CHALMERS | GÖTEBORGS UNIVERSITET

Gleasons sats

Examensarbete för kandidatexamen i matematik vid Göteborgs universitet
Kandidatarbete inom civilingenjörsutbildningen vid Chalmers

Therese Karmstrand
Lorents Landgren
David Lidell
Johan Ulander

Institutionen för matematiska vetenskaper
Chalmers tekniska högskola
Göteborgs universitet
Göteborg 2017

Gleasons sats

Examensarbete för kandidatexamen i matematik inom matematikprogrammet vid Göteborgs universitet

David Lidell

Kandidatarbete i matematik inom civilingenjörsprogrammet Teknisk fysik vid Chalmers

Therese Karmstrand   Lorents Landgren

Kandidatarbete i matematik inom civilingenjörsprogrammet Teknisk matematik vid Chalmers

Johan Ulander

Handledare: Michael Björklund

Examinator: Maria Roginskaya/Marina Axelson-Fisk

Institutionen för matematiska vetenskaper
Chalmers tekniska högskola
Göteborgs universitet
Göteborg 2017

Sammanfattning

I detta examensarbete presenteras Gleasons sats och ett elementärt bevis för densamma. Gleasons sats är betydelsefull inom den matematiska uppbyggnaden av kvantmekanik. Den karakteriserar mått på slutna underrum av separabla Hilbertrum av dimension minst 3. Satsen kan formuleras i termer av så kallade ramfunktioner (funktioner där summan av antagna värden på en ortonormalbas är konstant) och innebär att alla begränsade ramfunktioner i Hilbertrum av dimension minst 3 måste vara på formen $\langle Ax, x\rangle$, för någon självadjugerad operator A. Beviset genomförs först för $\mathbb{R}^3$, genom huvudsakligen geometri på enhetssfären och konvergensargument för tal-, punkt- och fuktionsföljder. Därefter visas att giltigheten i R^3 implicerar satsen i allmänna Hilbertrum av högre dimension.

Bevisgången följer i stort idéerna från Cooke, Keane och Moran i [2]. Förtydliganden, motiveringar, omstruktureringar och ändringar har gjorts med målet att göra beviset mer tillgängligt och korrekt. Bland annat har ett inledande lemma inom envariabelanalys expanderats, en brist i beviset av det geometriska lemma 5 (Piron) korrigerats, och ett felaktigt topologiskt resonemang i ett bevis ledde till den kraftigt omarbetade proposition 2 om ramfunktioners extremvärden. Utvidgningen från R^3 till allmänna Hilbertrum utgår ifrån orginalbeviset av Andrew M. Gleason [6].

Abstract

This paper aims to present Gleason's theorem and a full proof, by the most elementary methods of analysis possible. Gleason's theorem is an important theorem in the mathematical foundations of quantum mechanics. It characterizes measures on closed subspaces of separable Hilbert spaces of dimension at least 3. The theorem can be formulated in terms of so-called frame functions. It states that all bounded frame functions, on the specified Hilbert spaces, must have the form $\langle Ax, x\rangle$, for some self-adjoint operator A. The theorem is proved by first proving the statement in $\mathbb{R}^3$, through mostly geometric arguments on the unit sphere, and methods relating to convergence of sequences. It is then shown that this implies the theorem in general Hilbert spaces of higher dimension.

The bulk of our proof follows the ideas of Cooke, Keane and Moran [2] with some own additions and clarifications in order to make it more accessible and correct. A lemma of single-variable analysis has been expanded, an oversight in the proof of the geometric lemma 5 (Piron) has been fixed and an erroneous topological argument has led to the much rewritten proposition 2 about extremal values of frame functions. The motivation for the sufficiency of the proof in $\mathbb{R}^3$ for higher-dimensional Hilbert spaces follows the ideas of the original proof by Andrew M. Gleason.

Populärvetenskaplig presentation

Tror du att du vet saker med säkerhet? Då har du kanske fel! Gleasons sats, som vi presenterar i detta arbete, visar hur osäkerhet, eller sannolikheter, kommer in i vår mest grundläggande fysikaliska teori: kvantfysiken.

Gleasons sats är dock en matematisk sats, vilket innebär att den inte är beroende av experimenten i fysik. Den handlar om matematiska idéer, som t.ex. kallas ”Hilbertrum”, och som har att göra med bestämda samband, med geometri och med tal. Och i matematik kan man faktiskt komma till säkra slutsatser. Det enda som krävs för att man ska tro på Gleasons sats är att kontrollera eller lita på att vi har tänkt rätt i varje bevissteg som vi går igenom i rapporten. Det är däremot inte självklart att Gleasons sats, eller dessa ”Hilbertrum”, skulle passa perfekt för kvantfysik. Det hänger på experiment, och det skulle kunna vara fel. Men det har visat sig passa oerhört bra. Det var faktiskt kvantfysikens framväxt som ledde till denna matematiska upptäckt.

Kvantmekanik är en oerhört framgångsrik och tillämpbar teori inom fysiken, men även en av de mest ointuitiva. Kvantteorin beskriver saker på pytteliten skala. Och den mikroskopiska världen verkar inte gå att beskriva på samma sätt som den makroskopiska värld vi lever och verkar i. Läroböcker beskriver gärna småpartiklar (t.ex. elektroner) som små bollar. Små bollar ser ut på ett visst sätt, kan snurra åt ett visst håll, och flyga fram i rummet längs en viss bana. Men elektroner är inte små bollar, dom är både–och-varelser, som kan snurra (eller något som liknar att snurra) åt ett visst håll till 80 %, men åt det andra hållet till 20 %. Det verkar till och med som att en elektron kan ta två olika vägar på en gång!

Så länge man låter en sådan elektron vara, så fortsätter den att leva i ett både–och-tillstånd. Men om man gör en kontroll av elektronen, t.ex. ta reda på hur den spinner, så får man ett bestämt resultat, åt det ena hållet eller åt det andra hållet, men eftersom elektronen var lite både–och, så går det inte att veta exakt vilket resultat man kommer få. Den räkneregel som man använder sig av för att räkna ut denna sannolikhet kallas Borns regel. Man kan fråga sig varifrån denna regel kommer, och den verkade länge vara ett grundantagande; ett axiom. Men i och med Gleasons sats så fås en förklaring till Borns regel: det är den enda sannolikhetsregel man kan ha utifrån hur elektronens tillstånd (eller andra kvanttillstånd) beskrivs matematiskt!

Det går nog inte att överdriva den viktiga rollen som Gleasons sats har, mycket tack vare dess grundläggande roll inom kvantteorin. En stor del av den teknik som vi idag tar för givet har bara varit möjlig att utveckla tack vare kvantfysik, som också har enorm betydelse för vår förståelse av kemi, och alla dess tillämpningar. Men Gleasons sats är betydelsefull även ur ett rent matematiskt perspektiv.

Gleasons sats bevisades för första gången 1957 i [6]. Detta är ett matematiskt tungt arbete, och beviset har fått rykte av att vara svårgreppbart. Vår ambition med detta kandidatarbete har varit att göra beviset av satsen tillgängligt och begripligt för fler. Till största del har arbetet varit en litteraturstudie där vi satt oss in i redan skrivna bevis av satsen. Vi har därifrån arbetat med att göra förtydliganden och utveckla resonemang , samt lägga de utvalda pusselbitarna i en så logisk och pedagogisk ordning som möjligt. Utifrån den artikel som vi främst har utgått ifrån, har vi till och med lyckats korrigera vissa matematiska fel.

Innehåll

Förord

Denna rapport har skrivits med syftet att göra ett bevis till Gleasons sats tillgängligt för matematikstudenter med kunskaper på kandidatnivå i matematisk analys. Artikeln baseras på beviset som presenteras av Cooke, Keane & Moran i [2] och även på Gleasons originalbevis i [6]. Mycket av arbetet har bestått i att expandera, motivera, förtydliga, omstrukturera och i vissa fall korrigera bevisstegen i [2]. Stycken där vi uppfattar oss ha bidragit inte bara med tydlighet utan även med matematisk korrektion innefattar lemma 5 och proposition 2. Lemma 2 har expanderats kraftigt.

Författarna, som studerar på programmen Teknisk fysik och Teknisk matematik vid Chalmers tekniska högskola och på Matematikprogrammet vid Göteborgs universitet, är tacksamma till docent Michael Björklund för hans handledning och kritik och till Maria Roginskaya och Marina Axelson-Fisk för deras uppmuntran och respons gällande rapporten.

Nedan följer en lista över författarnas individuella direkta bidrag, utan inbördes ordning, till varje delkapitel i rapporten

- Populärvetenskaplig framställning: Johan/Lorents
- Abstract, sammanfattning, förord: Johan/Lorents
- 1: Johan
- 2: Johan
- 3.1: Johan/Lorents
- 3.2: David/Lorents/Therese
- 3.3: Johan
- 3.4: David (lemma 4), David/Lorents (lemma 3 och korollarium 1)
- 3.5: Lorents (lemma 5), David (korollarium 2)
- 4.1: Lorents
- 4.2: David
- 4.3: David
- 4.4: Lorents
- 4.5: Therese
- 4.6: Johan
- A.1: David
- A.2: Therese
- A.3: Johan

Med direkta bidrag menas huvudsakligt författande av text. Utöver de direkta bidragen har alla medförfattarna hjälpt till med de flesta delkapitel.

1 Inledning

Denna rapport är delad i två huvuddelar. I den första introduceras begrepp och visas lemman som används upprepade gånger i det egentliga beviset av Gleasons sats. Därefter genomförs beviset i $\mathbb{R}^3$, varpå det bevisas att detta medför satsens giltighet även i Hilbertrum av högre dimension. Men innan detta ger vi en kort utblick, historik, och introduktion till Gleasons sats (utan att de ingående matematiska begreppen definieras).

Gleasons sats formulerades och bevisades först av Andrew M. Gleason år 1957 i [6] och fastställer formen av mått på slutna underrum till Hilbertrum av dimension minst 3. Detta som lösning på problemet, formulerat av George W. Mackey (se [7]), att karakterisera alla sådana mått. Det Gleason fann var att dessa mått måste anta formen $\mu(A) = \mathrm{Tr}(TP_A)$, där T är en positivt semidefinit självadjugerande operator och P_A är en projektionsoperator på underrummet A. Detta resultat kallas Gleasons sats.

Begreppet kvanttillstånd introducerades av John von Neumann i [8] och definierades som en positiv och normaliserad linjär funktional ρ. Linjäriteten i denna definition uppfattades som påtvingad och mötte kritik. Ur detta myntades begreppet kvasitillstånd som definierades med hjälp av det svagare villkoret kvasilinjäritet. Med kvasilinjäritet hos ρ menas i detta sammanhang att $\rho(\alpha A + \beta B) = \alpha\rho(A) + \beta\rho(B)$ gäller för alla kommuterande element A, B. Det visade sig, som en konsekvens av Gleasons sats, att alla kvasitillstånd på Hilbertrum av dimension minst 3 i själva verket är kvanttillstånd. Detta svarade därigenom på kritiken av definitionen av kvanttillstånd.

En annan konsekvens av Gleasons sats är att den utesluter existensen av sannolikhetsmått som endast antar värdena 0 och 1. Under en tid ansågs detta motbevisa teorier med så kallade dolda variabler. Detta visades av Bell i [1] endast gälla teorier med icke-kontextuella dolda variabler (eng. non-contextual hidden variables), men teorier med kontextuella dolda variabler, som exempelvis Bohmsk mekanik, har inte bevisats vara inkonsistenta med Gleasons sats.

Originalbeviset i [6] av Gleasons sats har fått ett rykte av att vara invecklat och svårgreppbart. Detta och dess roll i den matematiska uppbyggnaden av kvantmekanik motiverar framtagandet av ett mer elementärt bevis. Ett fullständigt elementärt bevis gavs 1985 i [2] av Cooke, Keane och Moran och det är deras idéer vi till största del följer i vårt bevis, med egna inslag och förtydliganden för att omstrukturera och göra det mer tillgängligt. Motiveringen till att beviset i $\mathbb{R}^3$ är tillräckligt även för Hilbertrum av dimension minst 3 följer originalbeviset av Andrew M. Gleason.

2 Formulering av Gleasons sats

För att ge läsaren en känsla för riktningen inleder vi denna rapport med att formulera Gleasons sats i sin mest vedertagna form, och ge en kort, ganska teknisk, kommentar till denna. Därefter ger vi en ekvivalent formulering av satsen, som är den version som kommer att bevisas i denna rapport. Terminologi för denna formulering följer i stycke 3.1.

Gleasons sats i sin vedertagna form är en sats om mått[1] på separabla[2] Hilbertrum[3] av dimension minst 3. Satsen lyder [6]:

Sats 1. *Låt μ vara ett mått på slutna underrum av ett (reellt eller komplext) separabelt Hilbertrum av dimension minst 3. Då finns det en positivt semidefinit självadjungerad spårklass-operator T och en ortogonalprojektionsoperator P_A på underrummet A sådant att*

$$\mu(A) = \mathrm{Tr}(TP_A),$$

för alla slutna underrum A.

Enligt Hilbertrum-formuleringen av kvantmekanik associeras varje fysikaliskt system med ett Hilbertrum $\mathscr{H}$. Endimensionella underrum till $\mathscr{H}$ representerar tillstånd hos systemet

[1] Informellt beskrivet är ett mått på en mängd en tilldelning av positiva tal till delmängder av mängden, där talen kan uppfattas tillskriva delmängderna en storlek.

[2] Separabel: som har en uppräknelig tät delmängd. Tätheten innebär att varje omgivning till varje element av grundmängden ska innehålla ett element i delmängden; t.ex. är $\mathbb{Q}$ tät i $\mathbb{R}$.

[3] Ett Hilbertrum är ett fullständigt vektorrum utrustat med en inre produkt. Fullständigheten innebär att alla Cauchyföljder i rummet konvergerar. Det finns alltså inga ”saknade punkter”.

och varje observabel motsvaras av en självadjungerande operator A på $\mathscr{H}$. Denna formulering är ekvivalent med John von Neumanns (se [8]), tack vare Riesz representationssats, som anger korrespondensen mellan linjära funktionaler i $\mathscr{H}^*$ och endimensionella underrum av $\mathscr{H}$. Vi kan modellera kvanthändelser som ett så kallat *lattice* av dessa underrum. Gleasons sats ger oss möjlighet att ankyta sannolikheter till dessa underrum/kvanthändelser.

En alternativ formulering av Gleasons sats, som bevisas i denna rapport, är centrerad kring begreppet *ramfunktion*, och lyder [4]:

Sats 2 (Gleasons sats)**.** *Varje begränsad ramfunktion f på ett reellt eller komplext separabelt Hilbertrum av $\dim(\mathscr{H}) \geq 3$ är reguljär.*

3 Förberedande definitioner och lemman

Ett centralt begrepp i formuleringen och beviset av Gleasons sats är ramfunktioner. Dessa börjar vi studera i det första delkapitlet. Vi introducerar därefter notation och terminologi som kommer användas rapporten igenom. Till sist i detta kapitel bevisar vi fyra lemman som behövs för beviset av Gleasons sats.

3.1 Ramfunktioner och deras egenskaper

Vi definierar först begreppet ram, därefter begreppet ramfunktion. Låt därvid V vara ett separabelt, reellt eller komplext, Hilbertrum med en inre produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ och norm $||x|| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ och låt $\dim V = n$. Låt S^{n-1} beteckna enhetssfären i V. Vi kommer huvudsakligen studera enhetssfären i $\mathbb{R}^3$, och låter därför denna speciellt betecknas S.

Definition 1. *En ortonormal mängd $\{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset S^{n-1}$ kallas en ram i V.*

Definition 2. *En ramfunktion är en reellvärd funktion $f : S^{n-1} \to \mathbb{R}$ sådan att $\sum_{i=1}^{n} f(v_i) = w(f)$, oberoende av valet av ram (v_i). w(f) kallas vikten av f.*

Definition 3. *En ramfunktion f som kan skrivas på formen $f(x) = \langle x, Ax \rangle$, för någon symmetrisk (om V är reellt) eller hermitesk (om V är komplext) linjär avbildning A kallas för en reguljär ramfunktion.*

I lemma 1 ges fem viktiga egenskaper för ramfunktioner på S. Egenskap (iv) förutsätter att funktionen antar ett maximi- och ett minimivärde.

Lemma 1. *Om f och g är ramfunktioner på S gäller följande*

(i) $w(\alpha f) = \alpha w(f),\ \alpha \in \mathbb{R}$
$w(f+g) = w(f) + w(g)$.

(ii) $f(-s) = f(s),\ s \in S$.

(iii) Om $p, q, p', q' \in S$ ligger på samma storcirkel på S och $p \perp q$, $p' \perp q'$, så gäller

$$f(p) + f(q) = f(p') + f(q').$$

(iv) Låt $f(p) = \max_S f$ och $\min_S f = m$. Då finns det ett $q \in S$ sådant att $p \perp q$ och $f(q) = m$.

(v) Låt $\sup_S f = M < \infty$, $\inf_S f = m > -\infty$, $\xi > 0$ och tag ett $s \in S$ så att $f(s) > M - \xi$. Då finns det ett $t \in S$ sådant att $s \perp t$ och $f(t) < m + \xi$.

Notera att (i) innebär att mängden av alla ramfunktioner utgör ett vektorrum.

Bevis (i). Med ramfunktioner f och g samt en ram (v_1, v_2, v_3), har vi

$$w(\alpha f) = \sum_{i=1}^{3} \alpha f(v_i) = \alpha \sum_{i=1}^{3} f(v_i) = \alpha w(f), \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

$$w(f+g) = \sum_{i=1}^{3} (f(v_i) + g(v_i)) = \sum_{i=1}^{3} f(v_i) + \sum_{i=1}^{3} g(v_i) = w(f) + w(g).$$

□

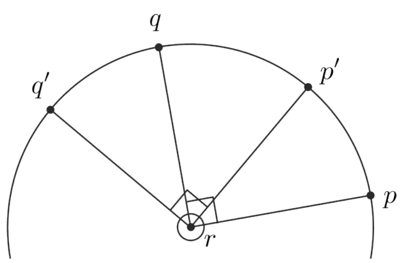
Bevis (ii). Tag en ram (r, s, t) i S. Antag att vikten av f är $w(f) = w$. Då har vi att

$$f(r) + f(s) + f(t) = w.$$

Eftersom även $(r, -s, t)$ är en ram på S, har vi att

$$f(r) + f(-s) + f(t) = w.$$

Genom att subtrahera dessa två ekvationer får vi således att $f(-s) = f(s)$. □



Figur 1: Illustration till beviset av egenskap (iii) för ramfunktioner. Vektorn mot r pekar ut ur bilden, så att alla de fem markerade punkterna ligger på enhetssfären S.

Bevis (iii). Då $p, q, p', q' \in S$ alla ligger på samma storcirkel, enligt figur 1, kan vi välja $r \in S$ ortogonal mot p, q, p', q'. Eftersom $p \perp q$ och $p' \perp q'$ har vi att (p, q, r) och (p', q', r) är ramar. Enligt definition av ramfunktion har vi då

$$f(p) + f(q) + f(r) = w \text{ och } f(p') + f(q') + f(r) = w,$$

där $w = w(f)$ är vikten av f. Genom subtraktion av dessa två ekvationer och förenkling får vi

$$f(p) + f(q) = f(p') + f(q').$$

□

Bevis (iv). Antag motsatsen, det vill säga att för alla q på ekvatorn E_p relativt nordpolen p[4] gäller $f(q) > m$. Då antas minimum någonstans utanför ekvatorn, säg vid q'. Välj nu ett $p' \perp q'$ och ett $q \perp p$ på storcirkeln som definieras av p och q'. Vi får:

$$f(p) + f(q) - f(p') - f(q') \;=\; M + f(q) - f(p') - m \;>\; M + m - M - m = 0$$

Den strikta olikheten strider mot (iii), och påståendet är bevisat. □

Bevis (v). Givet $s \in S$ sådant att $f(s) > M - \xi$, tag $\delta > 0$ sådant att $f(s) > M - \xi + \delta$ och tag t' sådant att $f(t') < m + \delta$. Då finns det en storcirkel på S som går genom både s och t'. Välj nu s' och t på denna storcirkel sådana att $s \perp t$ och $s' \perp t'$. Då ger (iii) att

$$f(t) = f(s') + f(t') - f(s) < M + m + \delta - (M - \xi + \delta) = m + \xi.$$

Det vill säga, det finns $t \in S$ sådant att $s \perp t$ och

$$f(t) < m + \xi.$$

□

[4] E_p definieras formellt i avsnitt 3.2

3.2 Notation och terminologi

Vi inför här lite suggestiv terminologi. Enhetssfären i $\mathbb{R}^3$ betecknas S. Relativt en given vektor $p \in S$, där p är att betrakta som sfärens nordpol, definierar vi norra halvklotet, N_p, och ekvatorn, E_p, enligt följande:

$$N_p := \{s \in S : \langle p, s\rangle \geq 0\}$$
$$E_p := \{s \in S : \langle p, s\rangle = 0\}.$$

Eftersom vi betraktar normerade vektorer ser vi att $\langle p, s\rangle = \cos(\theta(p, s))$, där $\theta(p, s)$ är den minsta vinkeln mellan p och s.

Relativt p definierar vi också *latituden*[5] för $s \in N_p$ som

$$l_p(s) := \langle p, s\rangle^2.$$

Med denna definition är l en ramfunktion.[6]

För varje $s \in N_p \setminus \{p\}$ finns det en unik vektor $s^\perp \in N_p$ som är den nordligaste (med maximal latitud l_p) vektorn ortogonal mot s.[7] Denna uppfyller $l_p(s) + l_p(s^\perp) = 1$. Vi kan genom $s^\perp$ definiera *sluttningen* genom s som

$$D_s := \{t \in N_p \setminus \{p\} : t \perp s^\perp, \, s \in N_p \setminus \{p\}\}.$$

Det vill säga, för $s \in N_p \setminus \{p, E_p\}$, är D_s den halva storcirkel på N_p som har s som sin nordligaste punkt, men då $s \in E$ gäller $D_s = E_p$. I specialfallet då $s = p$ kan $s^\perp$ vara vilken punkt som helst på E_p, och vilken halv-storcirkel som helst på N_p genom p kan kallas en sluttning till p.

3.3 Lemma om tillräckliga villkor för en enhetsfunktion

Lemma 2. *Låt C vara en ändlig eller uppräknelig delmängd av intervallet $(0, 1)$. Antag att $f : [0, 1] \setminus C \to \mathbb{R}$ är en funktion sådan att*

(i) $f(0) = 0$.

(ii) Om $a,b \in [0, 1] \setminus C$ och $a < b$, så gäller att $f(a) \leq f(b)$.

(iii) Om $a,b,c \in [0, 1] \setminus C$ och $a + b + c = 1$, så gäller att $f(a) + f(b) + f(c) = 1$.

Då gäller att

$$f(a) = a, \quad \forall a \in [0, 1] \setminus C.$$

Bevis. Låt f vara en funktion som uppfyller satsens villkor. Definiera mängden

$$\tilde{C} := \{x : \exists r \in Q, c \in C \text{ så att } x = rc \text{ eller } x = r(1 - c)\} \tag{3.1}$$

Vi noterar att $C \subseteq \tilde{C}$, att $\tilde{C}$ är sluten under multiplikation med $r \in \mathbb{Q}$ och att $\tilde{C}$ som mest är uppräknelig. Därmed finns överuppräkneligt många $a \in (0, 1) \setminus \tilde{C}$. Tag ett sådant a och definiera

$$\mathbb{Q}_a := \{r \in \mathbb{Q} \text{ sådana att } ra \in [0, 1]\},$$

eller ekvivalent $\mathbb{Q}_a = [0, 1/a] \cap \mathbb{Q}$. För alla $r \in \mathbb{Q}_a$ gäller att $ra, 1 - ra \in [0, 1] \setminus C = D_f$. Detta inses lätt genom att anta motsatsen, som leder till att $a \in \tilde{C}$, vilket är en motsägelse. Vi kan då, för varje $a \in (0, 1) \setminus \tilde{C}$, definiera funktionen

$$g_a(r) = f(ra), \quad \forall r \in \mathbb{Q}_a.$$

Återstoden av beviset är uppbyggt i fyra delar, i vilka vi visar

[5] Ej att förväxla med den geografiska definitionen av latitud, som är vinkeln relativt ekvatorialplanet.

[6] Detta inses genom att låta en godtycklig ram fungera som bas i rummet, och betrakta längden av p uttryckt i denna bas. För formellt bevis av detta och av vad som kan ses som det omvända påståendet, se A.1.

[7] Detta geometriskt intuitiva påstående bevisas formellt i A.1.

1: $g_a(r+r') = g_a(r) + g_a(r')$, för alla $r, r' \in \mathbb{Q}_a$ sådana att även $r + r' \in \mathbb{Q}_a$

2: $g_a(r) = rg_a(1) = rf(a), \quad \forall r \in \mathbb{Q}_a$.

3: $f(a) = a, \;\; \forall a \in [0,1] \setminus \tilde{C}$.

4: $f(a) = a, \;\; \forall a \in [0,1] \setminus C$.

Steg 1: Tag $r, r' \in \mathbb{Q}_a$ sådana att även $r + r' \in \mathbb{Q}_a$. Genom att notera att $ra, r'a$ och $1-(r+r')a$ summerar till 1 och ligger i definitionsmängden till f får vi enligt (iii) att

$$f(ra) + f(r'a) = 1 - f(1-(r+r')a)$$

och på samma vis gäller att

$$1 - f(1-(r+r')a) = f((r+r')a).$$

Om vi kombinerar dessa två ekvationer får vi att

$$\begin{aligned} & f(ra) + f(r'a) = f((r+r')a) \\ & \Rightarrow g_a(r) + g_a(r') = g_a(r+r') \end{aligned} \tag{3.2}$$

Steg 2: Vi påminner om att villkoret $r \in \mathbb{Q}_a$ är ekvivalent med att $r \in [0, 1/a] \cap \mathbb{Q}$. Tag ett sådant r. Vi kan då skriva $r = \frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{N}$ och $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Då gäller även att $\frac{1}{q} \in [0, 1/a] \cap \mathbb{Q}$. Genom upprepad användning av ekvation (3.2) får vi

$$g_a\left(\frac{p}{q}\right) = g_a\left(\frac{1}{q} + ... + \frac{1}{q}\right) = pg_a\left(\frac{1}{q}\right),$$

och eftersom $1 < 1/a$ finns $g_a(1)$, vi får då

$$\begin{aligned} g_a(1) = g_a\left(\frac{q}{q}\right) = qg_a\left(\frac{1}{q}\right) \\ \Rightarrow g_a\left(\frac{1}{q}\right) = \frac{1}{q} g_a(1) \end{aligned}$$

Genom att kombinera dessa två ekvationer kommer vi fram till att

$$g_a(r) = rg_a(1) = rf(a).$$

Steg 3: Vi noterar först att $f(1) = 1$ och $f(0) = 0$ enligt (i) och (iii). För godtyckligt $a \in (0,1) \setminus \tilde{C}$, låt $t \in (a, 1) \setminus \tilde{C}$ vara nära 1 sådant att $at \in [0,1] \setminus C$ och tag följder $x_n \nearrow a$ och $y_n \searrow a$ i $[0, 1/t] \cap \mathbb{Q}$. Detta medför då att $x_n t, y_n t \in [0,1] \setminus C$, enligt tidigare resonemang. Det finns sådana följder x_n och y_n eftersom $\mathbb{Q}$ är en tät delmängd i $[0, 1]$, och därmed kan även alla tal i $(0,1) \setminus \tilde{C}$ approximeras godtyckligt bra med rationella tal. Då gäller enligt (ii) att

$$\begin{aligned} f(x_n t) \leq f(at) \leq f(y_n t) \\ \Rightarrow x_n f(t) \leq f(at) \leq y_n f(t) \end{aligned}$$

och genom att låta x_n, y_n gå mot a får vi

$$af(t) \leq f(at) \leq af(t). \tag{3.3}$$

Notera att för alla $N \in \mathbb{N}$ finns det $\epsilon_N \in [0,1] \setminus \tilde{C}$ sådant att $N\epsilon_N \in [0,1] \setminus \tilde{C}$ och att $a(1-\epsilon_N) \in [0,1] \setminus \tilde{C}$. Med ett sådant ϵ_N gäller att

$$\begin{aligned} 0 \leq f(N\epsilon_N) = Nf(\epsilon_N) \leq 1 \\ \Rightarrow 0 \leq f(\epsilon_N) \leq \frac{1}{N} \end{aligned}$$

eftersom f är begränsad ovanifrån av 1 och underifrån av 0. Genom att låta $t_N = 1 - \epsilon_N \in [0,1] \setminus \tilde{C}$ gäller då att följden $t_N \nearrow 1$ och

$$f(t_N) = 1 - f(\epsilon_N) \to 1.$$

Genom att ersätta $t \mapsto t_N$ i ekvation (3.3) och låta $t_N \to 1$ får vi att

$$f(a) = a, \forall a \in [0,1] \setminus \tilde{C},$$

där vi också använt att $f(1) = 1$ och $f(0) = 0$.

Steg 4: För $a \in (0,1) \setminus C$ tag nya följder $x_n \nearrow a$ och $y_n \searrow a$ i $(0,1) \setminus \tilde{C}$. Dessa följder existerar eftersom mängden $(0,1) \setminus \tilde{C}$ – tack vare att $\tilde{C}$ är uppräknelig – är tät i $[0,1]$, vilket innebär att varje $a \in (0,1) \setminus C$ kan approximeras godtyckligt bra med tal i $(0,1) \setminus \tilde{C}$. Enligt (ii) och steg 3 gäller då

$$f(x_n) \leq f(a) \leq f(y_n) \Leftrightarrow x_n \leq f(a) \leq y_n$$

och genom att låta x_n och y_n gå mot a får vi till slut att

$$f(a) = a, \forall a \in [0,1] \setminus C,$$

där vi återigen använt att $f(1) = 1$ och $f(0) = 0$. □

3.4 Två lemman om ramfunktioner

Som fortsättning på avsnitt 3.1 bevisar vi här två lemman och ett korollarium för ramfunktioner på S, dessa kommer att senare användas för beviset i $\mathbb{R}^3$.

Lemma 3. *Låt f vara en begränsad ramfunktion som, för något $p \in S$, är konstant på E_p och uppfyller*

$$f(p) > \sup_S f - \epsilon$$

för något $\epsilon > 0$. Då gäller att

$$f(a) > f(b) - \epsilon, \quad \forall a, b \in N_p \setminus \{p\} \text{ där } b \in D_a.$$

Bevis. Enligt (v) i lemma 1 gäller att

$$f(e) < \inf_S f + \epsilon \quad \forall e \in E_p.$$

Låt de två punkterna $a, b \in N_p$ vara givna sådana att $b \in D_a$. Välj sedan $b_2 \in D_a$ så att $b \perp b_2$ och $a_2 \in D_a \cap E_p$ vilket innebär $a \perp a_2$ (Halvcirkeln D_a har mittpunkten a och ändpunkter på E_p.). Då de fyra punkterna är parvis ortogonala och ligger på D_a som är en del av en storcirkel, får vi enligt (iii) i lemma 1

$$f(a) + f(a_2) = f(b) + f(b_2). \tag{3.4}$$

Med $f(a_2) = f(e)$ ger detta

$$f(a) = f(b) + f(b_2) - f(e) > f(b) + f(b_2) - \inf_S f - \epsilon > f(b) - \epsilon.$$

□

Korollarium 1. *Om vi i förutsättningarna för lemmat ovan sätter $\epsilon = 0$ och kräver likhet i olikheten, har vi, under annars samma antaganden,*

$$f(a) \geq f(b) \quad \forall a, b \in N_p \text{ där } b \in D_a.$$

Bevis. Inses enligt beviset ovan, men med hänvisning till lemma 1 (iv) istället för (v), samt genom att tillåta likhet i den sista olikheten och byta de båda föregående mot likheter. □

Lemma 4. *Låt f vara en ramfunktion, låt $p \in S$ vara godtycklig, och låt $\hat{p} : S \to S$ beteckna rotationen av sfären ett kvarts varv moturs relativt p. Då är ramfunktionen*

$$f(s) + f(\hat{p}s), \quad (s \in S)$$

konstant på E_p.

Bevis. Låt f, p och $\hat{p}$ vara som ovan, och låt $e_1 \in E_p$ vara fix. Tag godtycklig $e_2 \in E_p$. Uppenbarligen gäller det att $e_1 \perp \hat{p}e_1$, $e_2 \perp \hat{p}e_2$, samt att e_1, $\hat{p}e_1$, e_2 och $\hat{p}e_2$ ligger på samma storcirkel E_p. Egenskap (iii) i lemma 1 implicerar då att

$$f(e_1) + f(\hat{p}e_1) = f(e_2) + f(\hat{p}e_2).$$

□

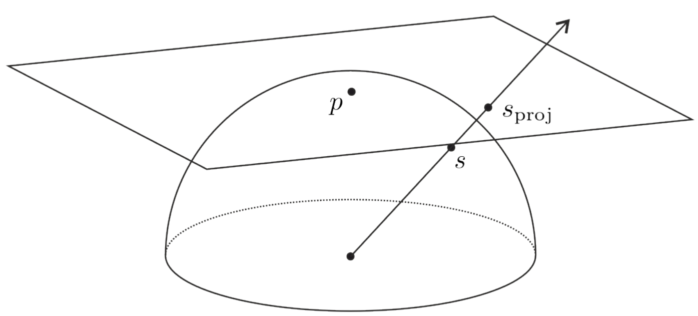
3.5 Pirons geometriska lemma

Lemma 5 (Pirons geometriska lemma[8])**.** *Låt $s, t \in N_p$, för givet $p \in S$, så att $l(s) > l(t)$. Då finns det en ändlig följd $(s_i)_{i=0}^n$ där $s = s_0$, $t = s_n$ och det gäller för varje s_{i+1} att $s_{i+1} \in D_{s_i}$.*

Bevis. Vi kan uttrycka lemmat suggestivt som att det går att ”nå” t från p genom att ”gå” ett antal ”steg” från p, där ett steg definieras som ett stycke sluttning från utgångspunkten. Vi använder detta uttryckssätt fritt i beviset.

För de fall då $s = p$ eller då t ligger på ekvatorn är slutsatsen enkel: Låt å ena sidan $s = s_0 = p$. Eftersom varje halv storcirkel genom p räknas som sluttning till p kan vi komma till t med ett enda kliv, längs den halv-storcirkel som innehåller både p och t. Låt å andra sidan $t \in E$. I detta fall går det att nå t från godtyckligt s_0 i två steg, eftersom D_{s_0} skär ekvatorn i exakt två punkter, och sluttningen för en punkt på ekvatorn är hela ekvatorn.

För att genomföra beviset för $s, t \in N_p \backslash \{p, E_p\}$, överför vi problemet från en sfär till ett plan, nämligen planet som tangerar sfären i nordpolen p. Betrakta den s.k. *centralprojektionen* av norra hemisfären till detta plan, med sfärens centrum som projektionscentrum, som illustreras i figur 2. Detta innebär att varje punkt $s \in N_p \setminus E_p$ avbildas på punkten där strålen från sfärens mitt, genom s, skär planet. Vi observerar att latitudcirklar[9] på grund av symmetri avbildas på cirklar på planet. En sluttning D_s till en punkt $s \in N_p$ avbildas på en rät linje, som tangerar bilden av latitudcirkeln till s, som visas i figur 3.[10] Eftersom projektionen är en bijektion mellan N_p och projektionsplanet kan vi för enkelhets skull utelämna uttrycket ”bilden av”, och låta sammanhanget avgöra om vi är i sfären eller planet när vi refererar till punkter, sluttningar och så vidare.



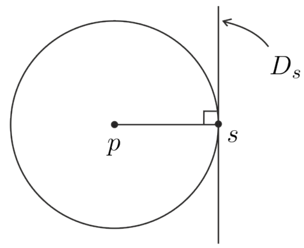
Figur 2: Centralprojektion av punkten s på norra hemisfären, till projektionsplanet som tangerar i nordpolen p.

Beviset sker i två delar. Först visar vi att man från en punkt s_{n-2} rakt norr om målpunkten t, alltid kan gå till t i två steg. Därefter visar vi med trigonometri och ett gränsvärdesargument

[8] Ett alternativt bevis ges i A.2.

[9] En latitudcirkel eller parallellcirkel är en cirkel på en sfär där alla punkter har samma latitud.

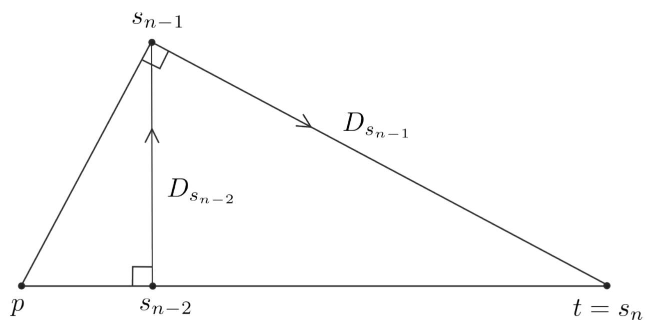
[10] Detta inses genom att betrakta planet som innehåller sluttningen. Eftersom sluttningen är en del av en storcirkel går detta plan genom sfärens centrum, och skär naturligtvis projektionsplanet i en linje. Att linjen och parallellcirkelbilden har exakt en punkt gemensamt innebär tangering.



Figur 3: Projektion av latitudcirkel och sluttning D_s, till planet som tangerar sfärens nordpol.

att man från en godtycklig startpunkt s, med högre latitud än t, alltid kan gå till en sådan punkt som s_{n-2} (som ligger rakt norr om målpunkten t) i ett ändligt antal steg.

Den första delen kan inses med en enkel geometrisk konstruktion, som illustreras i figur 4. När vi går från s_{n-2} längs $D_{s_{n-2}}$ till en punkt s_{n-1}, bildar punkterna p, s_{n-1}, t en triangel i planet där vinkeln $\measuredangle ps_{n-1}t$ är intressant. För ett (för) kort steg längs $D_{s_{n-2}}$ är triangeln trubbvinklig; för ett (för) långt är den spetsvinklig. När vinkeln är rät utgör sträckan $s_{n-1}t$ ett stycke av $D_{s_{n-1}}$, och vi har $t = s_n \in D_{s_{n-1}}$.



Figur 4: Illustration i projektionsplanet av hur det alltid från en punkt s_{n-2} går att nå en punkt $t = s_n$ rakt söderut, genom att följa två sluttningar.

För den andra delen, vars idé visas med ett exempel i figur 5, låter vi φ beteckna vinkeln mellan strålarna från p till s_0 och till t. (Låt s_n istället för s_{n-2} beteckna en punkt på samma longitud som t.) Dela φ i n lika delar. Låt s_{i+1} för varje $i \in [0 \,..\, n-1]$ vara punkten på D_{s_i} så att $\measuredangle s_i p s_{i+1} = \varphi/n$. Betrakta de n rätvinkliga trianglarna som bildas av $s_i p s_{i+1}$. Om d_i är avståndet mellan p och s_i, har vi

$$\frac{d_i}{d_{i+1}} = \cos\left(\frac{\varphi}{n}\right) \leq 1.$$

Genom att använda en känd olikhet för cosinus får vi

$$1 - \frac{\varphi^2}{2n^2} \leq \cos(\varphi/n) = \frac{d_i}{d_{i+1}} \leq 1.$$

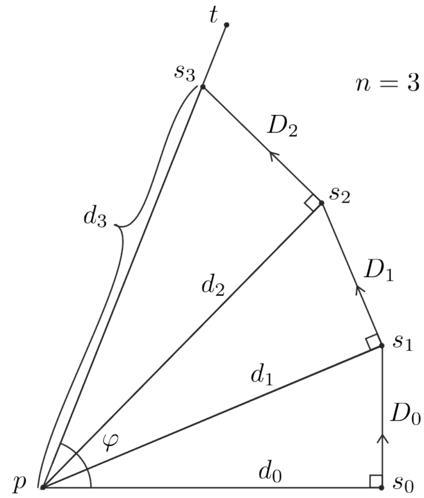
Slutligen observerar vi att alla led i denna olikhet är positiva för $n \geq 3$ (ty $|\varphi| \leq \pi$). Detta innebär att för $n \geq 3$ gäller

$$\left(1 - \frac{\varphi^2}{2n^2}\right)^n \leq \cos^n(\varphi/n) = \frac{d_0}{d_n} \leq 1.$$

Eftersom $(1 - \frac{\varphi^2}{2n^2})^n = (1 - \frac{\pi}{\sqrt{2}n})^n(1 - \frac{\pi}{\sqrt{2}n})^n \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-\pi/\sqrt{2}}e^{\pi/\sqrt{2}} = 1$ innebär detta att $d_n \to d_0$. Därmed ligger s_n för stora n närmre p än vad t gör, alltså rakt norr om t. □

Korollarium 2. *För givet $p \in S$ och $e \in E_p$, låt $s, t \in N_p \setminus \{p\}$ vara två punkter som ligger på storcirkelsegmentet mellan p och e, sådana att $l(s) > l(t)$. Då finns det ett $r \in N_p \setminus \{p\}$ sådant att $r \in D_s$ och $t \in D_r$.*

Bevis. Då s ligger rakt norr om t kan vi enligt beviset av lemma 5 ovan finna ett sådant r. □



Figur 5: Illustration i projektionsplanet av hur en punkt s_3 kan nås från punkten s_0 i $n = 3$ steg, där s_3 har en latitud mellan den för s_0 och t.

4 Gleasons sats

Nu kan det egentliga beviset av Gleasons sats påbörjas. Vi formulerar först den allmänna satsen igen, och ger därpå en formulering specifikt för $\mathbb{R}^3$. Därefter bevisar vi den sistnämnda formuleringen, för att sedan visa hur detta ger satsens giltighet i allmänna Hilbertrum av dimension minst 3. Slutligen ger vi i avsnitt 4.6 exempel på en ramfunktion i $\mathbb{R}^2$ som illustrerar att satsen är falsk i dimension två. (Där visar vi dessutom att den är trivialt sann i $\mathbb{R}$.)

4.1 Formulering av Gleasons sats i $\mathbb{R}^3$

Som beskrivet i avsnitt 2 kan Gleasons sats formuleras som påståendet att begränsade ramfunktioner, i allmänna separabla Hilbertrum, av nödvändighet är reguljära. Vi påminner om denna formulering:

Sats 3 (Gleasons sats)**.** *Varje begränsad ramfunktion f på ett reellt eller komplext separabelt Hilbertrum av $\dim(\mathscr{H}) \geq 3$ är reguljär.*

Enligt definition 3 innebär reguljaritet för en ramfunktion f på S att denna kan skrivas på formen $f(s) = \langle s, As \rangle$, där A är en symmetrisk matris.[11] Enligt spektralsatsen kan en sådan matris diagonaliseras: skrivas som $A = P^T DP$, (där P är en ortonormal matris med A:s egenvektorer som kolonner, och D är en diagonalmatris A:s egenvärden (som är reella) längs diagonalen).

Eftersom P är en basbytesmatris, innebär detta att $f(s) = \langle s, As \rangle = \langle s, P^T DPs \rangle = \langle s', Ds' \rangle$, där s' är s uttryckt i en lämplig bas, som vi betecknar (v_1, v_2, v_3).

Det största och det minsta egenvärdet till matrisen A (som definierar en kvadratisk form genom $\langle s, As \rangle$) ger formens supremum M respektive infimum m på enhetssfären. (Se appendix A.3.) Om (x, y, z) betecknar koordinaterna för s i basen (v_1, v_2, v_3), kan därför f skrivas som

$$f(s) = Mx^2 + \alpha y^2 + mz^2 \tag{4.1}$$

där $\alpha \in [m, M]$ så att $m + \alpha + M = w(f)$. Eftersom koordinaterna i kvadrat är latituden med avseende på respektive basvektor ($x^2 = l_{v_1}(s)$, $y^2 = l_{v_2}(s)$, $z^2 = l_{v_1}(s)$), och varje latitud är en ramfunktion,[12] så är också f en ramfunktion (enligt lemma 1 (i)).

Vi kan med denna motivering ge följande formulering av Gleasons sats i $\mathbb{R}^3$:

[11] Egentligen en symmetrisk avbildning, som kan representeras av en symmetrisk matris. Vi identifierar för enkelhets skull i detta stycke avbildningar med sina matriser och vektorer med sina representationer i given bas.

[12] Detta bevisas i appendix A.1.

Sats 4 (Gleasons sats i $\mathbb{R}^3$)**.** *Låt f vara en begränsad ramfunktion i* $\mathbb{R}^3$ *och definiera*

$$M := \sup_S f$$
$$m := \inf_S f$$
$$\alpha := w(f) - M - m$$

Då finns det en bas (v_1, v_2, v_3) *sådan att*

$$f(s) = \langle s, Ds \rangle = Mx^2 + \alpha y^2 + mz^2$$

för alla $s \in S$ *där (x,y,z) är koordinaterna för s med avseende på basen* (v_1, v_2, v_3)*.*

4.2 Bevis i $\mathbb{R}^3$ för en speciell familj av ramfunktioner

I detta avsnitt formulerar och bevisar vi en begränsad version av Gleasons sats som gäller för en speciell familj av ramfunktioner. Vi påminner först läsaren om att E_p betecknar sfärens ekvator relativt p, och att N_p betecknar sfärens norra halvklot relativt p. För en diskussion om och formell definition av dessa begrepp, se avsnitt 3.2.

Proposition 1. *En begränsad ramfunktion i* $\mathbb{R}^3$ *som antar sina extremvärden, samt är konstant på ekvatorn relativt den punkt där den antar maximum, är reguljär.*

Bevis. Låt f vara en begränsad ramfunktion som antar sitt maximum M på någon punkt $p \in S$, och som antar det konstanta värdet m på E_p.

Antag först att $m = M$. Enligt (iv) i lemma 1 existerar det en punkt $t \in E_p$ ($t \in S$ och $t \perp p$) sådan att $f(t) = \inf_S f$, vilket innebär att $f(t) = M = \inf_S f$. Då f både är uppåt och nedåt begränsad av M får vi

$$f(s) = M, \quad \forall s \in S,$$

och vi ser att $f(s) = \langle s, MIs \rangle$, där I är identitetsmatrisen.

Antag nu att $m \neq M$. Från f bildar vi en normaliserad ramfunktion g, enligt

$$g(s) := \frac{f(s) - m}{M - m}.$$

För g gäller att

$$g(e) = 0 = \inf_{s \in S} g(s) \quad \forall e \in E_p \quad \text{och} \quad g(p) = 1 = \sup_{s \in S} g(s),$$

samt att $w(g) = 1$, eftersom $g(p) + g(e_1) + g(e_2) = 1$ för godtyckliga $e_1, e_2 \in E_p$.

Låt nu $a, b \in N_p$ vara godtyckliga punkter sådana att $l_p(a) > l_p(b)$. Enligt lemma 5 finns det en följd $s_0, \ldots, s_n$ där $s_0 = a$, $s_n = b$ och det gäller att $s_{i+1} \in D_{s_i}$ för alla $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Upprepade användningar av korollarium 1 ger oss

$$g(s_0) \geq g(s_1) \geq \cdots \geq g(s_n),$$

varför vi kan dra slutsatsen

$$g(a) \geq g(b), \quad \forall a, b \in N_p : l_p(a) > l_p(b). \tag{4.2}$$

Vi definierar nu, för $l \in [0, 1]$, latitudcirkeln L_l:

$$L_l := \{s \in N_p : l_p(s) = l\}.$$

På samma intervall definierar vi också de två funktionerna

$$\bar{g}(l) = \sup_{x \in L_l} g(x), \quad \text{och} \quad \underline{g}(l) = \inf_{x \in L_l} g(x).$$

Av (4.2) får vi att $\bar{g}$ och $\underline{g}$ är växande, samt att

$$\bar{g}(l_1) \leq \underline{g}(l_2), \quad \forall l_1, l_2 \in [0, 1] : l_1 < l_2. \tag{4.3}$$

Vi påstår att $\bar{g} = \underline{g}$ på $[0,1]$, förutom i möjligen ändligt eller uppräkneligt oändligt många punkter. För att visa detta låter vi $C \subseteq [0,1]$ beteckna mängden av alla punkter där $\bar{g} \neq \underline{g}$. Notera att det faktum att $\bar{g}$ och $\underline{g}$ är växande, tillsammans med (4.3), implicerar att samtliga intervall i $\{(\underline{g}(c), \bar{g}(c)) : c \in C\}$ är parvis disjunkta. Låt nu

$$M_n = \left\{ c \in C : \bar{g}(c) - \underline{g}(c) > \frac{1}{n} \right\}.$$

På grund av det föregående konstaterandet är $|M_n| < n$. Detta visar att C, som kan skrivas som

$$C = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n,$$

är en uppräknelig union av *ändliga* mängder, och därför själv är ändlig eller uppräkneligt oändlig.

Låt nu $l_1, l_2, l_3 \in [0,1] \setminus C$ vara godtyckliga sådana att $\sum_{i=1}^{3} l_i = 1$. Då existerar[13] en ram (v_1, v_2, v_3) i N_p sådan att $l_p(v_i) = l_i$, $i = 1, 2, 3$. Eftersom $l_i \notin C$ är $\bar{g}(l_i) = \underline{g}(l_i)$, vilket innebär att g är konstant på L_{l_1}, $i = 1, 2, 3$. Detta medför att

$$\sum_{i=1}^{3} \bar{g}(l_i) = \sum_{i=1}^{3} \underline{g}(l_i) = \sum_{i=1}^{3} g(v_i) = w(g) = 1.$$

Detta, tillsammans med det faktum att C antingen är ändlig eller uppräkneligt oändlig, gör att $\bar{g}$ (så väl som $\underline{g}$) uppfyller villkoren för lemma 2, så att

$$\bar{g}(l) = \underline{g}(l) = l, \quad \forall l \in [0,1] \setminus C.$$

Vi visar nu att detta implicerar att $C = \emptyset$. Antag motsatsen, och tag godtyckligt $c \in C$. Mängden $(\underline{g}(c), \bar{g}(c)) \setminus C$ är icketom – i själva verket är den överuppräknelig – varför det finns ett $x \in (\underline{g}(c), \bar{g}(c))$ sådant att $\bar{g}(x) = \underline{g}(x) = x$, så att

$$\bar{g}(c) > x = \underline{g}(x), \quad \text{och} \quad \bar{g}(x) = x > \underline{g}(c).$$

Beroende på huruvida $c < x$ eller $x < c$ så kommer en av olikheterna ovan motsäga (4.3), och vi konstaterar att $c \notin C$; en klar motsägelse till vårt antagande. Därmed gäller det att $C = \emptyset$, vilket leder oss till att

$$g(s) = \bar{g}(l_p(s)) = l_p(s) = \langle s, p \rangle^2, \quad (s \in N_p).$$

Egenskap (ii) i lemma 1 visar att resultatet i själva verket gäller för alla $s \in S$, och definitionen av g ger oss till slut

$$\frac{f(s) - m}{M - m} = \langle s, p \rangle^2 \Rightarrow f(s) = m + (M - m)\langle s, p \rangle^2, \quad (s \in S).$$

Väljer vi $q, r \in E_p$ så att (p, q, r) är en bas ser vi alltså att

$$\begin{aligned} f(s) &= m + (M - m)\langle s, p \rangle^2 = M\langle s, p \rangle^2 + m(1 - \langle s, p \rangle^2) \\ &= M\langle s, p \rangle^2 + m(\langle s, q \rangle^2 + \langle s, r \rangle^2) = Mx^2 + my^2 + mz^2, \end{aligned}$$

där $s = (x, y, z)$ med avseende på (p, q, r). Om vi sätter

$$D := \begin{bmatrix} M & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix},$$

ser vi att $f(s) = \langle s, Ds \rangle$, $(s \in S)$. □

[13] Ett bevis för detta återfinns i appendix A.1

4.3 Begränsade ramfunktioner i $\mathbb{R}^3$ antar sina extremvärden

Proposition 2. *En begränsad ramfunktion antar sina extremvärden.*

För att kunna bevisa denna proposition behöver vi följande lemman:

Lemma 6. *Om $(f_n)_1^\infty$ är en funktionsföljd från S till godtyckligt slutet intervall av rella tal, och $I \subset S$ är uppräkneligt oändlig, så finns det en delföljd till $(f_n)_1^\infty$ som konvergerar på I.*

Bevis. Låt I vara uppräkneligt oändlig. Vi kan utan att påverka allmängiltigheten anta att $I = 1, 2, \ldots$. Låt $a, b \in \mathbb{R}$ vara godtyckliga med $a < b$, och låt $(f_n)_1^\infty$ vara en funktionsföljd i $[a, b]$. Låt F beteckna rummet av alla funktioner från S till $[a, b]$. För godtycklig $f \in F$ och $i \in I$ låter vi $\pi_i(f)$ beteckna koordinaten av funktion f i underrummet $[a, b]_i$. Eftersom $[a, b]_1$ är kompakt kan vi finna en delföljd $(f_n^1)_1^\infty$ av $(f_n)_1^\infty$ sådan att $(\pi_1(f_n^1))_1^\infty$ konvergerar i $[a, b]_1$. På samma sätt kan vi för $k = 2, 3, \ldots$ finna en delföljd $(f_n^k)_1^\infty$ av $(f_n^{k-1})_1^\infty$ sådan att $(\pi_k(f_n^k))_1^\infty$ konvergerar i $[a, b]_k$.

Sätt nu $(g_n)_1^\infty := (f_1^1, f_2^2, f_3^3, \ldots)$. Då är $(g_n)_1^\infty$ en delföljd till $(f_n)_1^\infty$ som konvergerar på I. $\square$

Lemma 7. *Om $(f_n)_1^\infty$ är en följd av ramfunktioner från S till godtyckligt slutet intervall av rella tal, som konvergerar på en uppräkneligt oändlig delmängd $I \subset S$, så finns det en ramfunktion f sådan att*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(i) = f(i), \quad \forall i \in I.$$

Bevis. Låt I vara uppräkneligt oändlig, låt $a, b \in \mathbb{R}$ vara godtyckliga med $a < b$, och låt $(f_n)_1^\infty$ vara en följd av ramfunktioner i $[a, b]$ som konvergerar på I. Låt F beteckna rummet av alla funktioner från S till $[a, b]$, och låt $F_r \subset F$ vara delmängden av dessa som är ramfunktioner. Vi påstår att F_r är sluten i F.

För att se detta, låt $g \in F \setminus F_r$ vara godtycklig. Då finns det två ramar (v_1, v_2, v_3) och (v_4, v_5, v_6) sådana att

$$\Delta := \left| \sum_{i=1}^{3} g(v_i) - g(v_{i+3}) \right| > 0.$$

Betrakta den öppna mängden

$$B_{\Delta/6} := \{f \in F : \max(|f(v_i) - g(v_i)|) < \Delta/6, i = 1, 2, \ldots 6\}.$$

För godtycklig $h \in B_{\Delta/6}$ sätter vi $\delta_i = h(v_i) - g(v_i)$, för $i = 1, 2, \ldots, 6$, så att $|\delta_i| < \Delta/6$. Vi får

$$\left| \sum_{i=1}^{3} (h(v_i) - h(v_{i+3})) \right| = \left| \sum_{i=1}^{3} (g(v_i) + \delta_i - g(v_{i+3}) - \delta_{i+3}) \right| \geq$$
$$\left| \sum_{i=1}^{3} (g(v_i) - g(v_{i+3})) \right| - \left| \sum_{i=1}^{3} (\delta_{i+3} - \delta_i) \right| = \Delta - \left| \sum_{i=1}^{3} (\delta_{i+3} - \delta_i) \right| > \Delta - \Delta = 0,$$

så att $h \in F \setminus F_r$, vilket betyder att $F \setminus F_r$ är öppen. Då är komplementet $(F \setminus F_r)^C = F_r$ slutet.

Eftersom F är en produkt av kompakta rum är den kompakt, enligt Tychonoffs sats [10], varför även F_r, som sluten delmängd, är kompakt. Antag nu att det inte finns någon ramfunktion f sådan att $f_n(i) \to f(i)$ på I. Till varje $i \in I$ och $n = 1, 2, \ldots$ bildar vi

$$U_{i,n} = \left\{ f \in F : \left| f(i) - \lim_{n\to\infty} f_n(i) \right| > \frac{1}{n} \right\},$$

så att $\bigcup_{i\in I} \bigcup_{n=1}^{\infty} U_{i,n}$ är en öppen övertäckning av F_r. Eftersom F_r är kompakt kan vi till denna övertäckning finna en ändlig delövertäckning. Då gäller det för något $N < \infty$ och någon ändlig delmängd $J \subset I$ att

$$\bigcup_{j\in J} \bigcup_{n=1}^{N} U_{j,n},$$

är en öppen övertäckning av F_r. Explicit betyder detta att det, för alla $j \in J$, inte existerar någon ramfunktion $f \in F_r$ sådan att $|f(j) - \lim_{n\to\infty} f_n(j)| \leq \frac{1}{N}$, vilket motsäger att $(f_n)_1^\infty$ konvergerar på I. $\square$

Nu har vi det som behövs för att kunna visa proposition 2.

Bevis av proposition 2. Låt f vara en begränsad ramfunktion, och sätt $M := \sup_{s\in S} f(s)$, samt $m := \inf_{s\in S} f(s)$. Vi antar att f ej är kontinuerlig, eftersom satsen annars är trivialt sann, då S är kompakt. Låt $(p_n)_1^\infty$ vara en följd i S sådan att

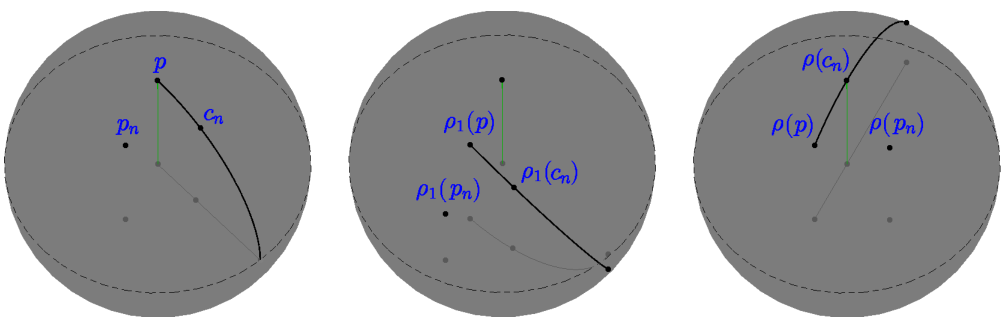
$$\lim_{n\to\infty} f(p_n) = M.$$

Eftersom S är kompakt kan vi anta att $p_n \to p$ för någon $p \in S$. Vi kan dessutom utan problem exkludera eventuella punkter i följden som ligger på södra halvklotet relativt p, och kan därför anta att $(p_n)_1^\infty$ är en följd på N_p.

Vi ämnar nu att utifrån f bilda en följd av ramfunktioner som godtyckligt väl approximerar en ramfunktion som antar supremum i punkten p. Med detta i åtanke låter vi $e \in E_p$ bestämmas godtyckligt. För varje fixt $n \geq 1$ definierar vi $\rho_n : S \to S$ som rotationen av S sådan att

$$\rho_n(p) = p_n, \quad \text{och} \quad \rho_n(c_n) = p,$$

där c_n är den punkt i storcirkelsegmentet mellan p och e sådan att $\langle c_n, p\rangle = \langle p_n, p\rangle$. Ett exempel på en sådan rotation, betraktad som en sammansättning av två rotationer, illustreras i två steg i figur 6 nedan.



Figur 6: Illustration av rotationen $\rho_n = \rho_2(\rho_1)$. Rotationen ρ_1 tar p till p_n, medan rotationen ρ_2 tar c_n till p. De ljusgrå punkterna, samt den ljusgrå linjen, är projektioner på ekvatorplanet.

Vi definierar nu $f_n(s) := f(\rho_n s), (n = 1, 2, \dots)$. Låt $\hat{p} : S \to S$ beteckna rotationen av sfären ett kvarts varv moturs kring p, och sätt

$$g_n(s) := f_n(s) + f_n(\hat{p}s), \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Vi noterar följande tre egenskaper för varje g_n:

1. g_n är konstant på E_p.
2. $\sup_{s\in S} g_n(s) \leq 2M$.
3. $\inf_{s\in S} g_n(s) \geq 2m$.

(1): Detta följer direkt från lemma 4.
(2), (3): Dessa följer direkt från att $\sup_{s\in S} f(s) = M$ respektive att $\inf_{s\in S} f(s) = m$.

Nu definierar vi mängderna $C, \hat{p}C \subset S$ enligt

$$C := \{c_n : n = 1, 2, \dots\}, \quad \text{och} \quad \hat{p}C := \{\hat{p}c_n : n = 1, 2, \dots\}.$$

Observera att C innehåller punkter godtyckligt nära p, då rotationer bevarar avstånd på S:

$$\|c_n - p\| = \|\rho_n c_n - \rho_n p\| = \|p - p_n\| \to 0 \text{ då } n \to \infty.$$

Eftersom $C \cup \hat{p}C \cup \{p\}$ är uppräkneligt oändlig kan vi enligt lemma 6 finna en delföljd $(f_{n_k})_1^\infty$ som konvergerar på $C \cup \hat{p}C \cup \{p\}$. Enligt lemma 7 kan vi finna en ramfunktion $g_r : S \to [m, M]$ sådan att

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(c) = g_r(c), \quad \forall c \in C \cup \hat{p}C \cup \{p\}.$$

Definiera nu ramfunktionen

$$g(s) \coloneqq g_r(s) + g_r(\hat{p}s).$$

Då gäller, för alla $c \in C$,

$$\lim_{k\to\infty} g_{n_k}(c) = \lim_{k\to\infty} \big(f_{n_k}(c) + f_{n_k}(\hat{p}c)\big) = g_r(c) + g_r(\hat{p}c) = g(c).$$

Vi skall nu visa följande egenskaper för g:

1. $g(p) = 2M$.
2. g är konstant på E_p.

(1): Vi har att

$$g(p) = 2g_r(p) = 2\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(p) = 2\lim_{k\to\infty} f(\rho_{n_k} p) = 2\lim_{k\to\infty} f(p_{n_k}) = 2M.$$

(2): Detta är, som tidigare, en direkt konsekvens av lemma 4.

I och med dessa två egenskaper uppfyller g hypotesen i proposition 1, och är därför kontinuerlig.

Låt $\epsilon > 0$ vara godtyckligt. På grund av att C innehåller punkter godtyckligt nära p, av att $g(p) = 2M$, och av att g är kontinuerlig, kan vi finna en punkt $c \in C$ sådan att

$$g(c) > 2M - \epsilon;$$

vi fixerar ett sådant c. För tillräckligt stora n får vi

$$\|c_n - p\| < \|c - p\|,$$

så att $l(c_n) > l(c)$. Detta i samband med att c_n och c ligger i storcirkelsegmentet mellan p och e medför enligt korollarium 2 att vi kan finna $r \in N_p$ sådant att

$$r \in D_{c_n}, \quad \text{och} \quad c \in D_r.$$

Vidare, för $n = 1, 2, \ldots$ ger oss olikheten $\sup_{s\in S} g_n(s) \le 2M$ att

$$\begin{aligned} 0 \ge \sup_{s\in S} g_n(s) - 2M &\Rightarrow g_n(p) \ge \sup_{s\in S} g_n(s) - 2M + g_n(p) \\ &\Rightarrow g_n(p) > \sup_{s\in S} g_n(s) - 2M + g_n(p) - \epsilon \\ &\Rightarrow g_n(p) > \sup_{s\in S} g_n(s) - \delta_n, \end{aligned}$$

där $\delta_n = 2M - g_n(p) + \epsilon$. Vi använder nu lemma 3 och ser att

$$g_n(c_n) > g_n(r) - \delta_n, \quad \text{och} \quad g_n(r) > g_n(c) - \delta_n,$$

så att

$$g_n(c_n) + \delta_n > g_n(r) > g_n(c) - \delta_n \Rightarrow g_n(c_n) > g_n(c) - 2\delta_n.$$

Eftersom

$$g_n(c_n) = f(\rho_n c_n) + f(\rho_n \hat{p} c_n) \le f(p) + M,$$

och $\lim_{n\to\infty} \delta_n = \epsilon$ får vi

$$f(p) + M \ge \liminf_{k\to\infty} g_{n_k}(c_{n_k}) > \lim_{k\to\infty} (g_{n_k}(c) - 2\delta_{n_k}) = g(c) - 2\epsilon > 2M - 3\epsilon,$$

så att $f(p) = M$, eftersom ϵ kan göras godtyckligt litet. Detta innebär också att funktionen $-f$ antar maximum $-m$, så att f antar minimum m. Enligt (iv) i lemma 1 gäller då $f(e) = \inf_{s\in S} f(s) = m$, för något $e \in E_p$. □

4.4 Bevis i $\mathbb{R}^3$

Vi vill nu visa att proposition 1 och proposition 2 ovan tillsammans implicerar Gleasons sats som den är formulerad i avsnitt 4.1.

Låt f vara en begränsad ramfunktion. Enligt proposition 2 antar f sina extremvärden, som vi kallar M och m. Låt (p, q, r) vara en högerorienterad ram så att: $\sup_S f = f(p) = M$; $\inf_S f = f(r) = m$; $f(q) = \alpha$ $(M \geq \alpha \geq m)$. (Enligt (iv) i lemma 1 finns lämpliga p och r. Därefter kan vi välja q så att vi får högerorientering.)

Låt nu (x, y, z) beteckna koordinaterna för $s \in S$ i basen (p, q, r), och låt g vara funktionen:

$$g(s) \coloneqq Mx^2 + \alpha y^2 + mz^2 = Ml_p(s) + \alpha l_q(s) + ml_r(s). \tag{4.4}$$

Eftersom g är en linjärkombination av ramfunktioner är också g en ramfunktion. (Det verifieras enkelt att $w(g) = M + \alpha + m$.) Om vi visar att $f = g$, så har vi bevisat Gleasons sats i $\mathbb{R}^3$ så som den är formulerad i sats 4.

Lemma 8. *Låt ramfunktionerna f och g, basen (p, q, r) och koordinaterna (x, y, z) vara definierade enligt ovan. På de sex storcirklarna $S_i \in S$ $(i = 1, ..., 6)$ som definieras av $x = \pm y$, $x = \pm z$ respektive $y = \pm z$, gäller då $f = g$.*

Bevis. Låt $\hat{p}, \hat{r}$ beteckna transformationerna som roterar rummet 90° positiv led runt respektive axel. Betrakta sedan funktionen $f(s) + f(\hat{p}s)$. Enligt lemma 4 är denna konstant $\alpha + m$ på E_p. Den antar sitt maximum $2M$ för $s = p$. Detsamma gäller för $g(s) + g(\hat{p}s)$. Därmed har vi enligt sats 1:

$$\begin{aligned} f(\hat{p}s) + f(s) &= g(\hat{p}s) + g(s) \\ &= m + (M - m)x^2. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Genom att betrakta $-f$ och $-g$, som antar sina suprema $-m$ i r, ser vi även:

$$f(\hat{r}s) + f(s) = g(\hat{r}s) + g(s)). \tag{4.6}$$

Låt nu $s_i \in S_i$ för $i = 1, ..., 6$ beteckna godtyckliga punkter på respektive storcirklar. Vi definierar sex transformationer $i = 1, ..., 6$ så att transformation i avbildar $s_i \in S_i$ på $-s_i$. Likheterna verifieras genom att använda $\hat{p}(x, y, z) = (x, -z, y)$ och $\hat{r}(x, y, z) = (-y, x, z)$ enligt den första raden:

$$\begin{aligned} \hat{p}\hat{p}\hat{r}(x, x, z) = \hat{p}\hat{p}(-x, x, z) = \hat{p}(-x, -z, x) = (-x, -x, -z) &= -s_1 \\ \hat{r}\hat{p}\hat{p}(s_2) &= -s_2 \\ \hat{r}\hat{p}\hat{p}\hat{p}\hat{r}(s_3) &= -s_3 \\ \hat{p}\hat{r}\hat{p}(s_4) &= -s_4 \\ \hat{p}\hat{r}\hat{r}(s_5) &= -s_5 \\ \hat{r}\hat{r}\hat{p}(s_6) &= -s_6 \end{aligned} \tag{4.7}$$

Nu kan de sex likheterna $f(s_i) = g(s_i)$ visas. Vi exemplifierar med $f(s_4) = g(s_4)$. Likheterna nedan följer i ordning ur ekvation 4.6, 4.5 och 4.6 med $s = \hat{r}\hat{p}s_4$, $s = \hat{p}s_4$ respektive $s = s_4$.

$$\begin{aligned} f(\hat{p}\hat{r}\hat{p}s_4) + f(\hat{r}\hat{p}s_4) &= g(\hat{p}\hat{r}\hat{p}s_4) + g(\hat{r}\hat{p}s_4) \quad [1] \\ f(\hat{r}\hat{p}s_4) + f(\hat{p}s_4) &= g(\hat{r}\hat{p}s_4) + g(\hat{p}s_4) \quad [2] \\ f(\hat{p}s_4) + f(s_4) &= g(\hat{p}s_4) + g(s_4) \quad [3] \end{aligned}$$

Den ledvisa summan [1] − [2] + [3] med användande av (4.7) ger:

$$f(-s_4) + f(s_4) = g(-s_4) + g(s_4)$$

Egenskap (ii) i lemma 1 ger den önskade likheten $f(s_4) = g(s_4)$. De övriga fem likheterna visas analogt.[14] □

[14] Att visa $f(s_3) = g(s_3)$ kräver ett motsvarande system av fem ekvationer, där den andra och fjärde subtraheras från summan av de tre övriga.

Bilda $h = f - g$. Eftersom ramfunktionerna utgör ett vektorrum (enligt (i) i lemma 1) är h en ramfunktion. Enligt lemmat ovan är h noll på de sex storcirklarna S_i. Speciellt är $h(p) = h(q) = h(r) = 0$, vilket innebär $w(h) = 0$. Beviset slutförs genom att visa $h \equiv 0$. Detta uppnås genom att med $M' \coloneqq \sup_S h$ och $m' = \inf_S h$ först visa $M' + m' = 0$ och därefter $M' = 0$.

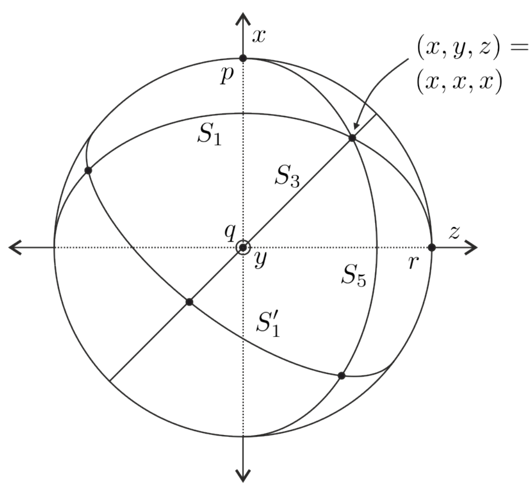
Det finns en ram (p', q', r') så att $h(p') = M'$; $h(r') = m'$, enligt proposition 2 och lemma 1 (iv). Välj q så att ramen är högerorienterad, och låt $h(q') =: \alpha'$. Eftersom $w(h) = 0$ är $M' + m' + \alpha' = 0$. Från lemma 4 följer att α' är maximivärdet av h på storcirkeln ortogonal mot p' (dvs $E_{p'}$).[15] Eftersom S_1 korsar $E_{p'}$ i minst två punkter, och $h(S_1) = 0$, följer $\sup h(E_{p'}) = \alpha' \geq 0$. Av lemma 1 (iii) följer också att α' är *minimivärdet* av h på storcirkeln ortogonal mot r'. Även denna skärs av S_1 i minst två punkter, varför på samma sätt $\alpha' \leq 0$. Det ger oss $\alpha' = 0$ och därmed $M' + m' = 0$.

Låt (x', y', z') vara koordinaterna för $s' \in S$ i basen (p', q', r'), och låt $s'_i \in S'_i$ $(i = 1, ..., 6)$ vara godtyckliga punkter på de sex respektive storcirklarna som definieras av $x' = \pm y'$, $x' = \pm z'$ och $y' = \pm z'$. Enligt lemma 8 kan h i denna bas, på dessa cirklar, skrivas $h(s') = M'x'^2 + \alpha' y'^2 + m' z'^2$. Med insatta värden för α' och M' enligt ovan fås $h(s'_i) = M'(x'^2 - z'^2)$. Detta gäller speciellt på storcirkeln S'_1, där punkterna s'_1 har formen (x', x', z'). Vi har alltså:

$$h(x', x', z') = M'(x'^2 - z'^2) \tag{4.8}$$

Om $M' \neq 0$ är uttrycket ovan noll i exakt fyra punkter. Vi kan därmed visa $M' = 0$ genom att visa att $h(x', x', z')$ har minst fem nollställen. Detta gör vi genom att visa att storcirkeln S'_1 måste skära de sex storcirklarna S_i, där $h = 0$, i sex olika punkter (eller sammanfalla med någon av dem). Vi delar upp möjligheterna i tre olika fall (det allmänna fall 1 illustreras i figur 7), efter följande observation:

Av storcirklarna S_i (där $x = \pm y$, $x = \pm z$, $y = \pm z$) går S_1, S_3, S_5, och inga andra, genom punkterna (x, x, x) och $(-x, -x, -x)$. Märk också att eftersom (x, x, x) och $(-x, -x, -x)$ är *antipoder* (motsatta punkter på sfären) går varje storcirkel antingen genom båda punkterna eller genom ingendera.



Figur 7: I det allmänna fallet skär storcirkeln S'_1 storcirklarna S_1, S_3 och S_5 i sex punkter.

Fall 1: Storcirkeln S'_1 går inte genom punkterna (x, x, x) och $(-x, -x, -x)$. Då skär S'_1 storcirklarna S_1, S_3 och S_5 i sex olika punkter, vilket innebär sex nollställen för $h(x', x', z')$.

Fall 2: S'_1 går genom punkterna (x, x, x) och $(-x, -x, -x)$, vilket innebär två nollställen för h på S'_1. Storcirklarna S_2 och S_4 har de två gemensamma punkterna $(x, -x, -x)$ och $(-x, x, x)$. Antag att S'_1 *inte* går igenom dessa punkter. Då skär S'_1 cirklarna S_2 och S_4 i *fyra* punkter. Eftersom de första två nollställena inte ligger på S_2 eller S_4 innebär detta totalt sex nollställen för h på S'_1.

[15]Detta inses som följer: Lemma 4 innebär att $\max h(s)$ på $E_{p'}$ antas för det s då $h(\hat{p}'s)$ är som minst. Eftersom $q' \in E_{p'}$ och $h(\hat{p}'q') = h(r') = \inf_S h$ följer att $\max h$ på $E_{p'}$ är $h(q') =: \alpha'$.

Fall 3: S_1' går genom de fyra punkterna (x,x,x), $(-x,-x,-x)$, $(x,-x,-x)$ och $(-x,x,x)$. Det finns emellertid endast en storcirkel som går genom dessa fyra punkter. Genom att betrakta koordinaterna ser vi att denna cirkel skrivs $y = z$ i (p,q,r)-systemet. Cirkeln S_1' sammanfaller alltså med S_5, på vilken vi vet att h är identiskt noll. Satsen är bevisad.

4.5 Gleasons sats för Hilbertrum av högre dimensioner

Vi ska nu motivera att det räcker att visa Gleasons sats för $\mathbb{R}^3$ för att den skall gälla för alla Hilbertrum av dimension minst tre. Vi kallar detta för en reduktion till $\mathbb{R}^3$ och den kommer att utföras i fyra steg:

Steg 1: Definition av Hilbertrum och viktiga egenskaper för ramfunktioner på Hilbertrum.
Steg 2: Regularitet för ramfunktioner på tvådimensionella komplexa Hilbertrum.
Steg 3: Regularitet för ramfunktioner på Hilbertrum av dimension minst 3.
Steg 4: Övergång från $\mathbb{R}^3$ till godtyckligt Hilbertrum av dimension minst 3.

Vi har valt att följa bevisgången som Gleason använder i sitt originalbevis [6]. Detta eftersom Gleasons bevisning direkt är kopplad till ramfunktioner.

Steg 1:

Definition 4. *Ett linjärt vektorrum V över en kropp $\mathbb{D}$ kallas för ett Hilbertrum om det är fullständigt och det finns en linjär inre produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \mapsto \mathbb{D}$ som för alla $x, y, z \in V$ uppfyller*

(i) $\langle \alpha x, \beta y \rangle = \alpha \overline{\beta} \langle x, y \rangle$

(ii) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$
$\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$

(iii) $\langle x, x \rangle \geq 0$ *och* $\langle x, x \rangle = 0$ *omm* $x = 0$

(iv) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$

där $\overline{\beta}$ och $\overline{\langle y, x \rangle}$ står för komplexkonjugatet av β respektive $\langle y, x \rangle$ i de fall då $\mathbb{D} = \mathbb{C}$. Vi säger att Hilbertrummet är reellt om $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ och komplext om $\mathbb{D} = \mathbb{C}$.

Definition 5. *Om $\mathscr{K}$ är ett reellt linjärt underrum till ett komplext Hilbertrum $\mathscr{H}$, då säger vi att $\mathscr{K}$ är fullständigt reellt om den inre produkten enbart antar reella värden på $\mathscr{K} \times \mathscr{K}$.*

Om $\mathscr{K}$ i definition 5 dessutom är slutet så är det även ett reellt Hilbertrum med avseende på samma inre produkt eftersom slutenheten medför fullständighet med den inducerade normen. Notera att varje ändligt dimensionellt underrum till ett Hilbertrum är slutet. Vidare gäller det att restriktionen av en ramfunktion f till $\mathscr{K}$ också är en ramfunktion $f|_{\mathscr{K}}$ (om än med annan vikt) eftersom en ortonormal bas för $\mathscr{K}$ kan utvidgas till en bas för hela $\mathscr{H}$.

Lemma 9. *Låt $\mathscr{H}$ vara ett reellt Hilbertrum. Om f är en begränsad reguljär ramfunktion så gäller att*

$$|f(x) - f(y)| \leq 2M\|x - y\|, \quad \forall x, y \in \mathscr{H}$$

Bevis. Eftersom f är begränsad och reguljär enligt antagande så finns det en reell positiv konstant $M < \infty$ sådan att $\sup |f(x)| = \sup |\langle x, Tx \rangle| \leq M$ för någon begränsad symmetrisk linjär operator T. För T gäller det att $\|T\| = \sup \|Tx\| \leq M$ för alla $x \in \mathscr{H}$ med $\|x\| = 1$.

Tag nu två enhetsvektorer x, y i $\mathscr{H}$. Då kan vi använda att den inre produkten i ett reellt Hilbertrum är symmetrisk tillsammans med att operatorn T är symmetrisk så att $\langle y, Tx \rangle = \langle x, Ty \rangle$ och vi får att

$$\langle x + y, T(x - y) \rangle = \langle x, Tx \rangle - \langle x, Ty \rangle + \langle y, Tx \rangle - \langle y, Ty \rangle = f(x) - f(y).$$

Med detta resultat och upprepad användning av Cauchy-Schwartz olikhet fås att

$$|f(x) - f(y)| = |\langle x + y, T(x - y) \rangle| \leq \|T\| \|x + y\| \|x - y\| \leq 2M\|x - y\|$$

för några enhetsvektorer $x, y \in \mathscr{H}$. □

Följande lemma ger en egenskap hos reguljära ramfunktioner som kommer att vara mycket användbar i bevisningen framöver.

Lemma 10. *Antag att f är en reguljär ramfunktion för ett reellt eller komplext Hilbertrum $\mathscr{H}$ och låt λ vara en komplex eller reell skalär med $|\lambda| = 1$. Då är $f(\lambda x) = f(x)$.*

Bevis. Lemmat följer direkt ur egenskaperna för inre produkter på reella och komplexa Hilbertrum och det faktum att f är reguljär. Detaljerna lämnas åt läsaren. $\square$

Steg 2:

Lemma 11. *Låt f vara en begränsad ramfunktion på ett tvådimensionellt komplext Hilbertrum $\mathscr{H}$ och antag att restriktionen av f till varje fullständigt reellt underrum till $\mathscr{H}$ är reguljär. Då är f reguljär på hela $\mathscr{H}$.*

Bevis. Börja med att definiera $M \coloneqq \sup f(v),\ v \in \mathscr{H}$. Eftersom enhetssfären utgör en kompakt mängd av enhetsvektorer finns det enligt Bolzano-Weierstrass sats en konvergent delföljd av enhetsvektorer x_n som kan arrangeras så att $x_n \to x$ och $f(x_n) \to M$ då $n \to \infty$.

Konstruera nu $\lambda_n = \frac{\langle x, x_n\rangle}{|\langle x, x_n\rangle|}$ sådan att λ_n är en komplex skalär med $|\lambda_n| = 1$. Då har vi att $\lambda_n \to 1$ när $n \to \infty$ så att $\lambda_n x_n \to x$. Vidare är det lätt att kontrollera att $\lambda_n x_n$ också är en enhetsvektor i $\mathscr{H}$ och att den inre produkten $\langle \lambda_n x_n, x\rangle$ är reell eftersom

$$\langle \lambda_n x_n, x\rangle = \lambda_n \langle x_n, x\rangle = \frac{\langle x, x_n\rangle}{|\langle x, x_n\rangle|} \langle x_n, x\rangle = \frac{\langle x, x_n\rangle \overline{\langle x, x_n\rangle}}{|\langle x, x_n\rangle|} \in \mathbb{R}.$$

Enligt definition 5 medför detta att $\lambda_n x_n$ och x spänner ett fullständigt reellt underrum $\mathscr{K}_n$ till $\mathscr{H}$ för varje n. Enligt antagandet i lemmat vet vi därför att f är reguljär på alla $\mathscr{K}_n$. Vidare kan vi också definiera $M_n \coloneqq \sup|f(v)|,\ v \in \mathscr{K}_n$ för någon positiv reell konstant $M_n < \infty$ i $\mathscr{K}_n$ eftersom f är begränsad.

Nu kan vi med hjälp av triangelolikheten samt lemma 9 och 10 skriva

$$|f(x) - M| = |(f(x) - f(\lambda_n x_n)) + (f(\lambda_n x_n) - M)| \leq$$

$$\leq |f(x) - f(\lambda_n x_n)| + |f(x_n) - M| \leq 2M_n\|x - \lambda_n x_n\| + |f(x_n) - M| \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

från vilket vi ser att $f(x) = M$ eftersom $2M_n\|x - \lambda_n x_n\| + |f(x_n) - M| \to 0$ då $n \to \infty$.

Vi fortsätter genom att definiera en hjälpfunktion F på $\mathscr{H}$ enligt

$$F(v) = \begin{cases} \|v\|^2 f(\frac{v}{\|v\|}) & \text{om } v \neq 0,\ v \in \mathscr{H} \\ F(0) = 0 \end{cases}$$

som är en kvadratisk form på varje fullständigt reellt underrum till $\mathscr{H}$ på grund av regularitetsegenskapen hos f på dessa. Genom att återigen använda lemma 10 inses också att F har egenskapen att $F(\lambda v) = |\lambda|^2 F(v)$ för alla vektorer $v \in \mathscr{H}$ och skalärer λ (låt $\mu = \lambda/|\lambda|$ så att $|\mu| = 1$). Vi ska nu visa att F är en kvadratisk form på hela $\mathscr{H}$.

Låt W vara vikten av f i $\mathscr{H}$ och låt y vara en enhetsvektor i $\mathscr{H}$ som är ortogonal mot enhetsvektorn x sådan att $f(x) = M$. Eftersom x och y utgör en ram i $\mathscr{H}$ och $\dim(\mathscr{H}) = 2$ gäller att $F(y) = f(y) = W - f(x) = W - M$. Det gäller också att x, y spänner ett fullständigt reellt underrum till $\mathscr{H}$ så vi vet att F är en kvadratisk form på (x, y)-underrummet. Dessutom vet vi att F antar sitt största värde på enhetscirkeln i x eftersom vi arrangerat det så att f antar sitt maximum där. Detta ger oss att F representeras av en diagonalmatris i xy-basen så att

$$F(v) = F(\alpha x + \beta y) = \alpha^2 F(x) + \beta^2 F(y) = \alpha^2 M + \beta(W - M)$$

för alla vektorer v i (x, y)-underrummet eftersom varje v där kan skrivas som en linjärkombination av x och y med reella koefficienter α, β.

Vi ska nu visa att utvidgningen av detta resultat till hela $\mathscr{H}$ är sann. Börja med att notera att varje vektor i $\mathscr{H}$ kan skrivas som en linjärkombination av samma enhetsvektorer x och y men med komplexa koefficienter, det vill säga $v \in \mathscr{H} \to v = \lambda x + \mu y,\ \lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Vidare kan vi konstruera en vektor $y' = \frac{\mu|\lambda|}{|\mu|\lambda} y$. Det är lätt att kontrollera att $\|y'\| = 1$ och $\langle y', x\rangle = 0$, således är även y' en enhetsvektor ortogonal mot x. Eftersom $F(\lambda v) = |\lambda|^2 F(v)$ och $\left|\frac{|\lambda|}{\lambda}\right|^2 = 1$ för alla skalärer λ kan vi skriva

$$F(v) = \left|\frac{|\lambda|}{\lambda}\right|^2 F(\lambda x + \mu y) = F\left(\frac{|\lambda|}{\lambda}(\lambda x + \mu y)\right) = F(|\lambda|x + |\mu|y') = |\lambda|^2 M + |\mu|^2 (W - M)$$

där vi i den sista likheten använt att $F(y')$ måste vara lika med $F(y)$ eftersom vikten för f är konstant för alla ramar i $\mathscr{H}$.

Detta visar att F är en kvadratisk form för alla vektorer $v \in \mathscr{H}$ och således kan skrivas som $F(v) = \langle v, Tv \rangle$ där T är en hermitesk linjär operator som relativt xy-basen representeras av diagonalmatrisen

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & W - M \end{bmatrix}.$$

Till sist använder vi att $F(x) = f(x)$ för alla enhetsvektorer $x \in \mathscr{H}$ så att $f(x) = \langle x, Tx \rangle$ vilket visar att f är reguljär på hela $\mathscr{H}$. $\square$

Steg 3:

Lemma 12. *Antag att f är en begränsad ramfunktion för ett reellt eller komplext Hilbertrum $\mathscr{H}$ och antag att restriktionen av f till varje tvådimensionellt underrum till $\mathscr{H}$ är reguljär. Då är f reguljär på $\mathscr{H}$.*

Bevis. I detta bevis används en metod som täcker både det reella och komplexa fallet samtidigt. På alla ställen där komplexkonjugat förekommer fås det reella fallet automatiskt i och med att komplexkonjugatet av ett reellt tal är talet självt. Samma gäller för fallen där realdelen används.

Börja med att definiera en hjälpfunktion F på samma sätt som i föregående lemma:

$$F(v) = \begin{cases} \|v\|^2 f\left(\frac{v}{\|v\|}\right) & \text{om } v \neq 0,\ v \in \mathscr{H} \\ 0 \ \text{ om } v = 0 \end{cases}$$

Enligt antagande är f reguljär på varje tvådimensionellt underrum till $\mathscr{H}$ så att restriktionen av F till dessa är en kvadratisk form. En kvadratisk form är i sig restriktionen av en symmetrisk bilinjär eller hermitesk form $B(x, y)$ till $B(x, x)$ i det reella respektive komplexa fallet. Alltså finns det en symmetrisk bilinjär eller hermitesk form A_π på varje tvådimensionellt underrum π till $\mathscr{H}$ sådan att

$$F(x) = A_\pi(x, x) \ \text{ för alla } x \in \pi.$$

För varje par av vektorer i $x, y \in \mathscr{H}$ där $y \neq \lambda x$ för någon skalär λ så finns det ett tvådimensionellt underrum till $\mathscr{H}$ som innehåller både x och y. Om däremot $y = \lambda x$ så är $A_\pi(x, y) = A_\pi(x, \lambda x) = \overline{\lambda} A_\pi(x, x) = \overline{\lambda} F(x)$ vilket är oberoende av valet av underrum. Detta gör att vi kan definiera en form A enligt

$$A(x, y) = A_\pi(x, y) \text{ om } x \in \pi,\ y \in \pi$$

som är definierad på hela $\mathscr{H} \times \mathscr{H}$.

Vi vill nu visa att formen A är en symmetrisk bilinjär eller hermitesk form på $\mathscr{H} \times \mathscr{H}$ för att sedan kunna använda en liknande metod som i föregående lemma för att visa att detta implicerar att f är reguljär på hela $\mathscr{H}$.

Som noterades ovan tillhör varje par av vektorer i $\mathscr{H}$ antingen ett tvådimensionellt eller endimensionellt underrum där det senare fallet innebar att $A_\pi(x, y) = \overline{\lambda} F(x)$ oberoende av valet av underrum. Således kan vi använda egenskaperna för formerna A_π för att härleda följande egenskaper för formen A för alla vektorer $x, y \in \mathscr{H}$ och skalärer $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ eller $\mathbb{R}$:

(1) $A(\alpha x, \beta y) = \alpha \overline{\beta} A(x, y)$

(2) $A(x, y) = \overline{A(y, x)}$

(3) $4 \operatorname{Re} A(x, y) = F(x + y) - F(x - y)$

(4) $2F(x) + 2F(y) = F(x + y) + F(x - y)$

Genom att byta ut x och y mot ix och iy i (3), fås även

(3') $4\operatorname{Im} A(x,y) = F(ix+iy) - F(ix-iy)$

Användning av (3) och (4) ger nu

$$\begin{aligned} 8\operatorname{Re} A(x,y) + 8\operatorname{Re} A(x,y) &= 2F(x+z) - 2F(x-z) + 2F(y+z) - 2F(y-z) \\ &= F(x+y+2z) + F(x-y) - F(x+y-2z) - F(x-y) \\ &= 4\operatorname{Re} A(x+y, 2z) = 8\operatorname{Re} A(x+y,z) \end{aligned}$$

varav vi ser att

$$\operatorname{Re} A(x,z) + \operatorname{Re} A(y,z) = \operatorname{Re} A(x+y,z). \tag{4.9}$$

Och på samma sätt men med $(3')$ och (4) fås att

$$\operatorname{Im} A(x,z) + \operatorname{Im} A(y,z) = \operatorname{Im} A(x+y,z). \tag{4.10}$$

Addition av ekvation (4.9) och (4.10) ger då

$$A(x,z) + A(y,z) = A(x+y,z) \tag{4.11}$$

och ekvation (4.11) tillsammans egenskap (1) och (2) visar att A är en symmetrisk bilinjär eller hermitesk form på hela $\mathscr{H} \times \mathscr{H}$.

Eftersom $\mathscr{H}$ i detta lemma kan vara oändligdimensionellt måste vi även visa att A är begränsad för att det skall finnas en symmetrisk eller Hermitesk linjär operator T så att $A = \langle x, Ty \rangle$. Att visa att A är begränsad är detsamma som att visa att det finns en konstant $C < \infty$ sådan att $|A(x,y)| \leq C\|x\|\|y\|$ för alla $x, y \in \mathscr{H}$.

Inledningsvis noterar vi att $|\lambda| C\|x\|\|y\| = C\|x\|\|y\|$ om $|\lambda| = 1$. Således kan ett smart val av λ göras så att $A(\lambda x, y) \in \mathbb{R}$ och

$$\begin{aligned} 4|A(x,y)| = 4|\lambda||A(x,y)| = 4ReA(\lambda x, y) = F(\lambda x + y) - F(\lambda x - y) \\ = \|\lambda x + y\|^2 f\left(\frac{\lambda x + y}{|\lambda x + y|}\right) - \|\lambda x - y\|^2 f\left(\frac{\lambda x - y}{|\lambda x - y|}\right) \leq M(\|\lambda x + y\|^2 - \|\lambda x - y\|^2) \\ = 2M(\langle \lambda x, y \rangle + \langle y, \lambda x \rangle) \leq 4M\|\lambda x\|\|y\| = 4M\|x\|\|y\| \end{aligned}$$

där vi använt att f är begränsad och att $M \coloneqq \sup f(x)$. Alltså är A begränsad och enligt Riesz representationssats för Hilbertrum finns det då en begränsad hermitesk eller symmetrisk operator T så att representationen av A i $\mathscr{H}$ är $A(x,y) = \langle x, Ty \rangle$ med avseende på den inre produkten i $\mathscr{H}$.

På samma sätt som i föregående lemma får vi nu att $f(x) = F(x) = A(x,x) = \langle x, Tx \rangle$ för alla enhetsvektorer i $\mathscr{H}$. Och därmed har vi visat att f är reguljär på hela $\mathscr{H}$. ☐

Steg 4:

Sats 5 (Gleasons sats)**.** *Varje begränsad ramfunktion på ett reellt eller komplext Hilbertrum med* $\dim(\mathscr{H}) \geq 3$ *är reguljär.*

Bevis. Gleasons sats för $\mathbb{R}^3$ formulerades formellt i avsnitt 4.1 och i kort säger den att varje begränsad ramfunktion i $\mathbb{R}^3$ är reguljär. Detta är all information vi behöver för vårt rådande bevis.

Vi påminner oss om att en ramfunktion för ett Hilbertrum blir en ramfunktion genom restriktion till ett fullständigt reellt underrum. Vidare gäller det att varje tvådimensionellt fullständigt reellt underrum till ett Hilbertrum $\mathscr{H}$ med $\dim(\mathscr{H}) \geq 3$ kan bäddas in i ett fullständigt reellt tredimensionellt underrum, låt oss kalla det $\mathscr{K}$.

Denna egenskap är mycket användbar eftersom $\mathscr{K}$ är isomorft med $\mathbb{R}^3$ (observera att $\mathbb{R}^3$ också utgör ett Hilbertrum tillsammans med en väldefinierad inre produkt). Det vill säga, det finns en bijektiv linjär avbildning $\phi : \mathscr{K} \mapsto \mathbb{R}^3$ sådan att den inre produkten bevaras: $\langle x, y \rangle = \langle \phi(x), \phi(y) \rangle$ för alla $x, y \in \mathscr{K}$. Alltså gäller Gleasons sats för $\mathbb{R}^3$ även i $\mathscr{K}$ och eftersom varje tvådimensionellt fullständigt reellt underrum till $\mathscr{H}$ kan bäddas in i $\mathscr{K}$

samt tack vare restriktionsegenskapen för ramfunktioner så visar detta att varje begränsad ramfunktion f är reguljär på varje tvådimensionellt fullständigt reellt underrum till $\mathscr{H}$.

Nu kan vi använda lemma 11 på varje tvådimensionellt komplext underrum till $\mathscr{H}$ vilket visar att varje f enligt ovan är reguljär på alla tvådimensionella underrum till $\mathscr{H}$. Detta medför att dessa ramfunktioner f även uppfyller hypotesen i lemma 12 vilket visar att varje begränsad ramfunktion på $\mathscr{H}$ är reguljär. □

4.6 Gleasons sats i $\mathbb{R}$ och $\mathbb{R}^2$

Som tidigare nämnts är Gleasons sats trivialt sann i $\mathbb{R}$, men falsk i $\mathbb{R}^2$. För fallet $\mathbb{R}$ noterar vi att $S^0 = \{-1, 1\}$, och tack vare (ii) i lemma 1 gäller att $f(1) = f(-1)$. Vi kan alltså skriva $f(x) = \langle x, f(1)x\rangle = f(1)x^2$ för $x \in \{-1, 1\}$.

För att visa att Gleasons sats inte gäller i R^2 studerar vi funktionerna $\{\cos n\theta\}$ för $n \in \mathbb{Z}^+$. Notera först att alla vektorer $x \in \mathbb{R}^2$ med norm 1 kan skrivas som funktion av vinkeln θ från någon av koordinataxlarna, vilket gör att vi kan skriva

$$f(x) = f(\cos\theta, \sin\theta), \theta \in [0, 2\pi),$$

för alla ramfunktioner $f : S^1 \to \mathbb{R}$. Vi kan även skriva alla par av ortonormala vektorer i $\mathbb{R}^2$ som $\{(\cos\theta, \sin\theta),(\cos(\theta + \pi/2), \sin(\theta + \pi/2))\}$ för något $\theta \in [0, 2\pi)$. Låt oss nu studera funktionerna på formen

$$f(\cos\theta, \sin\theta) = \cos n\theta =: h(\theta), \theta \in [0, 2\pi), n \in \mathbb{Z}^+.$$

För att h ska vara en ramfunktion måste vi ha att

$$h(\theta) + h(\theta + \pi/2) = c, \quad \forall\theta \in [0, 2\pi),$$

eller ekvivalent formulerat att

$$\cos n\theta + \cos\left(n\theta + \frac{n\pi}{2}\right) = c, \quad \forall\theta \in [0, 2\pi).$$

Med hjäp av trigonometriska identiteter får vi att

$$\cos n\theta + \cos n\theta \cos\frac{n\pi}{2} - \sin n\theta \sin\frac{n\pi}{2} = c, \quad \forall\theta \in [0, 2\pi).$$

För att förenkla denna ekvation tar vi n sådant att $\cos\frac{n\pi}{2} = -1$, det vill säga sådant att $\frac{n\pi}{2} = (2k + 1)\pi \Leftrightarrow n = 2(2k + 1)$ för $k \in \mathbb{Z}^+$. Genom detta val av n och förenklingar får vi nu att

$$h(\theta) + h(\theta + \pi/2) = 0,$$

för alla $\theta \in [0, 2\pi)$, det vill säga h är en ramfunktion för dessa n med vikt noll. Vi vill alltså studera

$$h(\theta) = \cos\Big(2\theta(2k + 1)\Big), k \in \mathbb{Z}^+.$$

Antag nu att vi kan skriva

$$h(\theta) = \langle u, Au\rangle, \quad \forall\theta \in [0, 2\pi),$$

för någon symmetrisk matris $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ och där $u = (\cos\theta, \sin\theta)^T$. Detta ger att

$$\cos\Big(2\theta(2k + 1)\Big) = \langle u, Au\rangle = \frac{1}{2}(a_{11} + a_{22}) + (a_{11} - a_{22})\frac{\cos 2\theta}{2} + a_{12}\sin 2\theta,$$

måste gälla för alla $\theta \in [0, 2\pi)$ och vi vill nu välja a_{11}, a_{12} och a_{22} sådant att det gäller. Genom att låta θ anta värdena $\{0, \pi/4, \pi/2\}$ får vi att $a_{11} = 1, a_{12} = 0$ och $a_{22} = -1$. Detta ger då

$$\langle u, Au\rangle = \cos 2\theta = \cos 2\theta(2k + 1),$$

men detta gäller endast för $k = 0$. Vi kan alltså dra slutsatsen att

$$\nexists A \in \mathbb{R}^{2\times 2} : f(u) = \langle u, Au\rangle, \quad \forall k \neq 0,$$

och vi kan därmed också dra slutsatsen att Gleasons sats inte gäller i två dimensioner.

Referenser

[1] J. S. Bell. On the Problem of Hidden Variables in Quantum Mechanics. Reviews of Moderns Physics 38(3), 447-452. 1966.

[2] R. Cooke, M. Keane, and W. Moran. An elementary proof of Gleason's theorem. Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., 98(1), 117-128, 1985.

[3] A. Dvurecenskij. Gleason's Theorem and Its Applications (Kluwer Academic Pub1ishers, 1994).

[4] K. Engesser, D. Gabbay, D. Lehmann, editors. Handbook of Quantum Logic and Quantum Structures (Elsevier Science, 2007).

[5] M. Entov, L. Polterovich, and F. Zapolsky. An 'Anti-Gleason' Phenomenon and Simultaneous Measurements in Classical Mechanics. Foundation of Physics 37(8), 1306-1316, 2007.

[6] A. M. Gleason. Measures on the closed subspaces of a Hilbert space. Journal of Mathematics and Mechanics 6(6), 885-893, 1957.

[7] G. W. Mackey. Mathematical Foundations of Quantum Mechanics (Addison-Wesley, 1963).

[8] J. von Neumann. Mathematical Foundations of Quantum Mechanics (Princeton University Press, 1955).

[9] C. Claud, P. Hertling and K. Svozil. Kochen-Specker theorem: two geometric proofs. Tatra Mt. Math. Publ. 15 (1998), 133–142. (Princeton University Press, 1955).

[10] E. Cech. On Bicompact Spaces. The Annals of Mathematics, 38(4), 823-844, 1937.

A Övriga bevis och beräkningar

A.1 Latituder och ramar

Sats 6. *Om (v_1, v_2, v_3) är en ram i N_p, för given $p \in S$, så gäller*

$$\sum_{i=1}^{3} l(v_i) = 1.$$

Vidare, om $l_1, l_2, l_3 \in [0,1]$ sådana att $\sum_{i=1}^{3} l_i = 1$ så finns det en ram (v_1, v_2, v_3) i N_p sådan att $l(v_i) = l_i, i = 1, 2, 3$.

Bevis. Låt $p \in S$ vara godtycklig. Antag att (v_1, v_2, v_3) är en ram. Den utgör då en ortogonalbas i $\mathbb{R}^3$, och vi kan skriva

$$p = \sum_{i=1}^{3} \langle v_i, p \rangle v_i.$$

Då $\|p\| = \|v_1\| = \|v_2\| = \|v_3\| = 1$ får vi med hjälp av Pythagoras sats

$$1 = \|p\|^2 = \left\| \sum_{i=1}^{3} \langle v_i, p \rangle v_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{3} |\langle v_i, p \rangle|^2 \|v_i\|^2 = \sum_{i=1}^{3} \langle v_i, p \rangle^2.$$

Per definition gäller $\langle v_i, p \rangle^2 = l(v_i)$, så att

$$\sum_{i=1}^{3} l(v_i) = 1.$$

För andra delen av satsen, antag att $l_1, l_2, l_3 \in [0,1]$ är valda sådana att $\sum_{i=1}^{3} l_i = 1$. Om $l_i = 1$ för något $i \in \{1, 2, 3\}$ så kan vi välja $v_1 = p$ och $v_2, v_3 \in E_p$ sådana att $v_2 \perp v_3$, och beviset är klart.
Antag att $l_i \in [0,1), i = 1, 2, 3$. Låt oss först välja godtycklig $v_1 \in N_p$ sådan att $l(v_1) = l_1$. Betrakta vektorn $v_1^\perp$, ortogonal mot v_1, som erhålles genom att rotera v_1 ett kvarts varv mot p. Vi får

$$l(v_1^\perp) = \cos^2 \theta(v_1^\perp, p) = \cos^2(\theta(v_1, p) - \pi/2) = \sin^2 \theta(v_1, p),$$

där $\theta(a, b)$ betecknar den minsta vinkeln mellan a och b. Eftersom $\cos^2 \theta(v_1, p) + \sin^2 \theta(v_1, p) = 1$, får vi

$$l(v_1^\perp) = 1 - \cos^2 \theta(v_1, p) = 1 - l(v_1).$$

Genom att rotera $v_1^\perp$ runt v_1 kan vi alltså nå punkter på alla latituder l sådana att $l \leq 1 - l(v_1)$. Eftersom $l_2 = 1 - l_1 - l_3 \leq 1 - l(v_1)$ kan vi då finna en vektor v_2 sådan att $v_1 \perp v_2$ och $l(v_2) = l_2$. Vi låter nu antingen $v_3 = v_1 \times v_2$ eller $v_3 = -v_1 \times v_2$; valet görs så att $v_3 \in N_p$. Eftersom (v_1, v_2, v_3) är en ram ger då första delen av beviset att

$$\sum_{i=1}^{3} l(v_i) = 1.$$

Vi får då

$$l(v_3) = 1 - l(v_1) - l(v_2) = 1 - l_1 - l_2 = l_3.$$

□

Lemma 13. *För givet $p \in S$ och varje $s \in N_p \setminus p$ finns det en unik vektor $s^\perp \in N_p$ som är den nordligaste (med maximal latitud l) vektorn på N_p som också är ortogonal mot s.*

Bevis. Låt $v_1 := s, v_2 := s^\perp, v_3 := \pm v_1 \times v_2$ så att (v_1, v_2, v_3) är en ram på N_p.

Eftersom $l(v_1) + l(v_2) + l(v_3) = 1$ och v_1 är fix, innebär ett maximerande av $l(v_2)$ ett minimerande av $l(v_3)$, som antar det minsta värdet 0 på E_p. Storcirklarna $\{p^\perp\} = E_p$ och $\{s^\perp\}$ skär varandra i två punkter; till någon av dessa behöver vi alltså välja v_3.

$v_3 \perp p$ (ty $v_3 \in E_p$), $v_3 \perp v_1$ och $v_3 \perp v_2$ begränsar v_2 till att ligga i samma plan som p och v_1. Att $v_2 \perp v_1$ innebär endast två möjligheter för $v_2 \in S$, och endast en av dessa ligger på N_p.

$v_2 = s^\perp$ fås alltså genom att vrida v_1 $90°$ mot p. □

A.2 Pirons geometriska lemma (alternativt bevis)

Lemma 14 (Pirons geometriska lemma). *Låt $s, t \in N_p \setminus \{p, E_p\}$ så att $l(s) > l(t)$. Då går det att nå t från s genom en ändlig följd $(s_i)_{i=0}^n$ där varje $s_i \in D_{s_{i-1}}$ för $1 \leq i \leq n$.*

Bevis. I detta bevis har vi även följt idéerna från Claude, Hertling och Svozil [9].

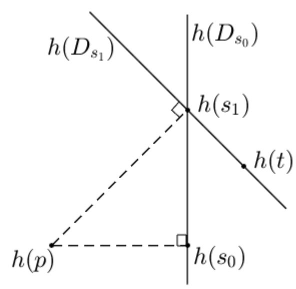
Studera tangentplanet H som går genom p. Låt $h(q)$ vara skärningen av linjen som går genom origo och punkten $q \in N_p$ med planet H. Då är h en bijektiv avbildning, $h : N_p \mapsto H$ så det räcker att visa lemmat för avbildningarna $h(s)$ och $h(t)$.

Det gäller att nordpolen avbildas på sig själv så att $h(p) = p$. Om q är en punkt på N_p så är avbildingen av alla punkter med samma latitud som q en cirkel $h(l(q))$ centrerad i p. Sluttningen D_q till samma punkt avbildas som en linje $h(D_q)$ som går genom $h(q)$ och är tangent till $h(l(q))$. Avbildingarna av s, t på H är alltså punkter $h(s)$, $h(t)$, och vi vill visa att det går att komma till $h(t)$ från $h(s)$ genom en följd $(h(s_i))_{i=0}^n$ där $h(s_i) \in h(D_{s_{i-1}})$, $1 \leq i \leq n$.

Låt $h(s) = h(s_0)$. Då delar $h(D_{s_0})$ H i två halvplan och vi får två olika fall beroende på om $h(t)$ ligger i halvplanet som innehåller p eller inte.

Fall 1:

Antag att $h(t)$ ligger i halvplanet begränsat av $h(D_{s_0})$ som inte innehåller p. Då går det att nå $h(t)$ i två steg enligt figur (8).



Figur 8: Illustration av att om $h(t)$ ligger i halvplanet av H som inte innehåller p, kan man nå $h(t)$ från $h(s_0)$ i två steg genom att välja $h(s_1)$ på $h(Ds_0)$ smart

Fall 2:

Att visa det andra fallet då $h(t)$ ligger i halvplanet som innehåller p kräver däremot lite mer arbete. Låt ϕ vara vinkeln i planet mellan $h(s)$ och $h(t)$. Vi kan vandra runt norra halvklotet från $h(s)$ till en punkt på linjen som går genom p och $h(t)$ i m steg genom att välja en följd av punkter $h(s_i) \in h(D_{s_{i-1}})$ sådana att vinkeln mellan $h(s_i)$ och $h(s_{i-1})$ är ϕ/m.

Låt d_i beteckna avståndet mellan p och $h(s_i)$ så att d_0 och d_m är avstånden mellan p och $h(s_0)$ respektive $h(s_m)$. Vi vill visa att $d_m \to d_0$ då $m \to \infty$ eftersom det innebär att $h(t)$ ligger i halvplanet begränsat av $h(D_{s_m})$ som inte innehåller p för stora m. Det vill säga, vi har återfått det första fallet och lemmat är visat.

För varje i gäller det att

$$d_i = d_{i+1} \cos(\phi/m)$$

så att

$$d_0 = d_1 \cos(\phi/m) = d_2 \cos(\phi/m)^2 = \ldots = d_m \cos^m(\phi/m)$$

$$\frac{d_0}{d_m} = \cos^m(\phi/m)$$

Vi vill alltså visa att $d_0/d_m \to 1$, $m \to \infty$ vilket följer av att $\cos(\phi/m)^m \to 1$, $m \to \infty$. Vi visar det sista påståendet genom att visa att $\log(\cos(\phi/m)^m) \to 0$, $m \to \infty$. För stora m kommer ϕ/m att vara litet så vi kan använda oss av att $\cos(x) = 1 - x^2/2 + \mathcal{O}(x^4)$ och $\log(1 + x) = x + \mathcal{O}(x^2)$ för små x. Låt $x = \phi/m$. Då får vi att

$$\log(\cos^m(\phi/m)) = m\log(1-\phi^2/2m^2+\mathcal{O}(m^{-4})) =$$
$$m(-\phi^2/2m^2+\mathcal{O}(m^{-4})) = -\phi^2/2m+\mathcal{O}(m^{-3}).$$

Och

$$\lim_{m\to\infty} -\phi^2/2m+\mathcal{O}(m^{-3}) = 0.$$

□

A.3 Kvadratiska former på enhetssfären

Sats 7. *Låt $f : S^2 \to \mathbb{R}$ vara en ramfunktion med vikten $w(f)$ på formen*

$$f(x) = \langle x, Ax\rangle$$

där $A \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ är en hermitesk matris. Då kan f skrivas på formen

$$f(y) = f(y_1, y_2, y_3) = My_1^2 + \alpha y_2^2 + my_3^2$$

där vi betecknar

$$M := \sup_{x\in S^3} f(x)$$
$$m := \sup_{x\in S^3} f(x)$$
$$\alpha := w(f) - M - m.$$

och $y = (y_1, y_2, y_3) \in S^3$.

Bevis. Det finns enligt spektralsatsen, eftersom A är en hermitesk matris, en ortonormal bas för $\mathbb{C}^3$ av egenvektorer $\{v_i\}_{i=1}^3$ till A och alla egenvärden $\{\lambda_i\}_{i=1}^3$ till A är reella. Vi kan utan inskränkning anta att $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$. Låt nu matrisen Q ha v_1, v_2 och v_3 som kolonner ordnade i den ordningen, med basbytet $x = Qy \iff y = Q^{-1}x = Q^Tx$ kan matrisen A skrivas som

$$A = QDQ^T \iff Q^TAQ = D$$

där $D \in \mathbb{R}^3$ är diagonalmatrisen med egenvärdena till A på diagonalen. Notera först att

$$||x||^2 = ||\sum_{i=1}^3 \langle x, v_i\rangle\, v_i||^2 = \sum_{i=1}^3 ||\langle x, v_i\rangle\, v_i||^2 = \sum_{i=1}^3 |\langle x, v_i\rangle|^2||v_i||^2 =$$
$$= \sum_{i=1}^3 \left(v_i^Tx\right)^2,$$

där vi använt Pythagoras sats och att $||v_i|| = 1$ för $i = 1, 2, 3$. Vi har nu att

$$\langle x, Ax\rangle = x^TAx = x^TQDQ^Tx = \left(Q^Tx\right)^TD\left(Q^Tx\right) =$$
$$= \sum_{i=1}^3 \lambda_i\left(v_i^Tx\right)^2 \leq \lambda_1\sum_{i=1}^3 \left(v_i^Tx\right)^2 = \lambda_1||x||^2.$$

På samma vis får vi att

$$\langle x, Ax\rangle = x^TAx = x^TQDQ^Tx = \left(Q^Tx\right)^TD\left(Q^Tx\right) =$$
$$= \sum_{i=1}^3 \lambda_i\left(v_i^Tx\right)^2 \geq \lambda_3\sum_{i=1}^3 \left(v_i^Tx\right)^2 = \lambda_3||x||^2.$$

Tillsammans har vi alltså att

$$\lambda_3||x||^2 \leq \langle x, Ax\rangle \leq \lambda_1||x||^2.$$

Eftersom f är kontinuerlig på enhetssfären antar f sitt supremum och infimum där. Vi begränsar nu definitionsmängden till enhetssfären och vi får då olikheterna

$$\lambda_3 \leq \langle x, Ax \rangle \leq \lambda_1, \quad \forall x : ||x|| = 1$$

Betrakta nu funktionsvärdena av f i v_1

$$f(v_1) = v_1^T A v_1 = \lambda_1$$

och i v_3

$$f(v_3) = v_3^T A v_3 = \lambda_3,$$

eftersom dessa även är övre och undre begränsning för f måste alltså $\lambda_1 = \max_{x \in S^3} f(x) = M$ och $\lambda_3 = \min_{x \in S^3} f(x) = m$. Den sista likheten i satsen visas genom att notera att (v_1, v_2, v_3) utgör en ram vilket ger, eftersom f är en ramfunktion, att

$$f(v_1) + f(v_2) + f(v_3) = w(f) \iff M + \lambda_2 + m = w(f)$$
$$\Rightarrow \lambda_2 = w(f) - M - m = \alpha.$$

Till sist har vi att

$$\langle x, Ax \rangle = x^T A x = \big(Qy\big)^T A(Qy) = y^T Q^T A Q y = y^T D y = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i y_i^2$$
$$\Rightarrow f(y_1, y_2, y_3) = M y_1^2 + \alpha y_2^2 + m y_3^2,$$

där y_1, y_2, y_3 är koordinaterna för x i egenbasen till A. Slutligen noterar vi att

$$||y||^2 = ||Q^T x||^2 = \big(Q^T x\big)^T Q^T x = x^T Q Q^T x = ||x||^2,$$

detta visar att $x \in S^3 \Rightarrow y \in S^3$. $\square$