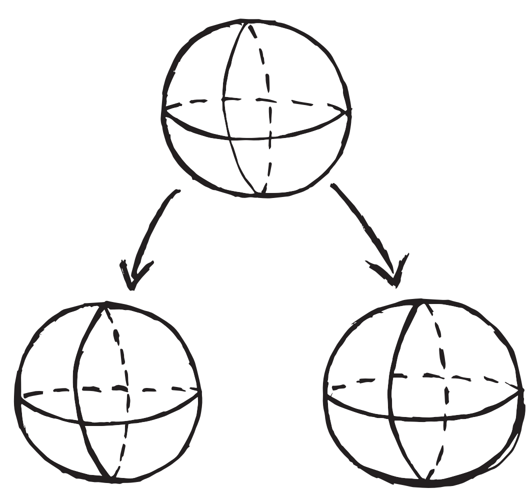
CHALMERS | GÖTEBORGS UNIVERSITET

Banach-Tarskis paradox

Fria och godartade grupper

Examensarbete för kandidatexamen i matematik vid Göteborgs universitet

Björn Eriksson
Erik Håkansson
Maria Lindström
Nazli Raufi
David Sjögren



Institutionen för matematiska vetenskaper
Chalmers tekniska högskola
Göteborgs universitet
Göteborg 2017

Banach-Tarskis paradox

Fria och godartade grupper

Examensarbete för kandidatexamen i matematik vid Göteborgs universitet
Björn Eriksson David Sjögren

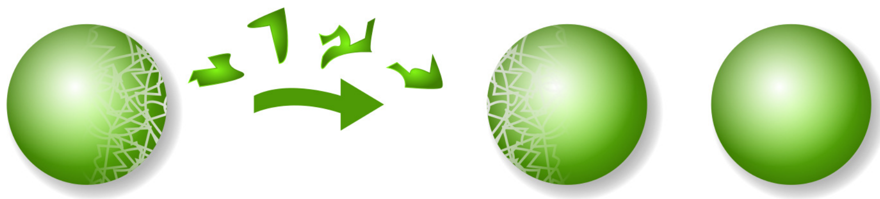
Examensarbete för kandidatexamen i matematik inom matematikprogrammet vid Göteborgs universitet
Erik Håkansson Maria Lindström Nazli Raufi

Handledare: Michael Björklund
Examinator: Maria Roginskaya/Marina Axelson-Fisk

Institutionen för matematiska vetenskaper
Chalmers tekniska högskola
Göteborgs universitet
Göteborg 2017

Populärvetenskaplig presentation

Tänk om du fick uppgiften att göra om en boll till två lika stora bollar utan att lägga till något. De flesta skulle säga att det inte går, men det gör det – i matematikens värld. År 1924 löste matematikerna Stefan Banach och Alfred Tarski precis denna uppgift. Lösningen går ut på att dela upp bollen i delar på ett listigt sätt. Sedan vrider man på dessa delar på ett sådant sätt att det går att sätta ihop dem till två nya bollar.



Figur 1: En illustration av Banach-Tarskis paradox.

Hur kommer det sig då att vi inte använder oss av detta? Om det nu går att fördubbla en boll så skulle det till exempel gå att mätta alla människor med en enda köttbulle genom att om och om igen fördubbla den. Tyvärr så fungerar inte matematiken och verkligheten alltid på samma sätt.

Det är frestande att göra liknelsen med en köttbulle och att skära den i bitar och sätta ihop dem till två nya köttbullar. I själva verket går inte detta eftersom bitarna som Banach och Tarski delade upp en boll i har för komplicerad form för att de ska kunna skäras ut med en kniv. Lite förenklat går det att säga att bitarna av bollen inte ser ut som bitar av en köttbulle utan som moln av punkter.

Ytterligare en skillnad mellan att dela upp en köttbulle och att dela upp en matematisk boll är att det inom matematiken går att dela upp en boll i hur många bitar som helst. Om du skulle försöka dela upp en köttbulle i mindre och mindre bitar så skulle bitarna till slut bli för små för att kunna delas upp mer. De minsta delarna av ett föremål kallas för atomer och även om du hade den vassaste kniven i världen så skulle du inte dela upp atomerna i mindre delar. För att ta fram två köttbullar från en skulle det behövas dubbelt så många atomer som det fanns från början, vilket är omöjligt eftersom det inte kan uppstå atomer ur tomma intet. Däremot är detta inte ett problem med en matematisk boll eftersom den går att dela upp i oändligt många delar.

Inom matematiken brukar man säga att en boll har tre dimensioner. Det betyder att den har en bredd, en höjd och ett djup. Om du däremot skulle försöka rita en boll på ett papper så skulle det inte gå eftersom ett papper inte har något djup. Ett annat sätt att uttrycka det på är att säga att ett papper har två dimensioner. Bilden du skulle få kommer istället bli en cirkelskiva som alltså är motsvarigheten till en boll i två dimensioner.

Det är kanske lätt att tro att det går att dela upp en cirkelskiva och sätta ihop delarna till två lika stora cirkelskivor på samma sätt som det går att göra med en boll. Men inte ens inom matematiken är allt möjligt. Matematikern John von Neumann upptäckte 1929 att det inte går att göra denna uppdelning. Anledningen till att det går i tre dimensioner men inte i två är att det i tre dimensioner går att vrida bitarna åt fler håll. I två dimensioner går det bara att vrida saker åt två håll, moturs och medurs. En matematiker skulle säga att det i tre dimensioner finns *fria grupper* och att de uppstår eftersom det finns fler sätt att vrida på saker än i två dimensioner.

En viktig detalj som alltid omnämns i samband med Banach-Tarskis paradox är någonting som kallas för *urvalsaxiomet*. Axiom inom matematiken är påståenden som inte går att bevisa eller motbevisa. Detta innebär att matematiker helt enkelt måste bestämma sig för om de ska acceptera axiom som sanna eller inte. Att acceptera eller inte acceptera att urvalsaxiomet är sant ger olika konsekvenser. I vårt fall går det exempelvis inte överhuvudtaget att göra uppdelningen av bollen utan att acceptera urvalsaxiomet.

Banach-Tarskis paradox kan kännas så otrolig att den kan ses som en anledning till att inte acceptera urvalsaxiomet. Men att inte acceptera urvalsaxiomet ger också konsekvenser. Dessa är svårare att förklara då de är mer tekniska, men matematiker ser dem som lika allvarliga som Banach-Tarskis paradox. Inom matematiken har detta därför lett till en diskussion om huruvida urvalsaxiomet bör accepteras eller inte.

Resultat inom matematiken har ibland inte kommit till användning förrän långt efter att de upptäcktes. Det matematiska området *talteori* som har funnit i flera tusen år hade inte kommit till stor användning förrän datorer uppfanns. Så även om vi idag inte vet hur Stefan Banach och Alfred Tarskis lösning skulle kunna användas i verkligheten så kanske det i framtiden finns områden där den är användbar.

Sammanfattning

Detta kandidatarbete bevisar Banach-Tarskis paradox för den slutna bollen med origo bortplockad, $B^3 \setminus \{0\}$, i euklidiska rummet $\mathbb{R}^3$. Detta bevisas genom att låta en fri delgrupp till den speciella ortogonala gruppen i tre dimensioner, SO(3), verka på $B^3 \setminus \{0\}$. Det bevisas också att det existerar oändligt många fria delgrupper till SO(3) genom att använda Baires kategorisats och Kleins pingponglemma. Kandidatarbetet visar sedan att cirkeln S^1 sedd som en delmängd av det euklidiska planet $\mathbb{R}^2$ inte kan delas upp paradoxalt genom att låta den abelska gruppen SO(2) verka på cirkeln. Här introduceras konceptet vänsterinvarianta ändligt additiva sannolikhetsmått och med hjälp av Markov-Kakutanis fixpunktsats visas att det finns ett sådant definierad på mängden S^1. Detta resultat medför att cirkeln inte kan delas upp paradoxalt.

Abstract

This Bachelor's thesis proves the Banach-Tarski paradox for the closed ball with the origin removed, $B^3 \setminus \{0\}$, in Euclidean space $\mathbb{R}^3$. This is accomplished by letting a free subgroup of the special orthogonal group of degree three SO(3) act on $B^3 \setminus \{0\}$. It also offers a proof that there exists infinitely many free subgroups of SO(3) by using Baire's category theorem and Klein's ping pong lemma. The thesis then proves that the circle S^1 considered as a subset of the Euclidean plane $\mathbb{R}^2$ cannot be decomposed paradoxically by allowing the abelian group SO(2) to act on the circle. Here the concept of left-invariant finitely additive probability measures is introduced, and by using Markov-Kakutani's fixed-point theorem the existence of one such probability measure on S^1 is proven. This result implies that the circle cannot be decomposed paradoxically.

Innehåll

Förord

Det här är ett kandidatarbete som behandlar Banach-Tarskis paradox och två kringliggande frågor: existensen av fria delgrupper av SO(3) samt att det inte går att dela upp S^1 paradoxalt. Arbetet bygger till stor del på algebraiska samt topologiska argument och läsaren förväntas ha grundläggande kunskaper inom dessa områden. Om så ej är fallet rekommenderas [4] och [1] för en introduktion.

Författarnas ansvarsområden

En loggbok har förts över alla medverkandes prestationer under arbetets gång. Inledning och Avsnitt 2 *Banach-Tarskis paradox* samt tillhörande avsnitt i appendix skrevs av samtliga gruppmedlemmar. Avsnitt 3 *Fria delgrupper till* $SO(3)$ samt tillhörande avsnitt i appendix skrevs av Erik Håkansson, Maria Lindström och Nazli Raufi. Avsnitt 4 *Går cirkeln att dela upp paradoxalt?* samt tillhörande avsnitt i appendix skrevs av Björn Eriksson och David Sjögren.

Vidare är bilden på omslaget ritad av Maria Lindström, Figur 1 är skapad av Benjamin D. Esham från Wikimedia Commons, Figur 2 och Figur 3 är skapade av Erik Håkansson.

Metod och genomförande

Arbetet har i huvudsak varit en litteraturstudie. En stor del av materialet har även presenterats av handledaren i form av föreläsningar. Efter insamling och bearbetning av information påbörjades skrivandet av själva rapporten. Skrivprocessen inleddes med en övergripande bild av hela arbetet för att sedan successivt bli mer detaljerad.

Avgränsningar

I Avsnitt 2 har vi valt att begränsa oss till att göra en paradoxal dekomposition av enhetsbollen förutom origo trots att det går att göra för hela bollen. Detta beror på att fallet med hela bollen är mer tekniskt utan att för den delen ge signifikant ny matematisk insikt. Hela arbetet bygger på gruppteori och i synnerhet matrisgrupper. I beviset av Banach-Tarskis paradox har vi valt att inte gå in på måtteoretiska detaljer. Argumenten i Avsnitt 3 bygger på Lieteori och topologi men vi har valt att inte gå in närmare på den allmänna teorin för dessa områden. Arbetet i Avsnitt 4 bygger på funktionalanalys och topologi men även här har vi valt att inte gå in närmare på teorin för dessa områden.

1 Inledning

Den här rapporten behandlar Banach-Tarskis paradox samt några kringliggande frågor. Paradoxen säger att det går att dela upp den punkterade enhetsbollen $B^3 \setminus \{0\}$ i $\mathbb{R}^3$ i ett ändligt antal delar, rotera dessa och sätta ihop dem till två nya kopior av bollen. Motsvarande uppdelning går att göra även i högre dimensioner. Stora delar av rapporten baseras på gruppteori och speciellt matrisgrupper och deras verkan på $\mathbb{R}^n$. Rapporten inleds med beviset av Banach-Tarskis paradox. Paradoxen och dess bevis leder oss vidare till två kringliggande frågor som diskuteras i resten av rapporten.

I beviset använder vi oss av matrisgrupper. Ett resultat som är centralt är att matrisgruppen SO(3) har en så kallad *fri delgrupp*. Det går att visa detta explicit men vi har valt att göra detta på ett mer systematiskt sätt. Vår metod ger dessutom inte bara en utan ett stort antal fria delgrupper till SO(3).

Resultatet går ej att utföra i lägre dimensioner än 3 eftersom att gruppen SO(2) som verkar på cirkeln genom rotationer är en abelsk grupp, till skillnad från SO(3) som inte är det. Det faktum att SO(2) är en abelsk grupp medför att det finns ett mått på cirkeln som inte förändras av rotationerna.

I Avsnitt 2 bevisas Banach-Tarskis paradox. I Avsnitt 3 visas att SO(3) har en fri delgrupp. I Avsnitt 4 bevisas varför paradoxen inte gäller i två dimensioner.

2 Banach-Tarskis paradox

Vårt mål är att dela upp den punkterade enhetsbollen $B^3 \setminus \{0\}$ i bitar, rotera dessa och sätta ihop dem till två likadana bollar. Detta är en så kallad paradoxal dekomposition. För att göra detta väljer vi att se $B^3 \setminus \{0\}$ som uppbyggd av sfärer och börjar därför med att göra en paradoxal dekomposition av enhetssfären S^2. Generellt brukar rotationer av sfären beskrivas som verkan av matrisgrupper på sfären. Därför är det intressant att undersöka om en grupp kan delas upp paradoxalt. Då *fria grupper* har en struktur som lämpar sig för detta så börjar vi med att göra en paradoxal dekomposition av en sådan. Därefter för vi över den paradoxala dekompositionen till sfären och sedan från sfären till den punkterade bollen. Hela resonemanget är baserat på det i [13].

Vi påminner om definitionen av en grupp.

Definition 2.1 (Grupp)**.** En grupp är en mängd G som tillsammans med en binär operation $*$ uppfyller följande axiom:

(i) slutenhet: för alla element $a, b \in G$ gäller att $a * b \in G$.

(ii) associativitet: för alla element $a, b, c \in G$ gäller att $a * (b * c) = (a * b) * c$.

(iii) identitet: det finns ett element $e \in G$ så att $a * e = e * a = a$, $\forall a \in G$.

(iv) inverterbarhet: för varje element $a \in G$ finns ett element $a^{-1} \in G$ så att $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$.

Anmärkning. I fortsättningen skriver vi ab istället för $a * b$.

En delgrupp av en grupp G är en delmängd $H \subset G$ som uppfyller gruppaxiomen med avseende på samma operator som G.

2.1 Paradoxal dekomposition av en fri grupp

Det första vi behöver göra för att lyckas med uppdelningen av bollen är att dela upp en fri grupp paradoxalt.

Definition 2.2 (Fri grupp)**.** En fri grupp är en grupp som saknar icketriviala relationer.Det finns till exempel inga relationer av typen

$$a^{13}b^3a^{-4}c^5 = e.$$

Se Appendix D för en mer utförlig beskrivning av fria grupper och relationer.

Lemma 2.3. *Den fria gruppen* $\mathbb{F}_2$ *på två generatorer* a *och* b *har en paradoxal dekomposition. Mer precist så finns en partition*

$$\mathbb{F}_2 = G_1 \sqcup G_2 \sqcup G_3 \sqcup G_4$$

sådan att

$$\mathbb{F}_2 = G_1 \sqcup aG_2 = G_3 \sqcup bG_4.$$

Bevis. Låt $G(a)$ vara mängden av alla element i $\mathbb{F}_2$ som börjar med a, och definiera $G(a^{-1}), G(b)$ och $G(b^{-1})$ på motsvarande sätt. Vi får då en partition

$$\mathbb{F}_2 = \{e\} \sqcup G(a) \sqcup G(a^{-1}) \sqcup G(b) \sqcup G(b^{-1}).$$

Vi kan utifrån denna uppdelning skriva

$$\mathbb{F}_2 = G(a) \sqcup aG(a^{-1}) = G(b) \sqcup bG(b^{-1}).$$

Denna uppdelning är nästan på den sökta formen. Vi har dock ett problem: vi har endast använt delmängderna $G(a), G(a^{-1}), G(b)$ och $G(b^{-1})$. Elementet e är inte med i någon av dessa mängder så de bildar ingen partition av $\mathbb{F}_2$. För att även få med e så sätter vi

$$\begin{aligned}
G_1 &= G(a) \cup \{e, a^{-1}, a^{-2}, \ldots\},\\
G_2 &= G(a^{-1}) \setminus \{a^{-1}, a^{-2}, \ldots\},\\
G_3 &= G(b),\\
G_4 &= G(b^{-1}).
\end{aligned}$$

Dessa mängder är disjunkta. Det är lätt att se att G_3 respektive G_4 är disjunkta med alla de övriga mängderna, eftersom varje ord börjar med en bokstav och deras begynnelsebokstäver skiljer sig från de andra mängdernas. Det återstår alltså att se att $G_1 \cap G_2 = \emptyset$. Man ser direkt att $G(a) \cap G_2 = \emptyset$ eftersom elementen i respektive mängd har skilda begynnelsebokstäver. Dessutom gäller att $e \notin G_2$, ty e börjar inte med a^{-1}. Att $a^{-1}, a^{-2}, \ldots \notin G_2$ följer direkt av hur G_2 är definierad.

Nu vill vi visa att $G_1 \sqcup aG_2 = \mathbb{F}_2$. Till att börja med så vill vi visa att $G_1 \cap aG_2 = \emptyset$. Ord som ligger i G_2 har som begynnelsebokstav a^{-n}, där $n \in \mathbb{N}$, som följs av åtminstone en av bokstäverna b eller b^{-1}. Att multiplicera ett sådant ord med a till vänster innebär att vi får a^{1-n} som begynnelsebokstav. Om $n = 1$ så får vi b eller b^{-1} som begynnelsebokstav istället. Dessa ord ligger självfallet inte i G_1. Men om $n > 1$ så kommer vi att ha ord som ligger i G_2, och likheten $G_1 \cap G_2 = \emptyset$ har redan visats. Alltså är G_1 och aG_2 disjunkta. Vi ser också att

$$\begin{aligned}
G_1 \sqcup aG_2 &= G(a) \cup \{e, a^{-1}, a^{-2}, \ldots\} \sqcup a\left(G(a^{-1}) \setminus \{a^{-1}, a^{-2}, \ldots\}\right)\\
&= G(a) \cup \{e, a^{-1}, a^{-2}, \ldots\} \sqcup aG(a^{-1}) \setminus \{e, a^{-1}, a^{-2}, \ldots\}\\
&= G(a) \sqcup aG(a^{-1}) = \mathbb{F}_2.
\end{aligned}$$

Ett liknande argument som det för G_1 och aG_2 visar att $G_3 \cap bG_4 = \emptyset$. Dessutom gäller $e = bb^{-1} \in bG_4$. Därmed är

$$G_3 \sqcup bG_4 = G(b) \sqcup bG(b^{-1}) = \mathbb{F}_2.$$

Dessa fyra mängder har de sökta egenskaperna och utgör alltså en paradoxal dekomposition av $\mathbb{F}_2$. $\square$

Vi noterar att man kan göra en motsvarande paradoxal uppdelning av fria grupper $\mathbb{F}_r$ för $r \geq 2$. Detta görs genom att behålla G_1, G_2, G_3 och G_4 enligt ovan och definiera $G_5 = G(c), G_6 = G(c^{-1})$ och så vidare. enligt samma mönster som G_3 och G_4 fast för de resterande generatorerna. På så vis erhåller vi följande korollarium.

Korollarium 2.4. *Den fria gruppen* $\mathbb{F}_r$ *på* r *generatorer* $a_1, a_2, \ldots, a_r$ *har en paradoxal dekomposition. Mer precist så finns en partition*

$$\mathbb{F}_r = G_1 \sqcup G_2 \sqcup \ldots \sqcup G_{2r}$$

sådan att

$$\mathbb{F}_r = G_1 \sqcup a_1 G_2 = G_3 \sqcup a_2 G_4 = \ldots = G_{2r-1} \sqcup a_r G_{2r}.$$

2.2 Paradoxal dekomposition av en mängd

Föregående argument visar att det går att dela upp en fri grupp paradoxalt. Eftersom vi är intresserade av att dela upp sfären paradoxalt vill vi överföra uppdelningen av gruppen på en mängd. Detta görs med hjälp av gruppverkan.

Definition 2.5 (Gruppverkan)**.** Låt G vara en grupp och X en mängd. Gruppen G *verkar* på X om det finns en funktion $\phi\colon G \times X \to X$ sådan att

(i) $\phi(e, x) = x$

(ii) $\phi(gh, x) = \phi(g, \phi(h, x))$

för alla $g, h \in G$ och alla $x \in X$.

Anmärkning. I fortsättningen skriver vi gx istället för $\phi(g, x)$.

Härnäst ger vi definitionen av en paradoxal dekomposition av en mängd.

Definition 2.6 (Paradoxal dekomposition)**.** Låt G vara en grupp som verkar på en mängd X. Vi säger att X kan delas upp paradoxalt om det finns delmängder $Y_1, Y_2, \ldots, Y_k, Z_1, Z_2, \ldots, Z_l$ till X och element $g_1, g_2, \ldots, g_k, h_1, h_2, \ldots, h_l \in G$ sådana att

$$X = Y_1 \sqcup Y_2 \sqcup \ldots \sqcup Y_k \sqcup Z_1 \sqcup Z_2 \sqcup \ldots \sqcup Z_l$$

och

$$X = g_1 Y_1 \sqcup g_2 Y_2 \sqcup \ldots \sqcup g_k Y_k = h_1 Z_1 \sqcup h_2 Z_2 \sqcup \ldots \sqcup h_l Z_l.$$

En sådan uppdelning kallas för en *paradoxal dekomposition.*

De paradoxala uppdelningar av fria grupper vi diskuterat i Avsnitt 2.1 är specialfallet när en fri grupp verkar på sig själv genom vänstermultiplikation.

Definition 2.7 (Fri verkan)**.** En grupp G sägs *verka fritt* på en mängd X om $gx \neq x$ för alla $x \in X$ och alla $g \neq e$.

Vi betecknar mängden $\{gx\colon g \in G\}$ med Gx. En sådan mängd kallas för en *bana.*

Sats 2.8 (Paradoxal dekomposition av en mängd)**.** *Antag att* $\mathbb{F}_2$ *verkar fritt på en mängd* X*. Då går* X *att dela upp paradoxalt.*

Bevis. Då $\mathbb{F}_2$ verkar på X så bildar banorna $\{\mathbb{F}_2 x\}_{x \in X}$ en partition av X. Enligt urvalsaxiomet (Appendix B) så kan vi välja en punkt ur varje bana. Kalla mängden av dessa punkter för Y. Det följer från definitionen av Y att:

(i) $X = \bigcup_{g \in \mathbb{F}_2} gY$

(ii) $\forall g, g' \in \mathbb{F}_2, g \neq g'$ gäller $gY \cap g'Y = \emptyset$.

Låt G_1, G_2, G_3 och G_4 vara som i Lemma 2.3. Från (i) fås att $X = \mathbb{F}_2 Y = \bigcup_{g\in\mathbb{F}_2} gY$. Sätt:

$$\Omega_i = G_i Y = \bigcup_{g\in G_i} gY \text{ för } i = 1,2,3,4$$

och notera att $X = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3 \cup \Omega_4$. Då gäller att

$$\Omega_1 \sqcup a\Omega_2 = G_1 Y \sqcup aG_2 Y = (G_1 \sqcup aG_2)Y = \mathbb{F}_2 Y = X$$

och

$$\Omega_3 \sqcup b\Omega_4 = G_3 Y \sqcup bG_4 Y = (G_3 \sqcup bG_4)Y = \mathbb{F}_2 Y = X.$$

Frågan som återstår är huruvida $X = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3 \cup \Omega_4$ är en partition. Antag $\Omega_i \cap \Omega_j \neq \emptyset$ för alla $i \neq j$. Då finns $x \in \Omega_i \cap \Omega_j$, det vill säga $x = g_i y_i = g_j y_j$ där $g_i \in G_i$, $g_j \in G_j$, $y_i, y_j \in Y$. Detta medför att

$$Y \ni y_i = g_i^{-1} g_j y_j \in \mathbb{F}_2 Y.$$

Från (ii) vet vi att $Y \cap gY = \emptyset$ för alla $g \neq e$ och därmed måste $g_i^{-1} g_j = e$ vilket medför att $g_i = g_j$. Eftersom G_1 och G_2 är disjunkta ger detta en motsägelse, det vill säga

$$X = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3 \cup \Omega_4$$

är en disjunkt uppdelning. Vi har därmed visat att det finns en paradoxal dekomposition av X. □

2.3 Paradoxal dekomposition av S^2

Vi har nu sett hur det går att paradoxalt dela upp en mängd genom att låta en fri grupp verka fritt på den. Eftersom vi är intresserade av enhetssfären S^2 och rotationer av denna kommer vi nu att undersöka gruppen av rotationer i tre dimensioner SO(3), och dess verkan på S^2.

Definition 2.9. Gruppen SO(n) definieras enligt

$$\mathrm{SO}(n) = \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})\colon AA^T = I, \det A = 1\}.$$

Gruppen SO(3) består av avståndsbevarande rotationsmatriser i $GL_3(\mathbb{R})$. SO(3) verkar på $\mathbb{R}^3$ genom matrismultiplikation. Om $R \in \mathrm{SO}(3)$ och $x \in \mathbb{R}^3$, så gäller att $\|Rx\| = \|x\|$, där $\|\cdot\|$ är den euklidiska normen i $\mathbb{R}^3$.

För att använda resultaten från föregående avsnitt behövs en fri grupp i SO(3).

Sats 2.10. SO(3) *har en delgrupp G som är isomorf med $\mathbb{F}_2$*

Ovanstående sats bevisas i Avsnitt 3. I beviset frångår vi [13].

Det finns därmed en fri delgrupp $G \subset \mathrm{SO}(3)$. Då G verkar på sfären fixerar varje element i G två punkter, skärningen mellan rotationsaxeln och sfären. Detta leder till att vi inte har någon fri verkan. Vi kan alltså inte använda Sats 2.8 rakt av för att göra en paradoxal dekomposition av S^2 med G. Om vi däremot låter C vara den mängden av fixpunkter till den fria delgruppens verkan på S^2 kan vi använda Sats 2.8 på $S^2 \setminus C$. Vi har

$$C = \{x \in X : \exists R \in G \setminus \{I\} : Rx = x\}. \tag{1}$$

Observera att C är uppräknelig eftersom varje rotationsmatris har högst två fixpunkter på sfären, se [8, s. 18–19] för detaljer.

Sats 2.11 (Hausdorffs paradox)**.** *Låt C vara som i (1). Då existerar en dekomposition*

$$S^2 \setminus C = \Omega_1 \sqcup \Omega_2 \sqcup \Omega_3 \sqcup \Omega_4$$

sådan att

$$S^2 \setminus C = \Omega_1 \sqcup A\Omega_2 = \Omega_3 \sqcup B\Omega_4$$

för några rotationsmatriser $A, B \in \mathrm{SO}(3)$.

Bevis. Låt A och B vara generatorerna till den fria delgruppen G. Antag att G_1, G_2, G_3, G_4 är som i Lemma 2.3. Då gäller för alla rotationer $R \in G \setminus \{I\}$ att $Rx \neq x$, för alla $x \in S^2 \backslash C$, det vill säga G verkar fritt på $S^2 \backslash C$, och eftersom G är en fri grupp så följer påståendet av Sats 2.8. □

För att kringgå problemet med den uppräkneliga mängden av fixpunkter C så att vi kan göra en paradoxal uppdelning av hela sfären S^2 behöver vi använda oss av följande Lemma.

Lemma 2.12. *Låt C vara en uppräknelig delmängd av S^2. Då existerar en dekomposition*

$$S^2 = \Sigma_1 \sqcup \Sigma_2$$

sådan att

$$S^2 \backslash C = \Sigma_1 \sqcup R\Sigma_2$$

för någon rotationsmatris $R \in \mathrm{SO}(3)$.

I beviset används Baires kategorisats.

Sats 2.13 (Baires kategorisats)**.** *Om $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ är öppna, täta delmängder till ett fullständigt metriskt rum så är snittet $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$ en tät mängd.*

Bevis finns i Appendix C.

Bevis av Lemma 2.12. Vi vill hitta en matris R för vilken det gäller att

$$R^i C \cap R^j C = \emptyset, \text{ för alla } i \neq j.$$

För att göra detta tittar vi på mängden av sådana R och visar att den är icke-tom. Notera att

$$R^i C \cap R^j C = R^i (C \cap R^{j-i} C) = \emptyset, \text{ för alla } i \neq j \Leftrightarrow C \cap R^k C = \emptyset, \text{ för alla } k \neq 0.$$

Låt V vara mängden av alla R som uppfyller villkoret. Då kan V skrivas

$$V = \{R \in \mathrm{SO}(3) : \forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \forall x, y \in C, R^k x \neq y\}.$$

Definiera för varje heltal k mängden

$$V_k(x, y) = \{R \in \mathrm{SO}(3) : \; R^k x \neq y\}$$

så att

$$V = \bigcap_{k \neq 0} \left(\bigcap_{x, y \in C} V_k(x, y) \right).$$

Då $\mathrm{SO}(3)$ är kompakt [1, s. 77] och därmed fullständig gäller enligt Baires kategorisats att om $V_k(x, y)$ är öppna och täta i $\mathrm{SO}(3)$ så är V tät och därmed icke-tom.

Vi börjar med att visa att $V_k(x, y)$ är öppen. För varje val av $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ och $x \in C$, bilda en funktion

$$\begin{aligned} f_{k,x} : \mathrm{SO}(3) &\to S^2 \\ R &\mapsto R^k x. \end{aligned}$$

Då gäller $V_k(x, y)^c = f_{k,x}^{-1}(\{y\})$. Eftersom $f_{k,x}$ är kontinuerlig och $\{y\}$ är sluten så följer att $V_k(x, y)^c$ är sluten, det vill säga $V_k(x, y)$ är öppen.

För att visa att $V_k(x, y)$ är tät, tag $R \in V_k(x, y)^c$. Då gäller $R^k x = y$. Vi vet att R roterar kring någon axel med en vinkel θ. Tag $\varepsilon > 0$ godtyckligt. Låt $S \in \mathrm{SO}(3)$ rotera kring samma axel som R med en vinkel $\theta - \varepsilon / k$. Det gäller att R^k roterar med vinkel θk och S^k roterar med vinkel $\theta k - \varepsilon$ och vi får $S^k x \neq y$, det vill säga $S \in V_k(x, y)$. Då ε är godtyckligt valt kan vi välja S godtyckligt nära R och därmed är R hopningspunkt till $V_k(x, y)$. Det följer att $V_k(x, y)$ är tät.

Vi kan nu sätta

$$\Sigma_2 = C \sqcup RC \sqcup R^2 C \sqcup \ldots ; \; \Sigma_1 = S^2 \backslash \Sigma_2.$$

Eftersom $R\Sigma_2 = RC \sqcup R^2 C \sqcup R^3 C \sqcup \ldots$ har vi eliminerat C ur mängden och det följer att $\Sigma_1 \sqcup R\Sigma_2 = S^2 \backslash C$. □

Genom Lemma 2.12 kan vi alltså först dela upp våran sfär i två bitar, rotera och sätta ihop dessa till en sfär utan fixpunkter. Denna sfär kan nu enligt Sats 2.11 delas upp i fyra bitar som roteras för att få två kopior av sfären utan fixpunkter. För att få två kompletta sfärer delar vi nu upp de två kopiorna av sfären utan fixpunkter i två delar var för att rotera dessa och få två hela sfärer, här används återigen Lemma 2.12. Totalt kan vi alltså dela upp sfären i $2 \cdot 4 \cdot 2 = 16$ bitar, rotera dessa och sätta ihop till två nya sfärer.

Sats 2.14 (Banach-Tarskis paradox på S^2)**.** *Det finns en partition*

$$S^2 = \Gamma_1 \sqcup \ldots \sqcup \Gamma_{16}$$

och rotationsmatriser $R_1, \ldots, R_{16}$ *så att*

$$S^2 = \bigsqcup_{i=1}^{8} R_i \Gamma_i = \bigsqcup_{i=9}^{16} R_i \Gamma_i.$$

Anmärkning. Det har visats att den paradoxala dekompositionen av sfären går att genomföra med mindre än 16 bitar [11].

I Appendix G ges en skiss av hur man bevisar motsvarande resultat för sfärer i högre dimensioner.

För att få en uppdelning av $B^3 \setminus \{0\}$ så observerar vi att det med hjälp av sfäriska koordinater går att skriva $B^3 \setminus \{0\} = S^2 \times (0, 1]$. Vi tänker oss alltså att $B^3 \setminus \{0\}$ är uppbyggd av sfärer med radier i intervallet $(0, 1]$. Genom att använda föregående sats på dessa sfärer får vi en paradoxal uppdelning av $B^3 \setminus \{0\}$. Vi har därmed bevisat följande sats:

Banach-Tarskis paradox. *Det finns en paradoxal uppdelning av* $B^3 \setminus \{0\}$.

3 Fria delgrupper av $\mathrm{SO}(3)$

Målet med denna del av rapporten är att visa Sats 2.10, det vill säga att $\mathrm{SO}(3)$ har en fri delgrupp med två generatorer. Beviset sker i flera steg. Vi poängterar att det finns enklare metoder, men fördelen med den metod vi använder är att den ger ett stort antal fria delgrupper. Vi kommer i vårt argument använda oss av grupperna

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) = \{A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) : \det A = 1\}$$

och

$$\mathrm{SU}(2) = \{A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) : AA^* = A^*A = I\}.$$

I stora drag går argumentet till som följer:

(i) Ta fram en fri delgrupp av $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ med Kleins pingponglemma.

(ii) Föra över den fria delgruppen från $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ till $\mathrm{SU}(2)$. Detta steg består av ett par delar.

   (a) Visa att det till varje ord i en fri grupp finns matriser i $\mathrm{SU}(2)$ som inte är ett nollställe till ordet.

   (b) Använda Baires kategorisats för att ta fram ett stort antal fria grupper av $\mathrm{SU}(2)$.

(iii) Konstruera en homomorfi $\mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(3)$ som har ändlig kärna.

(iv) Använda denna homomorfi för att föra över en fri delgrupp från $\mathrm{SU}(2)$ till $\mathrm{SO}(3)$.

3.1 Fri delgrupp av $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$

I detta avsnitt visar vi att $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ har en fri delgrupp. För detta ändamål använder vi fria produkter samt Kleins pingponglemma. Presentationen baseras på den i [7, s. 25-26].

Vi inleder med en diskussion om fria produkter. Låt G och H vara två grupper. Den *fria produkten* $G * H$ är gruppen som består av alla ord på formen

$$g_1 h_1 \cdots g_k h_k$$

där $g_i \in G$ och $h_j \in H$ och $g_2, g_3, \ldots, g_k$ och $h_1, h_2, \ldots, h_{k-1}$ inte är lika med identiteten.

Gruppoperationen är sammansättning och reducering av ord. Med reducering menas följande: om det i det sammansatta ordet finns två bokstäver från samma grupp bredvid varandra[1] så kan dessa multipliceras ihop i den gruppen och ersättas med den resulterande produkten. Dessutom stryks alla identitetselement, oavsett vilken grupp de härrör från.

För att tydliggöra ger vi ett exempel på en fri produkt. Låt $G = \langle g \rangle$ vara den cykliska gruppen av ordning fem och $H = \langle h \rangle$ vara den cykliska gruppen av ordning tre. I den fria produkten $G * H$ kan vi göra följande räkning:

$$(hg^4h^2g^2)(g^3hg^2h) = hg^4h^2 \underbrace{(g^2g^3)}_{g^5=e} hg^2h = hg^4 \underbrace{(h^2h)}_{h^3=e} g^2h = h \underbrace{(g^4g^2)}_{g^6=g} h = hgh.$$

Ett lite mer komplicerat fall kan uppstå då $G = H$. Betrakta till exempel fallet $G = H = \mathbb{Z}$. Det är lätt att tro att $\mathbb{Z} * \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$, men så är inte fallet. I ovanstående exempel såg vi att det går att multiplicera ihop element från samma grupp. Exempelvis går det att tänka sig att ordet $5 + 2$ där 5 kommer från den första kopian av $\mathbb{Z}$ och 2 kommer från den andra kopian kan förenklas till 7. Den fria produkten håller dock reda på från vilken kopia av $\mathbb{Z}$ elementen kommer ifrån och skiljer på dessa.

Det visar sig att $\mathbb{Z} * \mathbb{Z} \cong \mathbb{F}_2$, [10, s. 164]. Ett godtyckligt element i $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ är på formen $m_1 + n_1 + m_2 + n_2 + \ldots + n_k$,[2] där m_i ligger i den första kopian av $\mathbb{Z}$ och n_i ligger i den andra. Funktionen som avbildar detta element på $a^{m_1} b^{n_1} a^{m_2} \cdots b^{n_k}$ i $\mathbb{F}_2$ är en isomorfi.

[1] Det vill säga att det sammansatta ordet innehåller $g_i g_j$ eller $h_i h_j$.

[2] Observera att $m + n \neq n + m$ om m och n kommer från olika kopior av $\mathbb{Z}$.

Lemma 3.1 (Kleins pingponglemma)**.** *Låt G vara en grupp som verkar på en mängd X. Låt Γ_1 och Γ_2 vara två delgrupper till G och låt Γ vara gruppen som genereras av Γ_1 och Γ_2. Antag att Γ_1 har åtminstone tre element och att Γ_2 har åtminstone två element.*

Om det dessutom finns delmängder $X_1, X_2 \subset X$ med $X_2 \not\subset X_1$ sådana att

$$\begin{aligned} \gamma(X_2) \subset X_1 \quad &\textit{för varje} \quad \gamma \in \Gamma_1, \gamma \neq 1 \\ \gamma(X_1) \subset X_2 \quad &\textit{för varje} \quad \gamma \in \Gamma_2, \gamma \neq 1 \end{aligned}$$

så är Γ isomorf med den fria produkten $\Gamma_1 * \Gamma_2$.

Bevis. Varje element i Γ kan skrivas som en produkt $a_1 b_1 a_2 b_2 \cdots a_k b_k$ där $a_i \in \Gamma_1$ och $b_i \in \Gamma_2$, och alla a_i och b_i, utom a_1 och b_k, ej är identiteten. För att visa att Γ är en fri produkt så vill vi visa att ingen icketrivial sådan produkt är lika med identiteten. Om så är fallet så kan vi identifiera dessa produkter med elementen i $\Gamma_1 * \Gamma_2$ och på så vis få en isomorfi mellan Γ och den fria produkten.

Tag en godtycklig icketrivial produkt $w \in \Gamma$. Vi får några olika fall beroende på huruvida a_1 och b_k är lika med identiteten.

Om $w = a_1 b_1 a_2 b_2 \ldots a_k$, där $a_i \in \Gamma_1$ och $b_i \in \Gamma_2$ så är

$$\begin{aligned} w(X_2) = a_1 b_1 \ldots a_{k-1} b_{k-1} a_k(X_2) &\subset a_1 b_1 \ldots a_{k-1} b_{k-1}(X_1) \\ &\subset a_1 b_1 \ldots a_{k-1}(X_2) \subset \ldots \subset a_1(X_2) \subset X_1. \end{aligned}$$

Om $w = 1$ skulle $w(X_2) = X_2$. Men enligt förutsättningarna i lemmat är X_2 inte en delmängd till X_1. Eftersom $w(X_2) \subset X_1$ kan w alltså inte vara identiteten.

För att hantera resterande fall utnyttjar vi det vi visat ovan. Om w är på formen $b_1 a_2 b_2 a_2 \ldots b_k$ så tar vi ett godtyckligt element $a \in \Gamma_1 \setminus \{e\}$. Då är awa^{-1} ett element på samma form som det i argumentet ovan. Alltså måste $awa^{-1} \neq 1$ vilket medför att $w \neq 1$.

Om w istället är på formen $a_1 b_1 \ldots a_k b_k$ så kan vi ta $a \in \Gamma_1 \setminus \{e, a_1^{-1}\}$ och utföra samma argument med awa^{-1}. Slutligen om $w = b_1 a_2 \ldots a_k$, tag $a \in \Gamma_1 \setminus \{e, a_k\}$ och applicera samma argument på awa^{-1}.

Observera att vi i dessa val av a använder det faktum att $|\Gamma_1| \geq 3$. □

Korollarium 3.2. $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ *har en fri delgrupp $\mathbb{F}_2$ med två generatorer.*

Bevis. Vi har tidigare sett att $\mathbb{F}_2 \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$. Betrakta nu delgrupperna

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : \ n \in \mathbb{Z} \right\}, \\ \Gamma_2 &= \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2n & 1 \end{pmatrix} : \ n \in \mathbb{Z} \right\} \end{aligned}$$

till $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$. Det går att visa att Γ_1, Γ_2 och $\mathbb{Z}$ är isomorfa[3]. Vi vill visa att gruppen som genereras av Γ_1 och Γ_2 är den fria produkten av dessa grupper.

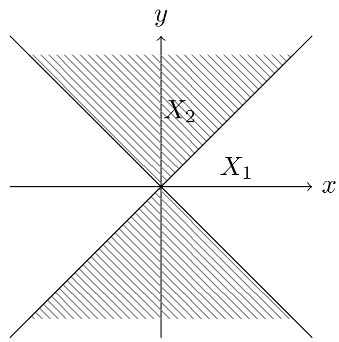
Låt Γ_1, Γ_2 verka på $\mathbb{R}^2$ genom matrismultiplikation. Vi betraktar mängderna

$$\begin{aligned} X_1 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon |x| > |y|\} \\ X_2 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon |y| > |x|\} \end{aligned}$$

som illustreras i Figur 2. En räkning visar att $\gamma_1(X_2) \subset X_1$ för $\gamma_1 \in \Gamma_1$ och att $\gamma_2(X_1) \subset X_2$ för $\gamma_2 \in \Gamma_2$. Enligt Kleins pingponglemma så är

$$\langle \Gamma_1, \Gamma_2 \rangle \cong \Gamma_1 * \Gamma_2 \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z} \cong \mathbb{F}_2.$$ □

[3] Avbildningen $n \mapsto \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ är en isomorfi mellan $\mathbb{Z}$ och Γ_1, och en motsvarande isomorfi finns för Γ_2.



Figur 2: Områdena X_1 (vitt) och X_2 (ifyllt).

3.2 Fri delgrupp av SU(2)

Härnäst vill vi med hjälp av vår fria delgrupp av $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ konstruera en fri delgrupp av SU(2). Idén är att betrakta ord i den fria gruppen som polynom. Om vi till exempel har ordet $w = a^2b^5a^3b$ så kan vi se det som en funktion

$$w : \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$$

$$(A, B) \mapsto w(A, B) = A^2B^5A^3B,$$

där vi helt enkelt ersätter alla a med matrisen A och alla b med matrisen B. Motsvarande funktioner kan konstrueras för varje ord i $\mathbb{F}_2$. Låt

$$P_w : \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \to \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{C}),$$

definieras enligt

$$P_w(X, Y) = w(X, Y) - I.$$

Att $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ har en fri delgrupp innebär att det existerar två matriser $A, B \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ så att $P_w(A, B) \neq 0$ för alla ord w som inte är det tomma ordet. För att visa att SU(2) har en fri delgrupp vill vi hitta matriser $A, B \in \mathrm{SU}(2)$ med samma egenskap.

Proposition 3.3. *Det finns $A, B \in \mathrm{SU}(2)$ så att $P_w(A, B) \neq 0$ för varje w i $\mathbb{F}_2 \setminus \{I\}$.*

För att bevisa Proposition 3.3 behövs först några lemman. Till att börja med behövs följande lemman om polynom.

Lemma 3.4. *Låt $Q : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ vara en polynomfunktion och $V \subset \mathbb{C}^n$ en öppen mängd. Om $Q\big|_V \equiv 0$ så är $Q \equiv 0$.*

Lemma 3.5. *Låt $Q : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ vara en polynomfunktion. Om $Q\big|_{\mathbb{R}^n} \equiv 0$ så är $Q \equiv 0$.*

Bevis finns i Appendix E.

Vi behöver dessutom först visa det svagare påståendet att det för varje ord w existerar matriser $A, B \in \mathrm{SU}(2)$ sådana att $P_w(A, B) \neq 0$.

Lemma 3.6. *Låt w vara vara ett ord i $\mathbb{F}_2 \setminus \{I\}$. Då finns det matriser $A, B \in \mathrm{SU}(2)$ så att $P_w(A, B) \neq 0$*

För att bevisa detta använder vi oss av matrisexponentialfunktionen och påminner om att den definieras enligt

$$\exp(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^n}{n!}.$$

Betrakta nu mängderna

$$\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) = \{X : \operatorname{tr} X = 0\}$$

och

$$\mathfrak{su}_2(\mathbb{C}) = \{X \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) : X^* = -X\}.$$

Observera att

$$\exp(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})) \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}),$$
$$\exp(\mathfrak{su}_2(\mathbb{C})) \subset \mathrm{SU}(2).$$

Observera också att matriserna $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ och $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ som genererar en fri delgrupp av $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ ligger i $\exp(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$ [4]. Slutligen observerar vi att både $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ och $\mathfrak{su}_2(\mathbb{C})$ är vektorrum över $\mathbb{R}$.

Bevis av Lemma 3.6. Antag för motsägelse att det för något ord w gäller att $P_w(A, B) = 0$ för alla $A, B \in \mathrm{SU}(2)$.

Vi noterar att om vi har en matris $X \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ så kan vi skriva

$$X = \underbrace{\frac{X - X^*}{2}}_{\in \mathfrak{su}_2(\mathbb{C})} + i \underbrace{\frac{X + X^*}{2i}}_{\in \mathfrak{su}_2(\mathbb{C})}. \tag{2}$$

Från detta följer att

$$\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) = \mathfrak{su}_2(\mathbb{C}) \oplus i\, \mathfrak{su}_2(\mathbb{C})$$

Vi definierar funktionen

$$Q : \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \times \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \to M_2(\mathbb{C})$$

genom

$$Q(Z_1, Z_2) = P_w\left(\exp(Z_1), \exp(Z_2)\right)$$

Vi noterar att Q ej kan vara identiskt lika med noll eftersom det skulle motsäga att det finns en fri delgrupp i $\exp(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$. För varje val av $Z_1, Z_2 \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ definiera

$$F_{Z_1,Z_2}(t) = Q(tZ_1, tZ_2).$$

Om alla dessa funktioner är identiskt lika med noll så är även Q det vilket ger oss en motsägelse. Vi observerar att F_{Z_1,Z_2} är en sammansättning av analytiska funktioner och är därmed analytisk.

Vi vill studera Taylorutvecklingen av F_{Z_1,Z_2}. Vi definierar därför $R_k \colon \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \times \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \to \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ genom

$$R_k(Z_1, Z_2) = \frac{d^k}{dt^k} F_{Z_1,Z_2}(t)\Big|_{t=0}.$$

Då är $R_k(Z_1, Z_2)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ Taylorkoefficienterna till F_{Z_1,Z_2}. Lägg märke till att R_k är ett matrispolynom så elementen i matrisen $R_k(Z_1, Z_2)$ är polynomfunktioner i $(Z_1)_{ij}$ och $(Z_2)_{ij}$.

Enligt 2 kan vi skriva $Z_n = X_n + iY_n$ där $X_n, Y_n \in \mathfrak{su}_2(\mathbb{C})$. Från ursprungsantagandet att $P_w(A, B) = 0$ för $A, B \in \mathrm{SU}(2)$ får vi att $R_k \equiv 0$ på $\mathfrak{su}_2(\mathbb{C}) \times \mathfrak{su}_2(\mathbb{C})$.

Då $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ är ett vektorrum där elementen är komplexa matriser så kan vi identifiera det med $\mathbb{C}^n$ för något tal n. Uppdelningen $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) = \mathfrak{su}_2(\mathbb{C}) \oplus i\, \mathfrak{su}_2(\mathbb{C})$ kan alltså ses som motsvarigheten till att dela upp $\mathbb{C}^n$ i real- och imaginärdel (det vill säga $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^n \oplus i\, \mathbb{R}^n$). Eftersom $R_k \equiv 0$ på $\mathfrak{su}_2(\mathbb{C}) \times \mathfrak{su}_2(\mathbb{C})$ och varje element i R_k är ett polynom i n komplexa variabler så måste $R_k \equiv 0$ på $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \times \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ enligt Lemma 3.5.

Att $R_k \equiv 0$ innebär att koefficienterna till Taylorutvecklingen av avbildningen F_{Z_1,Z_2} är lika med noll. Då avbildningen är analytisk får vi alltså att $F_{Z_1,Z_2} \equiv 0$ för alla $Z_1, Z_2 \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. Därmed måste $Q \equiv 0$ på $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \times \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ vilket motsäger att $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ har en fri delgrupp. Det finns alltså till varje ord w två matriser $A, B \in \mathrm{SU}(2)$ så att $P_w(A, B) \neq 0$. □

Vi har nu alla verktyg som behövs för att bevisa Proposition 3.3. Utöver det vi visat ovan så kommer vi även att använda Baires kategorisats.

[4] $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = \exp\left(\begin{smallmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ och $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right) = \exp\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

Bevis av Proposition 3.3. Vi vill nu visa att det finns två matriser $A, B \in \mathrm{SU}(2)$ så att det för alla ord w gäller att $P_w(A, B) \neq 0$. Vi gör detta genom att använda Baires kategorisats (Sats 2.13). Vårt mål är att visa att

$$\mathcal{U} := \bigcap_w \{(A, B) \in \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2) : P_w(A, B) \neq 0\} \neq \emptyset,$$

där snittet tas över alla ord w i $\mathbb{F}_2 \setminus \{I\}$. Sätt

$$\mathcal{U}_w = \{(A, B) \in \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2) : P_w(A, B) \neq 0\}.$$

Om vi kan visa att $\mathcal{U}_w$ är öppna och täta i $\mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2)$ så följer påståendet av Baires kategorisats.

Vi börjar med att visa att $\mathcal{U}_w$ är öppen. Eftersom $\mathcal{U}_w = P_w^{-1}(\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{C}) \setminus \{0\})$ där $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$ är en öppen mängd och $P_w(A, B)$ är kontinuerlig följer det att $\mathcal{U}_w$ är öppen.

Det återstår att visa att $\mathcal{U}_w$ är tät. Om det inte gäller så existerar en öppen mängd $V \subset \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2)$, $V \neq \emptyset$ sådan att $\mathcal{U}_w \cap V = \emptyset$. Detta medför att $P_w(A, B) = 0$ för alla $(A, B) \in V$. Enligt Lemma 3.4 följer att $P_w(A, B) = 0$ på hela $\mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2)$ vilket motsäger Lemma 3.6.

Enligt Baires kategorisats är alltså $\mathcal{U}$ tät och speciellt icke-tom. Därmed finns $(A, B) \in \mathcal{U}$ som genererar en fri delgrupp av $\mathrm{SU}(2)$. $\square$

Notera att detta argument faktiskt bevisar att mängden av par $(A, B) \in \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2)$ som genererar en fri grupp är tät. Därmed får vi ett stort antal fria delgrupper av $\mathrm{SU}(2)$.

3.3 En homomorfi från SU(2) till SO(3)

Vi vill hitta en homomorfi från $\mathrm{SU}(2)$ till $\mathrm{SO}(3)$ eftersom vi då kan överföra den fria gruppen i $\mathrm{SU}(2)$ till $\mathrm{SO}(3)$. Detta görs på samma sätt som i [14]; se även [5, s. 20] för ett likartat argument. Gruppen $\mathrm{SO}(3)$ består av matriser som bevarar skalärprodukten på $\mathbb{R}^3$. Idén är att hitta ett lämpligt tredimensionellt vektorrum så att $\mathrm{SU}(2)$ bevarar skalärprodukten på det rummet. Vi kan sedan utnyttja det för att hitta en homomorfi från $\mathrm{SU}(2)$ till $\mathrm{SO}(3)$.

Proposition 3.7. *Det finns en homomorfi* $\Phi : \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(3)$ *med* $\ker \Phi = \{\pm I\}$.

I beviset används den ortogonala gruppen $\mathrm{O}(3)$. Vi påminner om att den defineras enligt

$$\mathrm{O}(3) = \{R \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R}) : RR^T = I\}.$$

Bevis. Betrakta vektorrummet $\mathfrak{su}_2(\mathbb{C})$ med skalärprodukt $\langle U, V\rangle = \frac{1}{2}\operatorname{tr}(UV^*)$. Detta rum är tredimensionellt och har en ON-bas som består av

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix},\ E_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ E_3 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

Att avbilda E_i på $\mathbf{e}_i$, standardbasen i $\mathbb{R}^3$, ger en funktion från $\mathfrak{su}_2(\mathbb{C})$ till $\mathbb{R}^3$. Detta är en isomorfi av skalärproduktsrum.

Om vi har en matris $A \in \mathrm{SU}(2)$ så kan vi bilda en linjär avbildning Φ_A på $\mathfrak{su}_2(\mathbb{C})$ genom att sätta

$$\Phi_A(U) = AUA^*$$

Denna avbildning bevarar skalärprodukter ty

$$\begin{aligned}
\langle \Phi_A(U), \Phi_A(V) \rangle &= \langle AUA^*, AVA^* \rangle \\
&= \frac{1}{2} \operatorname{tr}(AUA^*(AVA^*)^*) \\
&= \frac{1}{2} \operatorname{tr}(AUA^*(A^*)^* V^* A^*) \\
&= \frac{1}{2} \operatorname{tr}(AUA^* A V^* A^*) \\
&= \frac{1}{2} \operatorname{tr}(AUV^* A^*) \\
&= \frac{1}{2} \operatorname{tr}(UV^*) \\
&= \langle U, V \rangle
\end{aligned}$$

där vi använder $A^* = A^{-1}$ och $\operatorname{tr}(XY) = \operatorname{tr}(YX)$. Eftersom vi tidigare kom fram till att $\mathfrak{su}_2(\mathbb{C})$ och $\mathbb{R}^3$ är isomorfa kan vi se Φ_A som en linjär avbildning på $\mathbb{R}^3$ som bevarar skalärprodukten. Men de avbildningar på $\mathbb{R}^3$ som bevarar skalärprodukten är precis de som ligger i $\mathrm{O}(3)$. Vi kan alltså tänka oss Φ_A som ett element i $\mathrm{O}(3)$. Avbildningen $\Phi : A \mapsto \Phi_A$ är en funktion från $\mathrm{SU}(2)$ till $\mathrm{O}(3)$. Vi observerar att

$$\Phi(AB) = \Phi_{AB} = \Phi_A \circ \Phi_B = \Phi(A) \circ \Phi(B)$$

och därmed är Φ en homomorfi. Dessutom går det att visa att Φ är kontinuerlig.

Vi har alltså en kontinuerlig homomorfi $\Phi : \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{O}(3)$. Härnäst följer ett topologiskt argument för att $\operatorname{Im}\Phi \subset \mathrm{SO}(3)$. Varje matris i $\mathrm{SU}(2)$ har formen

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$$

där α,β är komplexa tal och $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. Låt $\alpha = x + iy$ och $\beta = z + iw$. Då ser vi att

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in S^3$$

och därmed är $\mathrm{SU}(2)$ och S^3 homeomorfa. Då S^3 är sammanhängande medför detta att även $\mathrm{SU}(2)$ är sammanhängande. Då Φ är kontinuerlig så måste $\operatorname{Im}\Phi$ vara sammanhängande. Gruppen $\mathrm{O}(3)$ består av två komponenter där den ena är $\mathrm{SO}(3)$ och den andra består av matriser med determinant -1. Eftersom $\operatorname{Im}\Phi$ är sammanhängande måste den alltså ligga i en av dessa. Då Φ är en homomorfi så gäller $I \in \operatorname{Im}\Phi$. Eftersom det $I = 1$ så är $\operatorname{Im}\Phi \subset \mathrm{SO}(3)$. Vi har alltså visat att Φ är en homomorfi från $\mathrm{SU}(2)$ till $\mathrm{SO}(3)$.

Kärnan till Φ består av matriser $A \in \mathrm{SU}(2)$ som uppfyller ekvationerna $AE_iA^* = E_i$, för $i = 1, 2, 3$ och direkta beräkningar ger att $\ker\Phi = \{\pm I\}$. □

3.4 Fri delgrupp av SO(3)

Bevis av Sats 2.10. Låt $A, B \in \mathrm{SU}(2)$ generera en fri delgrupp. Vårt mål är att visa att $\Phi(A)$ och $\Phi(B)$ genererar en fri delgrupp av $\mathrm{SO}(3)$. Låt w vara ett icketrivialt reducerat ord i $\Phi(A)$ och $\Phi(B)$, det vill säga

$$w = \Phi(A)^{n_1} \Phi(B)^{n_2} \cdots \Phi(B)^{n_k},$$

där inte alla n_i är lika med noll. Frågan är om detta kan vara lika med I. Om $w = I$ så medför det att

$$I = w = \Phi(A)^{n_1} \Phi(B)^{n_2} \cdots \Phi(B)^{n_k} = \Phi(A^{n_1} B^{n_2} \cdots B^{n_k}),$$

där vi utnyttjar att Φ är en homomorfi. Ovanstående likhet innebär att $A^{n_1} B^{n_2} \cdots B^{n_k} \in \ker\Phi$. Eftersom $\ker\Phi = \{\pm I\}$ skulle detta innebära antingen att $A^{n_1} B^{n_2} \cdots B^{n_k} = I$ eller

$A^{n_1}B^{n_2}\cdots B^{n_k} = -I$. Det första fallet kan inte inträffa eftersom $\langle A, B\rangle$ är fri. I det andra fallet har vi då att $(A^{n_1}B^{n_2}\cdots B^{n_k})^2 = A^{n_1}B^{n_2}\cdots B^{n_k}A^{n_1}B^{n_2}\cdots B^{n_k} = I$ vilket återigen är omöjligt eftersom $\langle A, B\rangle$ är fri. Alltså kan inte w vara lika med I och därmed är $\langle \Phi(A), \Phi(B)\rangle$ en fri delgrupp av SO(3). □

Genom olika val av $A, B \in \mathrm{SU}(2)$ får vi ett stort antal fria delgrupper av SO(3).
Ett explicit exempel på en fri delgrupp av SO(3) ges i Avsnitt D.1.

4 Går cirkeln att dela upp paradoxalt?

Vi har nu sett att det går att dela upp S^2 och $B^3 \setminus \{0\}$ paradoxalt med hjälp av att låta en fri delgrupp av SO(3) verka på den. Vårt mål är att visa att det inte går att dela upp cirkeln S^1 paradoxalt genom att låta den abelska gruppen SO(2) verka på S^1. Mer generellt, om en abelsk grupp verkar på en mängd så visar det sig att det inte går att dela upp mängden paradoxalt genom dess gruppverkan.

Mängden av alla delmängder av en mängd X benämns $\mathcal{P}(X)$. Låt G vara en grupp som verkar på en mängd X. Detta benämns ibland $G \curvearrowright X$. Vi börjar med att definiera ett vänsterinvariant ändligt additivt sannolikhetsmått.

Definition 4.1. Låt G vara en grupp, X vara en mängd och $G \curvearrowright X$. Ett *vänsterinvariant ändligt additivt sannolikhetsmått* är en funktion $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0, 1]$ som uppfyller

(i) $\mu(\emptyset) = 0$, $\mu(X) = 1$

(ii) $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ för alla disjunkta mängder $A, B \in \mathcal{P}(X)$

(iii) $\mu(gA) = \mu(A)$ för alla $A \in \mathcal{P}(X), g \in G$

Det följer då att om det finns ett sådant mått μ på en mängd X och en grupp G som verkar på X så går det inte att göra en paradoxal dekomposition genom denna gruppverkan. För om

$$X = X_1 \sqcup \ldots \sqcup X_k \sqcup Y_1 \sqcup \ldots \sqcup Y_l$$

och det existerar $a_1, \ldots a_k, b_1, \ldots, b_l \in G$ sådana att

$$X = a_1X_1 \sqcup \ldots \sqcup a_kX_k = b_1Y_1 \sqcup \ldots \sqcup b_lY_l,$$

det vill säga X går att dela upp paradoxalt. Då gäller att

$$\begin{aligned}
1 = \mu(X) &= \mu(X_1 \sqcup \ldots \sqcup X_k \sqcup Y_1 \sqcup \ldots \sqcup Y_l) \\
&= \mu(a_1X_1 \sqcup \ldots \sqcup a_kX_k) + \mu(b_1Y_1 \sqcup \ldots \sqcup b_lY_l) \\
&= \mu(X) + \mu(X) = 2,
\end{aligned}$$

vilket leder till en motsägelse.

4.1 SO(2) är abelsk

Vårt mål är att undersöka om det går att dela upp cirkeln S^1 paradoxalt. Vi påminner om att gruppen SO(n) definieras som

$$\mathrm{SO}(n) = \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) : AA^T = I, \det A = 1\}.$$

Vi kommer att undersöka gruppverkan av SO(2) på cirkeln. Denna gruppverkan definieras genom $(A, \mathbf{x}) \mapsto A\mathbf{x}$, där $A \in \mathrm{SO}(2)$ och $\mathbf{x} \in S^1$. Vi vill visa att SO(2) är en abelsk grupp.

Sats 4.2. SO(2) *är abelsk.*

Bevis. Låt $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ vara en matris i SO(2). Då gäller det att $\det A = 1$ och att $AA^T = I$. Villkoret $\det A = 1$ medför att $ad - bc = 1$, och villkoret $AA^T = I$ ger

$$I = AA^T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & ab + cd \\ ab + cd & c^2 + d^2 \end{pmatrix}$$

Detta ger villkor på elementen i matriserna, som genom den trigonometriska ettan ger att ansatsen $a = \cos\theta$, $b = -\sin\theta$, $c = \sin\theta$ och $d = \cos\theta$ är lösningen till följande system, ty

$$\begin{cases} a^2 + b^2 &= 1 \\ c^2 + d^2 &= 1 \\ ab + cd &= 0 \\ ad - bc &= 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos^2\theta + \sin^2\theta & = 1 \\ \sin^2\theta + \cos^2\theta & = 1 \\ \sin\theta\cos\theta - \sin\theta\cos\theta = \sin\theta(\cos\theta - \cos\theta) & = 0 \\ \sin\theta\sin\theta + \cos\theta\cos\theta = \sin^2\theta + \cos^2\theta & = 1 \end{cases}.$$

Villkoren ovan på matriserna medför att matriserna $A \in \mathrm{SO}(2)$ är på formen

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

Vi vill nu visa att om $A, B \in \mathrm{SO}(2)$ så gäller att $AB = BA$. För matriser

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \text{ och } \quad B = \begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma \\ \sin\gamma & \cos\gamma \end{pmatrix}$$

har vi att

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma \\ \sin\gamma & \cos\gamma \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\gamma - \sin\theta\sin\gamma & -\sin\theta\sin\gamma - \sin\theta\cos\gamma \\ \sin\theta\cos\gamma + \cos\theta\sin\gamma & -\sin\theta\sin\gamma + \cos\theta\cos\gamma \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta+\gamma) & -\sin(\theta+\gamma) \\ \sin(\theta+\gamma) & \cos(\theta+\gamma) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Analogt följer det att BA är en rotation med vinkeln $\gamma + \theta$, och eftersom addition är kommutativ i $\mathbb{R}$ följer det att $AB = BA$, som visar att $\mathrm{SO}(2)$ är en abelsk grupp. □

4.2 Banachrum

Låt V vara ett vektorrum. En *linjär funktional* på V är en funktion $\lambda \colon V \to \mathbb{R}$ som uppfyller

(i) $\lambda(f_1 + f_2) = \lambda(f_1) + \lambda(f_2) \quad \forall f_1, f_2 \in V$

(ii) $\lambda(\alpha f) = \alpha\lambda(f) \quad \forall f \in V, \alpha \in \mathbb{R}$.

En *norm* $\|\cdot\|$ på ett vektorrum V är en positiv funktion $\|\cdot\| \colon V \to \mathbb{R}$ som bestämmer längd på vektorer $v \in V$. Metriska rum är mängder i vilka avstånd mellan punkter är definierat. Ett normerat rum kan ses som ett metriskt rum genom avståndsfunktionen $d(x, y) = \|x - y\|$ för $x, y \in V$. Ett metriskt vektorrum V kallas för *fullständigt* om alla Cauchyföljder i V konvergerar till en punkt i V. Mer specifikt vill vi prata om Banachrum.

Definition 4.3 (Banachrum)**.** Ett *Banachrum* $(E, \|\cdot\|)$ är ett fullständigt normerat vektorrum E med norm $\|\cdot\|$.

Definition 4.4 (Dualrum)**.** *Dualrummet* E^* till ett Banachrum $(E, \|\cdot\|)$ består av linjära funktionaler $\lambda \colon E \to \mathbb{R}$.

Exempel 1. Om X är en mängd så består $\ell^\infty(X)$ av alla begränsade funktioner $f : X \to \mathbb{R}$. Rummet $E = (\ell^\infty(X), \|\cdot\|)$ med normen

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|$$

är ett Banachrum. Dualrummet $\ell^\infty(X)^*$ som består av alla linjära och begränsade funktionaler $\lambda \colon \ell^\infty(X) \to \mathbb{R}$ är då också ett Banachrum om det utrustas med normen

$$\|\lambda\| = \sup_{\|f\|_\infty \le 1} |\lambda(f)|\,.$$

4.3 Medel

Vi vill nu införa begreppet medel på en mängd X, och först införa den karakteristiska funktionen.

Definition 4.5 (Karakteristiska funktionen)**.** Låt X vara en mängd, och A en delmängd till X. Den *karakteristiska funktionen* $\mathbb{1}_A \colon \mathcal{P}(X) \to \{0, 1\}$ för $A \in \mathcal{P}(X)$ definieras genom

$$\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}.$$

Definition 4.6. En linjär avbildning $m : \ell^\infty(X) \to \mathbb{R}$ kallas för ett *medel* på X om

(i) $m(\mathbb{1}_X) = 1$ (normaliserad).

(ii) $f \geq 0 \Rightarrow m(f) \geq 0$ (positiv).

Efter denna definition ter det sig ganska naturligt att diskutera några fundamentala egenskaper hos medel på en mängd X. Denna diskussion kommer nedan i form av en proposition. Men innan dess så vill vi utrusta $\ell^\infty(X)$ med den partiella ordningen $\leq$ given av

$$f \leq g \Leftrightarrow f(x) \leq g(x) \text{ för alla } x \in X.$$

Proposition 4.7. *Låt X vara en mängd och låt m vara ett medel på X. Då gäller följande:*

(i) $f \leq g \Rightarrow m(f) \leq m(g)$

(ii) $\inf_X f \leq m(f) \leq \sup_X f$

(iii) $|m(f)| \leq \|f\|_\infty$

Bevis. Vi börjar med att visa (i). Tag $f, g \in \ell^\infty(X)$ och antag $f \leq g$. Enligt linjäriteten av m erhåller vi nu $m(g) - m(f) = m(g - f)$, och enligt positiviteten hos m och ekvivalensen $g \geq f \Leftrightarrow g - f \geq 0$ får vi att $m(g - f) \geq 0$. Detta är ekvivalent med att $m(g) \geq m(f)$.

Vi visar nu (ii). För varje $f \in \ell^\infty(X)$ har vi att $\inf_X f \leq f \leq \sup_X f$. Med andra ord så gäller det att $f_i \leq f \leq f_s$, där $f_i \colon X \to X$ är definierad genom $x \mapsto \inf_X f$ för alla $x \in X$ och $f_s \colon X \to X$ är definierad genom $x \mapsto \sup_X f$ för alla $x \in X$. Därmed följer det av (i) att

$$m(f_i) \leq m(f) \leq m(f_s). \tag{3}$$

Men eftersom f_i och f_s är konstanta funktioner så kan de definieras som $f_i = (\inf_X f)\mathbb{1}_X$ och $f_s = (\sup_X f)\mathbb{1}_X$ och enligt definition av ett medel samt linjäritetsegenskapen så har vi då att $m(f_i) = m((\inf_X f)\mathbb{1}_X) = (\inf_X f)m(\mathbb{1}_X) = \inf_X f$. Analogt visas det att $m(f_s) = \sup_X f$. Därmed följer det av (3) att $\inf_X f \leq m(f) \leq \sup_X f$.

Slutligen visar vi (iii). Från (ii) följer det att $-\|f\|_\infty \leq m(f) \leq \|f\|_\infty$. Men detta är detsamma som $|m(f)| \leq \|f\|_\infty$. □

Har vi ett medel m på X så ligger m i $\ell^\infty(X)^*$ och $\|m\| = 1$. Detta följer av att m är linjär så Proposition 4.7 (iii) ovan visar att m är kontinuerlig och uppfyller $\|m\| \leq 1$. Då m är ett medel så är $m(\mathbb{1}_X) = 1$ och från detta följer att $\|m\| = 1$.

Vi påminner om Definition 4.1 av ett vänsterinvariant ändligt additivt sannolikhetsmått och låter $\mathcal{PM}(X)$ vara mängden av alla sådana mått på X och vi låter $\mathcal{M}(X)$ vara mängden av alla medel på X. Eftersom elementen i $\mathcal{M}(X)$ är punkter i $\ell^\infty(X)^*$ vill vi använda befintliga resultat inom funktionalanalysen. Därför konstruerar vi en avbildning mellan $\mathcal{PM}(X)$ och $\mathcal{M}(X)$. Låt $m \in \mathcal{M}(X)$. Betrakta avbildningen $\widetilde{m} \colon \mathcal{P}(X) \to \mathbb{R}$ som ges av

$$\widetilde{m}(A) = m(\mathbb{1}_A), \quad A \subseteq X. \tag{4}$$

Observera att $0 \leq \mathbb{1}_A \leq 1$ och därav är $\widetilde{m}$ ett element i $\mathcal{PM}(X)$. Vi har också att $\widetilde{m}(X) = m(\mathbb{1}_X) = 1$. Dessutom gäller att om A och B är disjunkta mängder i X har vi $\mathbb{1}_{A \cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B$. Då följer av linjäriteten hos m att $\widetilde{m}(A \cup B) = \widetilde{m}(A) + \widetilde{m}(B)$. Det följer att $\widetilde{m}$ är ett ändligt additivt sannolikhetsmått på X.

4.4 Gruppverkan på medel och sannolikhetsmått

Vi har diskuterat medel och sannolikhetsmått på en mängd X. Nu vill vi låta grupper verka på dessa medel och sannolikhetsmått. Låt G vara en grupp som verkar på en mängd X. Per definition av gruppverkan så verkar varje $g \in G$ bijektivt på X. Då G verkar på X finns också en inducerad gruppverkan $G \curvearrowright \mathcal{PM}(X)$ genom

$$g\mu(A) = \mu(g^{-1}A) \quad \text{för alla } A \in \mathcal{P}(X).$$

Vi låter G verka med g^{-1} istället för g för att vi ska få en gruppverkan, ty

$$g(h\mu)(A) = (h\mu)(g^{-1}A) = \mu(h^{-1}(g^{-1}A)) = \mu((gh)^{-1}A) = ((gh)\mu)(A).$$

Det är lätt att se att $\mathcal{PM}(X)$ är vänsterinvariant, det vill säga att för varje $\mu \in \mathcal{M}(X)$ så gäller att $g\mu \in \mathcal{PM}(X)$. Eftersom varje $g \in G$ verkar bijektivt på X så gäller för $\mu \in \mathcal{PM}(X)$ att $g\mu(A) = \mu(g^{-1}A) = \mu(A)$ för alla $A \subseteq X$.

Det gäller också att G verkar linjärt och isometriskt[5] på $\ell^\infty(X)$ genom

$$gf(x) = f(g^{-1}x).$$

För att visa detta, tag $f_1, f_2 \in \ell^\infty(X)$. Då gäller att

$$\begin{aligned}(g(f_1+f_2))(x) &= (f_1+f_2)(g^{-1}x) = f_1(g^{-1}x) + f_2(g^{-1}x) = gf_1(x) + gf_2(x),\\ g(\alpha f)(x) &= \alpha f(g^{-1}x) = \alpha(gf)(x) \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Alltså verkar G linjärt på $\ell^\infty(X)$. Eftersom varje $g \in G$ verkar bijektivt på X följer det att

$$\|gf\|_\infty = \sup_{x \in X} \left|f(g^{-1}x)\right| = \|f\|_\infty$$

för alla $g \in G$ och alla $f \in \ell^\infty(X)$. Alltså verkar G isometriskt på $\ell^\infty(X)$.

Det faktum att G verkar isometriskt på $\ell^\infty(X)$ medför nu att G verkar på $\ell^\infty(X)$ kontinuerligt. För att se det, tag godtyckligt $\epsilon > 0$ och låt $f_1, f_2 \in \ell^\infty(X)$. Då finns $\delta > 0$ sådant att

$$\|f_1 - f_2\|_\infty < \delta \Rightarrow \|gf_1 - gf_2\|_\infty = \|g(f_1 - f_2)\|_\infty = \|f_1 - f_2\|_\infty < \epsilon,$$

där första likheten följer av att G verkar linjärt och den andra likheten följer av att G verkar isometriskt. Detta medför att G verkar kontinuerligt på $\ell^\infty(X)$.

Då vi vill att våra funktionaler ska vara kontinuerliga inför vi nu begreppet svag*-topologi.

Definition 4.8 (Svag*-topologi)**.** Låt $(E, \|\cdot\|)$ vara ett Banachrum. Betrakta den minsta topologin på E^* sådan att det för varje $f \in E$ gäller det att funktionalerna

$$\begin{aligned}f^* &: E^* \to \mathbb{R}\\ f^*(\lambda) &= \lambda(f)\end{aligned}$$

är kontinuerliga. Denna topologi på E^* kallas för *svag*-topologin.*

Sats 4.9 (Banach-Alaoglus sats)**.** *Om V är en omgivning kring 0 i ett Banachrum E och om*

$$K = \{\lambda \in E^* : |\lambda(f)| \le 1, f \in V\},$$

så är K svag-kompakt.*

För bevis hänvisas till [12, s. 68-69]. I synnerhet säger Banach-Alaoglus Sats att enhetsbollen i dualen av ett Banachrum E^* är svag*-kompakt.

Vi har också en verkan av G på $\mathcal{M}(X) \subset \ell^\infty(X)^*$ genom

$$gm(f) = m(g^{-1}f).$$

Eftersom G verkar linjärt och isometriskt på $\ell^\infty(X)$ gäller att för alla $m \in \mathcal{M}(X)$ att $gm \in \mathcal{M}(X)$ för alla $g \in G$, det vill säga $\mathcal{M}(X)$ är vänsterinvariant. Följande sats visar att verkan $G \curvearrowright \mathcal{M}(X)$ är kontinuerlig med avseende på svag*-topologin.

Sats 4.10. *Låt G vara en grupp och X vara en mängd. Då verkar G linjärt och kontinuerligt på $\mathcal{M}(X)$ med avseende på svag*-topologin.*

[5] Att G verkar isometriskt på $\ell^\infty(X)$ innebär att $\|gf\|_\infty = \|f\|_\infty$.

Bevis. Låt G vara en grupp och X vara en mängd. Det gäller då att $G \curvearrowright X \Rightarrow G \curvearrowright \ell^\infty(X)$. Eftersom G verkar linjärt på $\ell^\infty(X)$ är det klart att G verkar linjärt på $\ell^\infty(X)^* \supset \mathcal{M}(X)$.

Utrusta $\ell^\infty(X)^*$ med svag*-topologin. Då gäller för alla $\lambda \in \ell^\infty(X)^*$ att $f^*(\lambda) = \lambda(f)$ är kontinuerlig. Låter vi G verka på f^* genom $gf^*(\lambda) = \lambda(g^{-1}f)$ så gäller det av definitionen av svag*-topologin att $gf^*(\lambda) = g\lambda(f) = \lambda(g^{-1}f)$ är kontinuerlig. Eftersom $\mathcal{M}(X)$ är en kompakt delmängd av $\ell^\infty(X)^*$ och vänster-G-invariant, så gäller det att G verkar linjärt och kontinuerligt på $\mathcal{M}(X)$. □

Betrakta nu avbildningen $m \mapsto \widetilde{m}$ definierad i (4). Observera att om m är ett vänsterinvariant medel på X så ger $\widetilde{m}$ upphov till ett vänsterinvariant ändligt additivt sannolikhetsmått på X. Om $x \in X$ och $A \subseteq X$ så gäller det att

$$g\mathbb{1}_A(x) = \mathbb{1}_A(g^{-1}x) = 1 \Leftrightarrow g^{-1}x \in A \Leftrightarrow x \in gA \Rightarrow \mathbb{1}_{gA}(x) = 1,$$

och vi har då följande egenskap hos $\widetilde{m}$:

$$\widetilde{gm}(A) = gm(\mathbb{1}_A) = m(g^{-1}\mathbb{1}_A) = m(\mathbb{1}_{g^{-1}A}) = \widetilde{m}(g^{-1}A) = g\widetilde{m}(A).$$

Med andra ord så innebär egenskapen $\widetilde{gm} = g\widetilde{m}$ att om G verkar på ett medel m så verkar G också på sannolikhetsmåttet $\widetilde{m}$ som m ger upphov till.

4.5 Fixpunkt i $\mathcal{M}(X)$

Vi vill nu visa att om en abelsk grupp G verkar på $\mathcal{M}(X)$ kommer den att ha en fixpunkt, det vill säga det finns en punkt i $\lambda \in \mathcal{M}(X)$ sådan att $g\lambda = \lambda$ för alla $g \in G$. Till att börja med behöver vi visa att mängden $\mathcal{M}(X)$ är konvex och kompakt med avseende på svag*-topologin. Observera nu att funktionalerna i $\mathcal{M}(X)$ är normaliserade element i $\ell^\infty(X)^*$, så $\mathcal{M}(X)$ är en delmängd till enhetsbollen $\{f \in \ell^\infty(X)^* : \|f\| \leq 1\}$, som genom Sats 4.9 är svag*-kompakt.

Sats 4.11. *Mängden $\mathcal{M}(X)$ är konvex och svag-* kompakt.*

Bevis. Låt λ_1 och λ_2 vara element i $\mathcal{M}(X)$ och låt $t \in [0,1]$. Eftersom element i $\mathcal{M}(X)$ är linjära ser vi att

$$(t\lambda_1 + (1-t)\lambda_2)(\mathbb{1}_X) = t\lambda_1(\mathbb{1}_X) + (1-t)\lambda_2(\mathbb{1}_X) = t + 1 - t = 1.$$

Vi har också att för alla $f \in \ell^\infty(X)$ sådana att $f \geq 0$ att

$$(t\lambda_1 + (1-t)\lambda_2)(f) = t\lambda_1(f) + (1-t)\lambda_2(f) = t\lambda_1(f) - (1-t)\lambda_2(f) \geq 0.$$

Mängden $\mathcal{M}(X)$ är alltså konvex. Vi visar nu att $\mathcal{M}(X)$ är sluten i $\ell^\infty(X)^*$. Låt $\mathcal{M}(X) = N \cap P$, där

$$N = \{\lambda \in \ell^\infty(X)^* : \lambda(\mathbb{1}_X) = 1\}$$
$$P = \bigcap_{f \geq 0} \{\lambda \in \ell^\infty(X)^* : \lambda(f) \geq 0\}$$

Mängden av normaliserade funktionaler N är sluten i $\mathcal{M}(X)$, ty för alla $f \in \ell^\infty(X)$ gäller det att $f^*(\lambda) = \lambda(f)$ är kontinuerlig och $\mathbb{1}_X^*(\lambda) = \lambda(\mathbb{1}_X) = 1$ är sluten i $\mathbb{R}$. Så urbilden $(f^*)^{-1}(\{1\}) = N$ är sluten i $\ell^\infty(X)^*$.

Mängden av alla positiva funktionaler P är också en sluten mängd i $\ell^\infty(X)^*$, ty $f^*(\lambda) = \lambda(f)$ avbildar P på $[0,\infty) \subset \mathbb{R}$, som är sluten i $\mathbb{R}$. Så $(f^*)^{-1}([0,\infty)) = P$ är sluten i $\ell^\infty(X)^*$. Snittet av slutna mängder är slutet, och det följer att $\mathcal{M}(X)$ är sluten i $\ell^\infty(X)^*$.

Eftersom $\mathcal{M}(X)$ är en sluten delmängd av enhetsbollen i $\ell^\infty(X)^*$ följer det av Sats 4.9 att $\mathcal{M}(X)$ är svag*-kompakt. □

Följande sats ger den fixpunkt i $\mathcal{M}(X)$ vi är ute efter. I beviset använder vi oss av begreppet *nät*, som vi definierar i Appendix F.

Sats 4.12 (Markov-Kakutanis fixpunktsats)**.** *Låt E vara ett Banachrum och $\mathcal{K}$ vara en svag*-kompakt och konvex delmängd till E^*. Om G är en abelsk grupp som verkar linjärt och isometriskt på E och denna verkar kontinuerligt på E^* genom*

$$g\lambda(f) = \lambda(g^{-1}f) \quad \forall\, f \in E$$

och $\mathcal{K}$ är G-invariant så finns en punkt $\lambda \in \mathcal{K}$ sådan att $g\lambda = \lambda$ för alla $g \in G$.

Bevis. Låt G vara en abelsk grupp och E ett Banachrum. Låt $\mathcal{K}$ vara en delmängd av dualrummet E^* till E. Då verkar G enligt antagande kontinuerligt och linjärt på E^*. Definiera för ett fixt $g \in G$ mängden $\mathcal{K}_g$ enligt

$$\mathcal{K}_g = \{\lambda \in \mathcal{K} : g\lambda = \lambda\}.$$

Vi påstår att denna mängd är icke-tom. För att visa detta betrakta för något fixt $\tilde{\lambda} \in \mathcal{K}$ följden

$$(\tilde{\lambda}_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} g^k\tilde{\lambda}.$$

Eftersom $\mathcal{K}$ är svag*-kompakt, existerar det enligt Sats F.7 ett konvergent delnät $(\tilde{\lambda}_\alpha)$ sådant att $\tilde{\lambda}_\alpha \to \tilde{\lambda}$. Eftersom G verkar kontinuerligt på $\mathcal{K}$ så gäller enligt Sats F.8 att $(g\tilde{\lambda}_\alpha)$ konvergerar till $g\tilde{\lambda}$. Vi observerar nu

$$\begin{aligned}
(g\tilde{\lambda})(f) &= \tilde{\lambda}(g^{-1}f) = \lim_{\vec{\alpha}} \tilde{\lambda}_\alpha(g^{-1}f) = \lim_{\vec{\alpha}} g\tilde{\lambda}_\alpha(f) \\
&= \lim_{\vec{\alpha}} \frac{1}{n_\alpha}\sum_{k=0}^{n_\alpha-1} (g^{k+1}\tilde{\lambda})(f) \\
&= \lim_{\vec{\alpha}} \frac{1}{n_\alpha}\left(-\tilde{\lambda}(f) + \sum_{k=0}^{n_\alpha-1}(g^k\tilde{\lambda})(f) + g^{n_\alpha}\tilde{\lambda}(f)\right) \\
&= \lim_{\vec{\alpha}} \left(\underbrace{\frac{1}{n_\alpha}\sum_{k=0}^{n_\alpha-1}(g^k\tilde{\lambda})(f)}_{\to\tilde{\lambda}(f)} + \underbrace{\frac{1}{n_\alpha}(g^{n_\alpha}\tilde{\lambda} - \tilde{\lambda})(f)}_{\to 0} \right) = \tilde{\lambda}(f)
\end{aligned}$$

Eftersom $\mathcal{K}_g$ är konvex och G verkar linjärt är $\tilde{\lambda}$ invariant under g, det vill säga $g\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}$, vilket visar att $\mathcal{K}_g$ är icke-tom.

Frågan är då om

$$\mathcal{K}_G = \{\lambda \in \mathcal{K} : g\lambda = \lambda, \forall\, g \in G\} = \bigcap_{g\in G} \mathcal{K}_g$$

är icke-tom. Observera att för alla $g \in G$ så är $\mathcal{K}_g$ icke-tom, svag*-kompakt, G-invariant och konvex. Att $\mathcal{K}_g$ är svag*-kompakt kan ses genom att visa att $\mathcal{K}_g$ är sluten i $\mathcal{K}$. Vi har för varje $f \in \ell^\infty(X)$ att funktionalen $f^*(\lambda) = \lambda(f)$ är kontinuerlig. Då funktionen $f^*(\lambda)$ för alla $\lambda \in \mathcal{K}$ avbildar $g\lambda - \lambda$ kontinuerligt på $\{0\}$, som är sluten i $\mathbb{R}$, gäller att $(f^*)^{-1}(\{0\}) = \mathcal{K}_g$ är sluten i $\mathcal{K}$. Med andra ord är $\mathcal{K}_g$ svag*-kompakt. Eftersom G är abelsk så gäller det för alla $\lambda \in \mathcal{K}_g$ och alla $h \in G$ att

$$g(h\lambda) = gh(\lambda) = hg(\lambda) = h\underbrace{(g\lambda)}_{=\lambda} = h(\lambda)$$

och därför är $\mathcal{K}_g$ invariant under h. Samma argument som ovan ger för alla $g, h \in G$ att

$$\mathcal{K}_{g,h} = \{\lambda \in \mathcal{K} : g\lambda = \lambda, h\lambda = \lambda\}$$

är icke-tom. Om vi låter F vara en ändlig delmängd av G så gäller det via induktion att

$$\mathcal{K}_F = \{\lambda \in \mathcal{K} : g\lambda = \lambda, \forall\, g \in F\} \neq \emptyset.$$

Vi observerar att $\mathcal{K}_G := \bigcap_{F \subset G} \mathcal{K}_F$, där snittet tas över alla ändliga delmängder $F \subset G$. Om $\mathcal{K}_G$ är tom medför det genom ändliga snitt-egenskapen för kompakta rum att det existerar en ändlig delmängd F' av G sådan att $\mathcal{K}_{F'} = \emptyset$, vilket är en motsägelse. Alltså måste $\mathcal{K}_G$ vara icke-tom, och således har $\mathcal{K}$ en gemensam fixpunkt för alla g. Det finns alltså en punkt $\lambda \in \mathcal{K}$ sådan att $g\lambda = \lambda$ för alla $g \in G$. □

4.6 Cirkeln går ej att dela upp paradoxalt

Vi har successivt byggt upp de begrepp som behövs för att avgöra om cirkeln går att dela upp paradoxalt genom att låta SO(2) verka på S^1. Följande sats ger svaret till frågan.

Sats 4.13. *Låt X vara en mängd och G vara en abelsk grupp och $G \curvearrowright X$. Då existerar ett vänsterinvariant medel m på X.*

Bevis. Låt G vara en abelsk grupp och X vara en mängd. Då $G \curvearrowright X$ har vi att den inducerade gruppverkan $G \curvearrowright \ell^\infty(X)$ genom $gf(x) = f(g^{-1}x)$ är isometrisk och linjär för alla $g \in G$ och $f \in \ell^\infty(X)$. Denna gruppverkan ger oss också enligt Sats 4.10 en kontinuerlig gruppverkan på $\ell^\infty(X)^* \supset \mathcal{M}(X)$ genom $g\lambda(f) = \lambda(g^{-1}f)$. Då $\mathcal{M}(X)$ enligt Sats 4.11 en är svag*-kompakt och konvex delmängd av $\ell^\infty(X)^*$ så garanterar Sats 4.12 att det finns en punkt $\lambda \in \mathcal{M}(X)$ sådan att $g\lambda = \lambda$. Detta λ är då ett vänsterinvariant medel på X. □

Eftersom SO(2) är en abelsk grupp och den verkar på S^1 så gäller det av den inducerade gruppverkan på $\mathcal{M}(S^1)$ att det finns ett vänsterinvariant medel $m \in \mathcal{M}(S^1)$. Detta vänsterinvarianta medel gör att det inte går att dela upp S^1 paradoxalt med hjälp av SO(2).

4.7 Godartade grupper

Grupper som inte tillåter en paradoxal dekomposition brukar kallas för godartade. Med de koncept vi konstruerat fram till nu kan vi undersöka om grupper är godartade eller inte. Vi har nu följande definition av godartade grupper.

Definition 4.14. En grupp G sägs vara *godartad* om det finns ett vänsterinvariant ändligt additivt sannolikhetsmått $\mu\colon \mathcal{P}(G) \to [0, 1]$.

Genom vår avbildning $m \mapsto \widetilde{m}$ ser vi också att om det finns ett vänsterinvariant medel på en grupp G, så finns ett vänsterinvariant ändligt additivt sannolikhetsmått $\widetilde{m} \in \mathcal{PM}(G)$. Följande definition av godartad grupp följer då direkt.

Definition 4.15. En grupp G sägs vara *godartad* om det existerar ett vänsterinvariant medel $m\colon \ell^\infty(G) \to \mathbb{R}$.

Vi kan enkelt se att en ändlig grupp är godartad.

Proposition 4.16. *Låt G vara en ändlig grupp. Då är G godartad.*

Bevis. Om G är en ändlig grupp så är avbildningen $\mu\colon \mathcal{P}(G) \to [0, 1]$ definierad genom

$$\mu(A) = \frac{|A|}{|G|} \quad \text{för alla } A \in \mathcal{P}(G)$$

ett vänsterinvariant ändligt additivt sannolikhetsmått på G. □

Sats 4.17. *Abelska grupper är godartade.*

Bevis. Låt G vara en abelsk grupp. Om G verkar på sig själv finns enligt Sats 4.13 ett vänsterinvariant medel på G. Enligt Definition 4.15 följer då att abelska grupper är godartade. □

En naturlig fråga är om det är möjligt att dela upp S^1 paradoxalt genom att istället låta $\mathrm{O}(2)$ verka på den. Vi påminner om definitionen av $\mathrm{O}(2)$:

$$\mathrm{O}(2) = \{A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) : AA^T = I\}$$

Denna grupp är väldigt lik $\mathrm{SO}(2)$ förutom det faktum att den även innehåller matriser med determinant -1. Rent geometriskt innebär det att $\mathrm{O}(2)$ förutom rotationer också innehåller reflektioner. För att visa att denna grupp inte heller gör det möjligt att dela upp cirkeln paradoxalt har vi följande sats från [3].

Sats 4.18. *Låt G vara en grupp och H vara en normal delgrupp av G. Om H och G/H är godartade så är G godartad.*

Det är lätt att se att $\mathrm{SO}(2)$ är en normal delgrupp av $\mathrm{O}(2)$, och $\mathrm{SO}(2)$ är ju som vi redan vet godartad. Kvotgruppen $\mathrm{O}(2)/\,\mathrm{SO}(2) = \{-I, I\}$ är ändlig, och således godartad. Det gäller alltså då att $\mathrm{O}(2)$ är godartad.

Referenser

[1] M.A. Armstrong. *Basic Topology*. New York: Springer, 1983.

[2] Glen E. Bredon. *Topology and Geometry*. New York: Springer-Verlag, 1993.

[3] Coornaert Michel Ceccherini-Silberstein Tullio. *Cellular Automata and Groups*. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2010.

[4] John R. Durbin. *Modern Algebra: An Introduction*. John Wiley & Sons, Inc., 2005.

[5] Brian C. Hall. *An Elementary Introduction to Groups and Representations*. arXiv: `0005032v1 [math-ph]`.

[6] Thomas J. Jech. *The Axiom of Choice*. Mineaola, New York: Dover, 2008.

[7] Pierre de La Harpe. *Topics in Geometric Group Theory*. Chicago: The University of Chicago Press, 2000.

[8] Willard Miller. *Symmetry Groups and their Applications*. New York: Academic Press, 1972.

[9] James S. Milne. *Group Theory (v3.13)*. Tillgänglig från `www.jmilne.org/math/`. 2013.

[10] Derek J.S. Robinson. *A Course in the Theory of Groups*. New York: Springer, 1982.

[11] Raphael M. Robinson. "On the decomposition of spheres". I: *Fund. math* 34.191 (1947).

[12] Walter Rudin. *Functional Analysis*. Singapore: McGraw-Hill, Inc., 1991.

[13] Terence Tao. *The Banach-Tarski Paradox*. URL: `https://www.math.ucla.edu/~tao/preprints/Expository/banach-tarski.pdf` (hämtad 2017-05-01).

[14] user38268. *how to show* $SU(2)/\mathbb{Z}_2 \cong SO(3)$. Version: 2014-04-20. URL: `http://math.stackexchange.com/q/186678` (hämtad 2017-05-01).

A Definitioner

I detta avsnitt diskuteras och presenteras ett par definitioner som inte beskrivs i huvuddelen av rapporten. Vi börjar med att definiera vad en mängd som används är.

Definition A.1 (Matrismängden)**.** Låt n och m vara positiva heltal och K en kropp. Då är $\mathrm{Mat}_{n\times m}(K)$ mängden av alla $n \times m$-matriser A där varje element i matrisen A tillhör kroppen K.

Efter denna definition så definierar vi en central grupp som används genom hela rapporten.

Definition A.2 (Generella linjära gruppen)**.** Låt n vara ett positivt heltal och K vara en kropp. Då är den *generella linjära gruppen* $\mathrm{GL}_n(K)$ definierad enligt följande

$$\mathrm{GL}_n(K) = \{A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(K) \colon \det A \neq 0\}.$$

Med andra ord så består matrisgruppen $\mathrm{GL}_n(K)$ utav inverterbara matriser $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$. Det finns en relaterad delgrupp av $\mathrm{GL}_n(K)$ som definieras nedan.

Definition A.3 (Speciella linjära gruppen)**.** Låt n vara ett positivt heltal och K vara en kropp. Då är den *speciella linjära gruppen* $\mathrm{SL}_n(K)$ definierad enligt följande

$$\mathrm{SL}_n(K) = A \in \mathrm{GL}_n(K) \colon \det A = 1.$$

Med andra ord så är matrisgruppen $\mathrm{SL}_n(K)$ alla matriser $A \in \mathrm{GL}_n(K)$ sådana att determinanten av A är 1.

B Urvalsaxiomet

Det finns många ekvivalenta sätt att formulera urvalsaxiomet [6, s. 9]. Vi använder följande formulering.

Axiom (Urvalsaxiomet)**.** Låt X vara en mängd vars element är icketomma mängder. Då finns en funktion

$$f \colon X \to \bigcup_{A\in X} A$$

sådan att $f(A) \in A$ för varje $A \in X$.

C Bevis av Baires kategorisats

Bevis av Sats 2.13. Låt X vara ett fullständigt metriskt rum och $\{V_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X$ en samling öppna och täta mängder. Vi ska visa att för alla öppna $W \subset X$ gäller att $\bigcap_{n=1}^{\infty} V_k \cap W \neq \emptyset$. Tag en öppen mängd $W \subset X$.

Snittet $V_1 \cap W \neq \emptyset$ är öppet, ty ett ändligt snitt av öppna mängder är öppet. Det finns då en punkt $x_1 \in X$ och $r_1 > 0$ så att bollen $\overline{B(x_1, r_1)} \subseteq V_1 \cap W$. Med hjälp av urvalsaxiomet kan vi konstruera följder $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in X$ och $(r_n)_{n=1}^{\infty} \to 0$ med $r_n > 0$ sådana att

$$\overline{B(x_{n+1}, r_{n+1})} \subseteq V_{n+1} \cap B(x_n, r_n).$$

Eftersom X är ett fullständigt rum konvergerar alla Cauchyföljder i X. Det återstår nu att visa att $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ är en Cauchyföljd.

Påstående:

$$\begin{cases} x = \lim_{n\to\infty} x_n \\ x \in V_n \cap W, \forall n \end{cases} \Rightarrow x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} V_n \cap W$$

Fixera $\varepsilon > 0$ och låt n_ε vara sådant att $2r_n < \varepsilon, \forall n > n_\varepsilon$. Vi har då att för alla $n, m > n_\varepsilon$ kommer x_m och x_n ligga i $\overline{B(x_{n_\varepsilon}, r_{n_\varepsilon})}$, vilket medför att

$$d(x_n, x_m) < 2r_{n_\varepsilon} < \varepsilon.$$

Så för alla $0 \leq k \leq n$ gäller att $x_n \in V_{n-k}$. Alltså ligger x i $V_n \cap W$ för varje n, och beviset är klart.

□

D Fria grupper och relationer

En fri grupp är en grupp utan icke-triviala relationer. En relation är en slags ekvation som beskriver ett förhållande mellan gruppelement i allmänhet. Till exempel så har vi alltid för godtyckliga element a och b i en abelsk (det vill säga kommutativ) grupp relationen $ab = ba$, som ekvivalent kan skrivas $aba^{-1}b^{-1} = e$. Ett annat exempel är att vi för varje element c i den cykilska gruppen $C_n \cong \mathbb{Z}_n$ av ordning n har relationen $c^n = e$. I en fri grupp vill vi alltså undvika den här typen av ekvationer.

Det finns dock vissa relationer som inte går att undvika eftersom de finns med i alla grupper. Dessa är relationerna $aa^{-1} = a^{-1}a = e$ som säger att varje element multiplicerat med sin invers blir identiteten. Eftersom dessa relationer definitionsmässigt måste finnas i en grupp kallas de *triviala*. En fri grupp kan kort definieras som en grupp utan icketriviala relationer, det vill säga att de enda relationerna som finns är de triviala.

Vi har sett vad en fri grupp *inte* är och sett en kort beskrivning av vad en fri grupp är. Vi ska nu ge en mer explicit konstruktion av en fri grupp.

En fri grupp $\mathbb{F}_r$ på $r > 0$ generatorer $a_1, a_2, \ldots, a_r$ består av (vissa) *ord* skrivna med bokstäverna $a_1, a_1^{-1}, a_2, a_2^{-1}, \ldots, a_r, a_r^{-1}$ tillsammans med det tomma ordet som betecknas I. Med ord menar vi här element i stil med $a_3^4 a_2^{-1} a_3 a_1^{-5}$, där $a_3^4 = a_3a_3a_3a_3$ och $a_1^{-5} = (a_1^{-1})^5$. Dock tar vi inte med alla möjliga ord i $\mathbb{F}_r$. Vi kräver att orden i $\mathbb{F}_r$ är *reducerade*, det vill säga att i ett sådant ord får inte a_i och a_i^{-1} stå bredvid varandra. Detta innebär att vi till exempel utesluter ordet $a_1a_2a_2^{-1}a_5$ från att vara med i $\mathbb{F}_5$ eftersom a_2 står bredvid a_2^{-1}.

Gruppoperationen är sammansättning samt reducering av ord. Reducering innebär att vi tar bort $a_ia_i^{-1}$ ur vårt ord. Till exempel: låt $w = a_2^4 a_3^{-2}$ och $z = a_3a_1a_4$ vara element i $\mathbb{F}_4$. Då är

$$wz = a_2^4 a_3^{-2} a_3 a_1 a_4 = a_2^4 a_3^{-1} \underbrace{a_3^{-1} a_3}_{\text{tas bort}} a_1 a_4 = a_2^4 a_3^{-1} a_1 a_4.$$

Ibland behöver reduktionen göras i flera steg. Om $w = a_1^{-1}a_2$ och $z = a_2^{-1}a_1a_3$ är element i $\mathbb{F}_3$ blir

$$wz = a_1^{-1}a_2a_2^{-1}a_1a_3 = a_1^{-1}a_1a_3 = a_3,$$

där vi nu har reducerat i två steg.

Identitetselement i $\mathbb{F}_r$ är det tomma ordet I. Inversen till ett ord w fås genom att skriva bokstäverna i w i omvänd ordning och därefter byta ut varje bokstav i det omvända ordet mot sin invers. Till exempel så blir inversen till $w = a_1a_2a_1a_3^{-1}$ på detta sätt $w^{-1} = a_3a_1^{-1}a_2^{-1}a_1^{-1}$ och en kontrollräkning visar att $ww^{-1} = w^{-1}w = I$.

Eftersom vi bara tar med reducerade ord så kan varje element i $\mathbb{F}_r$ bara skrivas på ett enda sätt [9, Prop. 2.1]. Detta innebär bland annat att varje element i $\mathbb{F}_r$ har en entydig begynnelsebokstav.

Anmärkning. Om r är litet betecknas generatorerna till $\mathbb{F}_r$ ofta med a, b, c osv. istället för $a_1, a_2, \ldots, a_r$.

D.1 En explicit fri delgrupp av SO(3)

Vi ger här en två explicita matriser som genererar en fri delgrupp till SO(3). Sätt:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}.$$

Det är lätt att kontrollera att dessa matriser ligger i SO(3). Vi vill nu visa att dessa två matriser faktiskt inte har några icketriviala relationer. För att göra detta så betraktar vi istället matriserna $5A, 5B, 5A^{-1}, 5B^{-1}$. Låt $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^3$. Om något reducerat ord i detta alfabet skulle vara lika med identiteten, så kan vi lika gärna betrakta samma ord fast vi multiplicerar varje individuell bokstav med 5. Vi erhåller då en ny operator som kommer avbilda $\mathbf{n}$ på en vektor vars koordinater alla är delbara med 5.

Det räcker alltså att visa att det inte finns ett $\mathbf{n}$ med egenskapen att bilden har enbart koordinater som är delbara med 5. Eftersom vi enbart är intresserad av delbarhet med 5 så är det naturligt att istället räkna modulo 5, det vill säga vi gör alla räkningar i kroppen $F_5 = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ och betraktar $5A, 5B, 5A^{-1}, 5B^{-1}$ som operatorer på F_5^3. Originalproblemet svarar nu mot att visa att inget icketrivialt ord skrivet i dessa nya operatorer är ekvivalent med nolloperatorn i denna kropp. En räkning ger att

$$\begin{aligned}
\operatorname{range}(5A) &= \operatorname{span}((3,1,0)),\\
\operatorname{range}(5A^{-1}) &= \operatorname{span}((3,4,0)),\\
\operatorname{range}(5B) &= \operatorname{span}((0,3,1)),\\
\operatorname{range}(5B^{-1}) &= \operatorname{span}((0,3,4)).
\end{aligned}$$

För att visa att inget reducerat ord skrivet i dessa matriser är lika med nollmatrisen så studerar vi vad matriserna $5A, 5B, 5B^{-1}$ gör med range$(5A)$, och motsvarande med de andra matrisernas bilder. Enligt ovan så är varje element i range$(5A)$ en multipel av $(3, 1, 0)$. Ytterligare en räkning visar att om vi multiplicerar denna vektor med någon av matriserna $5A, 5B$ eller $5B^{-1}$ så får vi en nollskild vektor. Motsvarande argument kan föras för de andra matrisernas bilder. På detta vis ser vi att så länge vi inte konstruerar ett ord där en matris står bredvid sin invers så får vi alltid en nollskild operator. Alltså kan inget reducerat ord i alfabetet A, A^{-1}, B, B^{-1} vara lika med identiteten. Matriserna A och B genererar därmed en fri delgrupp av SO(3).

E Två lemman om polynom

Här visas två lemman om nollställen för polynom i flera komplexa variabler. Bevisen är snarlika och bygger båda på att vi genom att fixera värdet på en eller fler av variablerna får en polynomfunktion definierad på ett rum med lägre dimension. Ett polynom i n variabler kan till exempel på detta sätt betraktas som en indexerad familj av polynom i $n-1$ variabler. Genom att sedan göra induktion på dimensionen så kan vi visa resultat om polynom på $\mathbb{C}^n$ genom att använda resultat om polynom på $\mathbb{C}$. Istället för att se våra polynom som funktioner på $\mathbb{C}^n$ så ser vi dem som funktioner på 'linjer' i $\mathbb{C}^n$ och detta geometriska perspektiv illustreras i Figur 3.

Lemma E.1. *Låt $p : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ vara en polynomfunktion. Om $p\big|_{\mathbb{R}^n}$ är identiskt noll*[6] *så är p identiskt noll på hela $\mathbb{C}^n$.*

Bevis. Vi bevisar detta genom induktion på n. Om $n = 1$ så följer påståendet direkt eftersom ett polynom i en variabel med oändligt många nollställen måste vara identiskt noll.

Antag nu att påståendet gäller för något $n \geq 1$. Vi vill visa att det även gäller för $n+1$. För $x \in \mathbb{R}$, betrakta polynomet

$$q_x(z_1, z_2, \ldots, z_n) := p(z_1, z_2, \ldots, z_n, x)$$

i n variabler. Vi ser att om $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ så är $q(x_1, x_2, \ldots, x_n) = p(x_1, x_2, \ldots, x_n, x) = 0$ och alltså är $q_x\big|_{\mathbb{R}^n}$ identiskt noll. Enligt induktionsantagandet är q_x identiskt noll på hela $\mathbb{C}^n$.

Att q_x är identiskt noll på $\mathbb{C}^n$ är detsamma som att $p(z_1, z_2, \ldots, z_n, x)$ är noll för alla komplexa tal $z_1, \ldots, z_n$. Men eftersom samma argument som för x kan föras för varje reellt tal så måste $p(z_1, z_2, \ldots, z_n, x) = 0$ för alla komplexa tal z_i och reella tal x. För att visa att p faktiskt är noll på hela $\mathbb{C}^{n+1}$ så inför vi (analogt med när vi införde q_x) en familj av polynomfunktioner

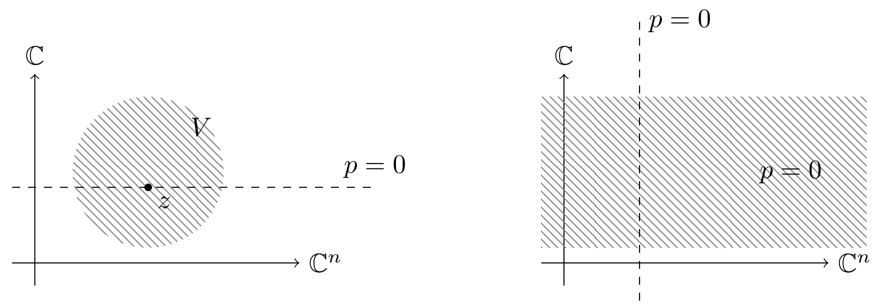
$$r_{z_1,\ldots,z_n} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

definierade genom

$$r_{z_1,\ldots,z_n}(z) := p(z_1, z_2, \ldots, z_n, z).$$

Vi ser att $r_{z_1,\ldots,z_n}\big|_{\mathbb{R}}$ är identiskt noll så enligt basfallet är $r_{z_1,\ldots,z_n}$ identiskt noll på $\mathbb{C}$. Enligt ett motsvarande argument som det för funktionerna q_x så medför detta att p är identiskt noll på hela $\mathbb{C}^{n+1}$ vilket visar det sökta påståendet. □

[6] det vill säga att $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R} \Rightarrow p(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$



Figur 3: En illustration av Lemma E.2. Eftersom p är noll på varje horisontell linje genom V (vänstra bilden) så måste den vara det på en hel remsa (högra bilden). Men då måste p också vara konstant noll på varje vertikal linje genom remsan. Då varje punkt i $\mathbb{C}^{n+1}$ ligger på någon sådan linje så måste p vara identiskt noll på $\mathbb{C}^{n+1}$.

Lemma E.2. *Låt $p : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ vara en polynomfunktion och $V \subset \mathbb{C}^n$ en öppen mängd. Om $p\big|_V$ är identiskt noll så är p identiskt noll på $\mathbb{C}^n$.*

Bevis. För att bevisa Lemma E.2 använder vi oss av induktion över n. Om $n = 1$ så följer påståendet eftersom ett polynom i en variabel med oändligt många nollställen måste vara identiskt noll. Då V är en öppen mängd i $\mathbb{C}$ så innehåller den oändligt många punkter. Så om p är noll på hela V så måste p vara identiskt noll.

Antag nu att påståendet gäller i n dimensioner. Vi vill visa att det då följer att det gäller i $n+1$ dimensioner. Eftersom V är en öppen mängd så måste den innehålla en öppen boll B. Det räcker alltså att visa att om $p\big|_B$ är identiskt lika med noll så måste p vara noll på hela $\mathbb{C}^{n+1}$. Antag att B har centrum i $w = (w_1, \ldots, w_{n+1})$ och radie R. Fixera ett $z \in \mathbb{C}$ sådant att $|z - w_{n+1}| < R$ och definiera funktionen

$$q_z : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$$

$$q_z(z_1, \ldots, z_n) := p(z_1, \ldots, z_n, z)$$

Eftersom $p(z_1, \ldots, z_{n+1})\big|_B = 0$ så kommer $q_z\big|_{B_z} = 0$ för den öppna bollen $B_z \subset \mathbb{C}^n$ med centrum i $w_z = (w_1, \ldots, w_n)$ och radie $R_z = \sqrt{r^2 - |z - w_{n+1}|^2}$. Men då måste $q_z = 0$ på hela $\mathbb{C}^n$ enligt induktionsantagandet. I Figur 3 illustreras detta med den streckade linjen. Vi har alltså visat att för varje fixt z med $|z - w_{n+1}| < R$ gäller att $p(z_1, \ldots, z_n, z) = 0$. Detta svarar i figuren mot att p är platt noll på hela den markerade remsan.

Fixera nu i stället $(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ och bilda funktionen

$$r_{z_1,\ldots,z_n} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

$$r_{z_1,\ldots,z_n}(z) = p(z_1, \ldots, z_n, z)$$

Då vet vi att $r_{z_1,\ldots,z_n}(z) = 0$ för alla z med $|z - w_{n+1}| < R$. Mängden av sådana z är en öppen mängd i $\mathbb{C}$. Det följer av fallet $n = 1$ att $r_{z_1,\ldots,z_n} = 0$ på hela $\mathbb{C}$. Eftersom $z_1, \ldots, z_n$ var godtyckligt valda så kan vi göra motsvarande argument för alla $(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}$. Detta visar att $p = 0$ på hela $\mathbb{C}^{n+1}$. □

F Nät

I metriska rum beskrivs kontinuitet av funktioner med hjälp konvergens av följder. I generella topologiska rum är detta inte möjligt. Det finns dock en generalisering av följder för topologiska rum som kallas för *nät*. Nät är 'följder' som är indexerade över mängder som inte nödvändigtvis är $\mathbb{N}$. Följder kan ha delföljder, men också *delnät*. I synnerhet så kan kardinaliteten av en indexmängd av ett delnät vara större än den hos följden, då upprepade index tillåts. Om vi har en följd kan vi få en delföljd av den genom att ta bort element ur följden och sedan numrera om. I fallet nät används en starkare metod där vi sätter ihop indexmängden med en monoton funktion. Följande definitioner och satser kommer från [2].

Definition F.1 (Riktad mängd)**.** En *riktad mängd* är en delvis ordnad mängd D sådan att för varje $a, b \in D$ finns ett $\tau \in D$ som uppfyller $a \leq \tau$ och $b \leq \tau$.

Definition F.2 (Nät)**.** Ett *nät* i ett topologiskt rum X är en riktad mängd D tillsammans med en funktion $\Phi\colon D \to X$.

Definition F.3. Om $\Phi\colon D \to X$ är ett nät i ett topologiskt rum X och $A \subset X$ så säger vi att Φ är *slutligen* i A om det finns något $\alpha \in D$ sådant att $\Phi(\beta) \in A$ för alla $\beta \geq \alpha$.

Definition F.4 (Konvergens av nät)**.** Ett nät $\Phi\colon D \to X$ i ett topologiskt rum sägs *konvergera mot* $x \in X$ om, för varje omgivning $U \subset X$ av x, är Φ slutligen i U.

Definition F.5 (Slutlig funktion)**.** Om D och D' är riktade mängder så kallas en funktion $h\colon D' \to D$ för *slutlig* om det för varje punkt $\delta' \in D'$ existerar en punkt $\delta \in D$ sådan att om $\alpha' \in D'$ medför $\alpha' \geq \delta'$ att $h(\alpha') \geq \delta$.

Definition F.6 (Delnät)**.** Om $\Phi : D \to X$ är ett nät och $h : D' \to D$ är en slutlig funktion så kallas sammansättningen $h \circ \Phi$ för ett delnät.

Sats F.7. *Låt K vara en kompakt delmängd till ett topologiskt vektorrum X. Om (x_n) är ett nät i K så finns ett konvergent delnät i K.*

För bevis se [2, s. 21].

Sats F.8. *Låt $f : X \to Y$ vara en kontinuerlig funktion mellan två topologiska rum. Om (x_n) är ett nät i X som konvergerar till en punkt $x \in X$ så konvergerar $f(x_n)$ till $f(x) \in Y$.*

För bevis se [2, s. 15].

G Paradoxal uppdelning av S^n, $n \geq 3$

För att visa att det går att dela upp S^n, $n \geq 3$ paradoxalt används induktion. Vi går inte igenom alla detaljer utan skissar bara ett bevis för hur fallet $n = 3$ visas med hjälp av vår paradoxala uppdelning av S^2. Förfarandet i detta fall kan med små förändringar användas för att göra det allmänna induktionsbeviset.

Bevisskiss. Vi vet (från Sats 2.14) att S^2 kan delas upp paradoxalt med hjälp av SO(3). Detta kan användas för att dela upp S^3 paradoxalt med hjälp av SO(4).

Gruppen SO(3) kan identifieras med matriser på formen

$$\begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \iddots & 0 \\ \cdots & R & \cdots & 0 \\ \iddots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{SO}(4)$$

där R är en matris i SO(3). Därmed kan SO(3) ses som en delgrupp av SO(4). När denna delgrupp verkar på S^3 så fixerar varje matris punkterna $(0, 0, 0, \pm 1)$. Sätt $C = \{(0, 0, 0, \pm 1)\}$.

Vi delade upp $B^3 \setminus \{0\}$ genom att se den som uppbyggd av ett antal kopior av S^2. För att dela upp S^3 så använder vi samma idé.

Sfären S^3 definieras som

$$S^3 = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \colon x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1\}.$$

Mängden

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 + z^2 = 1 - w^2\}$$

är för varje fixt $w \in (-1, 1)$ en sfär i tre dimensioner med radie $\sqrt{1 - w^2}$ (det vill säga en omskalad kopia av S^2). Varje sådan kopia av S^2 är invariant under den verkan som SO(3) har på S^3.

Därmed är
$$S^3 \setminus C = \bigsqcup_{w \in (-1,1)} S^2.$$
Vi använder sedan Sats 2.14 för att dela upp varje sådan S^2 paradoxalt. Detta ger en paradoxal uppdelning av $S^2 \setminus C$

För att få en paradoxal dekomposition av hela S^3 inklusive fixpunkterna $C = \{(0, 0, 0, \pm 1)\}$ så används en teknik som liknar den i beviset av Lemma 2.12. Låt θ vara någon irrationell multipel av π och sätt
$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix},$$
detta är ett element i SO(4). Definiera sedan analogt med i det beviset
$$\Sigma_2 = C \cup RC \cup R^2C \cup \dots$$
och
$$\Sigma_1 = S^3 \setminus \Sigma_2.$$
Dessa mängder utgör en partition av S^3 och dessutom är
$$S^3 \setminus C = \Sigma_1 \sqcup R\Sigma_2.$$
Vi kan alltså helt analogt med tidigare argument utgå från S^3, rotera en del av den för att få $S^3 \setminus C$, dela upp paradoxalt till två kopior och rotera tillbaka dessa till två kopior av S^3. Därmed kan S^3 delas upp paradoxalt med hjälp av SO(4). $\square$

Genom att utnyttja att
$$\mathrm{SO}(n) \subset \mathrm{SO}(n+1)$$
och
$$S^n \setminus \{(0, \dots, 0, \pm 1)\} = \bigsqcup_{(-1,1)} S^{n-1}$$
och induktion går det att visa att S^n kan delas upp paradoxalt för alla $n \geq 2$.