar med funktions- och derivatabegreppet om de inte hade fått rita grafer och göra algebraiska uträkningar.

Kategorierna och koderna jag valde i kodningen av intervjuerna gav både en någorlunda hanterlig struktur åt de trettiotal sidor empiriska materialet. Samtidigt som det genom kodningen återigen tydliggjordes att de olika i uppsatsen använda modeller och teorierna på många sätt överlappar samt nyanserar, förklarar och stärker varandra. Teoriernas ömsesidiga nyansering präglade även struktureringen av analysen. Jag valde att dela upp analysen i ett avsnitt per elev, samt ett avsnitt om derivata. De tre elev-avsnitten är strukturerade på samma sätt: först ges en sammanfattning av olika faktorer som eleven i fråga verkar associera med funktionsbegreppet. Sedan beskrivs, exemplifieras och analyseras de olika faktorerna i elevernas begreppsbild samt elevernas tillvägagångssätt i intervjuns olika moment utifrån operationell-strukturell-dualismen. Mitt val att först undersöka begreppsbilden och sedan

[9] Begreppet *förståelsehorisont* är taget från hermeneutiken och betyder mängden av de medvetna såväl som de omedvetna uppfattningar, hållningar och förutfattade meningar som vi hyser vid en given tidpunkt utan att rikta vår uppmärksamhet på dessa.

elevernas synsätt – alltså att först belysa ett tillstånd, ett *vara*, för att senare belysa ett tillvägagångssätt, ett *göra* – grundas i att det första innefattar det andra. I elev-avsnittens första del beskrivs vilka bilder, egenskaper och procedurer eleverna associerar med begreppen *funktioner* och *derivata*. I andra delen nyanseras dessa associerade bilder, egenskaper och procedurer utifrån Sfards operationell-strukturell-dualism. Analysen av elevernas tillvägagångssätt i mötet med funktioner och derivatan kan alltså sägas vara en sorts nyansering av analysen av elevernas mentala begreppsbild av funktioner.

5.4 Didaktiska konsekvenser och framtida forskning

Arbetet med studien av elevers begreppsbild av funktioner och derivatan samt undersökandet av deras tillvägagångssätt i mötet med begreppen har gjort att en hel rad frågor har formulerats i mitt huvud, frågor som spelar stor roll i mitt framtida läraryrke – både när det gäller min undervisning av funktioner och derivata, samt när det gäller matematikundervisningen i stort. En fråga som kom upp tidigt under arbetet med uppsatsen var frågan om vad *min* mentala begreppsbild av funktioner och derivata egentligen är. I brist på utrymme och möjligtvis även i brist på läsarens intresse avstår jag från att ge en djupgående beskrivning av mina personliga mentala bilder av begreppen i fråga. Men det som slår mig då jag funderar på saken är hur viktigt det är att som matematiklärare bli medveten om sin egna begreppsbildning och även om vilket synsätt som dominerar hos en själv. Att lära ut matematik till en helklass, till ett trettiotal elever innebär att behöva förhålla sig till ett trettiotal olika sätt att se på, ta sig an och hantera nya såsom välbekanta begrepp. Det är viktigt att för det första bli medveten om vilket synsätt som dominerar hos en själv och för det andra skaffa sig verktyg och kunskap om hur man kan upptäcka, utveckla och utmana andras. Ju fler sätt att se på olika begrepp som jag som mattelärare kan identifiera och relatera till, desto lättare blir de att känna igen hos de olika eleverna jag möter. Eller för att säga det hela med Tall och Vinners ord: en lärare som är medveten om olika mentala begreppsbilder har möjligheten att upptäcka eventuella inkorrekta sådana och, genom att diskutera dem, rationalisera problemet[10].

En annan fråga som denna studie har fått mig att ställa mig själv har att göra med de sju förmågorna som sedan införandet av LGY11 genomsyrar kursplanen i matematik och därmed undervisningen. Har införandet av dessa förmågor bidragit till en mer nyanserad matematikundervisning som tar hänsyn till utvecklandet av både operationella och strukturella angreppssätt? Att ge ett utförligt svar på denna fråga är något jag överlämnar till framtida forskningsarbeten. Det jag kan göra i denna uppsats är att svara utifrån mina egna erfarenheter i undervisningssammanhang och utifrån det jag under min utbildning lärt mig. Det jag upplever ute i skolorna är att matematikundervisningens upplägg är starkt präglad av matteboken, samtidigt som elevernas drivkraft i ämnet i många fall utgörs av att räkna igenom uppgifterna som läraren skrivit upp i terminsplaneringen. Jag ser även att det är vanligt att stort fokus hamnar på räkning, och därmed procedursförmågan. Genom införandet av förmågorna och det faktum att förmågorna är tätt kopplade till betygssättningen, tvingas matematiklärare även fokusera på de andra aspekter inom matematiken. Till exempel i beskrivningen av problemlösningsförmågan står bland annat att elever ska lära sig värdera valda strategier och metoder, vilket kräver och bidrar till ett strukturellt tänk samt en koherent begreppsbild. En annan förmåga som stödjer utvecklandet av det strukturella synsättet hos eleverna samt bidrar till koherensen i elevers mentala begreppsbild är begreppsförmågan. Formuleringen att ”använda och beskriva innebörden av matematiska begrepp samt samband mellan begreppen”

[10] Egen översättning av ”When the teacher is aware of the possible concept images it may be possible to bring incorrect images to the surface and, by discussion, rationalize the problem” (Tall & Vinner, 1981:168)

(Skolverket, 2017) betonar något som jag nämnde i avsnitt 6.3, nämligen att det är just förmågan att kunna se hur olika begrepp och begreppsegenskaper *hänger samman* som är förutsättning för en koherent begreppsbild.

Sammanfattningsvis kan jag säga att studerandet av de olika teorierna och analysen av denna studies empiriska material har gett mig två saker. För det första har jag skaffat mig verktyg som jag kan använda mig av då jag skapar mig en bild av elevers kunskapsutveckling. Jag kan med hjälp av de presenterade modellerna rikta min uppmärksamhet mot aspekter av elevernas lärande, förståelse och begreppsbildning som jag tror kommer bidra till att jag på ett nyanserat sätt kommer kunna anpassa min undervisning och mitt sätt att förklara de olika innehållen i min undervisning. Genom att ha gjort en djupanalys av intervjuerna med de tre eleverna har jag blivit varse om att det ofta är små nyanser i elevernas sätt att uttrycka sin förståelse och förhållningssätt till matematiska begrepp som avslöjar hur deras begreppsbilder ser ut samt vilket synsätt som dominerar.

När jag nu, efter att ha skrivit den här uppsatsen, läser matematikämnets syfte (Skolverket, 2017), slås jag av att operationell-strukturell-dualismen formuleras på flera ställen:

”Matematik är [...] ett verktyg inom vetenskap och för olika yrken. Ytterst handlar matematiken om att upptäcka mönster och formulera generella samband.“ – Skolverket, 2017

”Den utvecklas såväl ur praktiska behov som ur människans nyfikenhet och lust att utforska matematiken som sådan.“ – Skolverket, 2017

”[Att] ge utrymme åt problemlösning som både mål och medel.“ – Skolverket, 2017

Med Sfards och Tall och Vinners teorier i bakhuvudet kan ämnesplanen i matematik läses, tolkas och arbetas med på ett meningsfullt, nyanserat och givande sätt.

6 Referenslista

Anderson, J. (1976). *Language, memory, and thought (The experimental psychology series)*. Hillsdale : New York: Erlbaum ; Halsted (distr.).

Braun, V., & Clarke, V. (2006). *Using thematic analysis in psychology*. Qualitative Research in Psychology, 3(2), 77-101.

Hadamard, J. S.: 1949, *The Psychology of Invention in the Mathematics Field,* Princeton University Press, NJ.

Halmos, P. (1985). *I want to be a mathematician : An automathography in three parts*. New York: Springer-Vlg.

Henrici, P.: 1974, 'The influence of computing on mathematical research and education', in *Proceedings of Symposia in Applied Mathematics,* Vol. 20, American Mathematical Society, Providence.

Kvale, S., Brinkmann, S., & Torhell, S. (2014). *Den kvalitativa forskningsintervjun* (3. [rev.] uppl. ed.). Lund: Studentlitteratur.

Lesh, R. and Landau, M. (eds.): 1983, *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes,* Academic Press, New York.

Piaget, J. (1971). *Genetic epistemology*. New York: W. W. Norton.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 22*(1), 1-36.

Skemp, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding, *Mathematics Teacher*, 20-26.

Skolverket. (2017). *Ämne – Matematik*. Hämtad 2018-05-18, från https://www.skolverket.se/polopoly_fs/1.265598!/Amnesplan_Matematik_Gy.pdf

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12*(2), 151-169.

Vetenskapsrådet (2002*). Forskningsetiska principer inom humanistisk-samhällsvetenskaplig forskning*. Stockholm: Vetenskapsrådet**.**

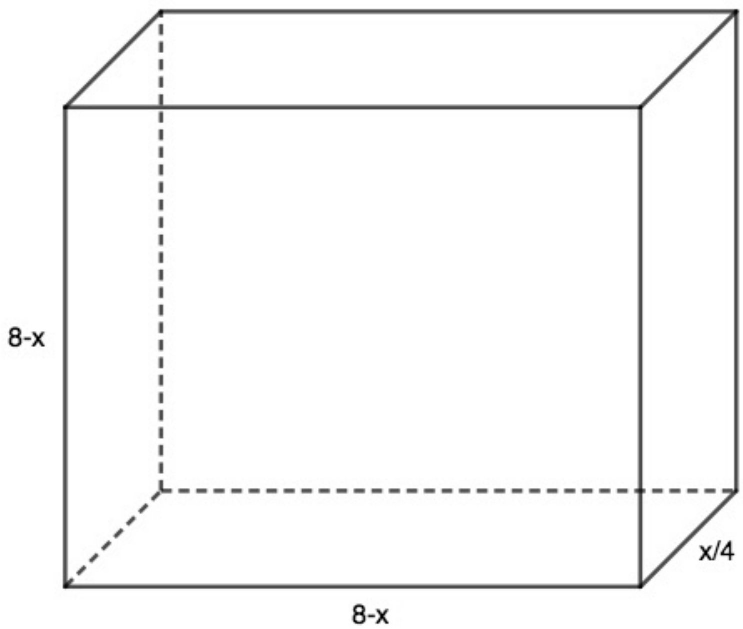
Vinner, S., & Dreyfus, T. (1989). 'Images and definitions for the concept of funtion', in *Journal for Research in Mathematcis Education,* 1989, Vol. 20, No. 4, 356-366.

Wikipedia (2018). *Dikotomi.* Hämtad 2018-05-23 från https://sv.wikipedia.org/wiki/Dikotomi

Wikipedia. (2018). *Ontologi.* Hämtad 2018-05-04, från https://sv.wikipedia.org/wiki/Ontologi

7 Bilagor

7.1 Bilaga 1 – Uppgift



Figuren visar ett rätblock med sidorna x/4, (8-x) och (8-x) l.e.

För vilket x får rätblocket största möjliga volym?

Beräkna med hjälp av derivata rätblockets största möjliga volym.
Du får använda GeoGebra som hjälpmedel.

7.2 Bilaga 2 – Intervjuguide

Vad tycker du om matte?

Vad tycker du är dina styrkor och svagheter i ämnet? Börja med styrkorna!

Vilket är ditt favoritområde i matte?

Vad gillar du (inte) med matte?

Varför just...?

Vad är en funktion?

På vilket sätt kan en funktion representeras? *Be eleven skriva/rita exempel*

Välj ut en av graferna[11]
Beskriv grafen.

det som förhoppningsvis kommer upp är begreppen nollställe, maximipunkt/minimipunkt, lutning. om de inte dyker upp ber jag eleven att reflektera kring dem.

du har på matten jobbat med förstaderivatan. hur skulle du beskriva förstaderivatan?

vad visar förstaderivatan/vad är det vi kan räkna ut med hjälp av den?

vi går tillbaka till grafen som vi kikade på förut/jag skissar upp en lämplig graf på pappret
kan du försöka rita upp grafen på förstaderivatan till denna funktion i samma koordinatsystem?

om eleven ritar en graf kommer vi att diskutera hur hon tänkte, både ifall den är korrekt och ifall den inte är korrekt.

Intervjuns fortsättning kommer att bero på hur eleven väljer att lösa uppgiften. Löser eleven uppgiften rent algebraiskt kommer jag att be henne att ändå skriva in sina svar i GeoGebra (vi hjälps åt) och be henne reflektera kring vad de två graferna säger, framför allt när det kommer till lutningen.

Avsluta intervjun, ”knyta ihop säcken”

Vad skulle du nu säga att en funktion är för något?

Har den här uppgiften gett dig någonting?

[11] Den blåfärgade texten är anteckningar till mig som intervjuare.