



CHALMERS



GÖTEBORGS UNIVERSITET

Modellering av axisymmetriska galaxer med Vlasov-Poissons systemet

En numerisk studie av diskformade galaxer med centrala utbuktningar, mörk materia samt deras rotationskurvor och stabilitet

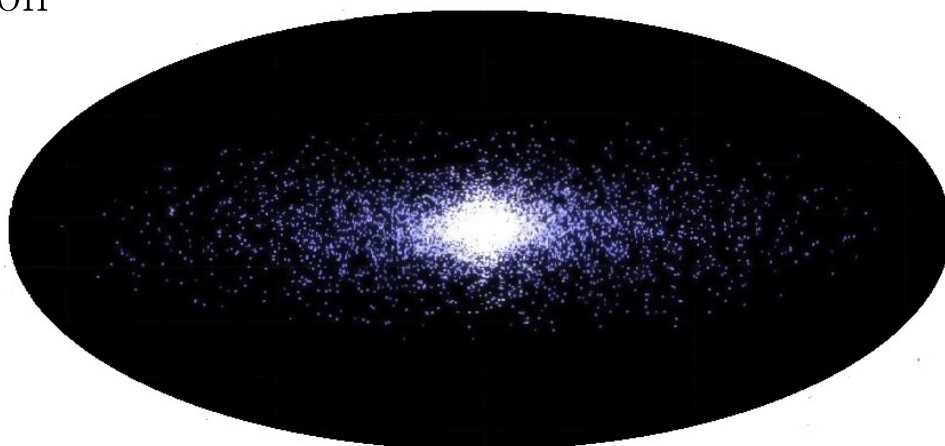
Kandidatarbete inom civilingenjörsutbildningen vid Chalmers

Rolf Andréasson

Hanna Ek

Johan Kolvik

Ludvig Svensson



Modellering av axisymmetriska galaxer med Vlasov-Poissons systemet

En numerisk studie av diskformade galaxer med centrala utbuktningar, mörk materia samt deras rotationskurvor och stabilitet

Kandidatarbete i matematik inom civilingenjörsprogrammet Teknisk Matematik vid Chalmers

Rolf Andréasson
Hanna Ek

Kandidatarbete i matematik inom civilingenjörsprogrammet Teknisk Fysik vid Chalmers

Johan Kolvik
Ludvig Svensson

Handledare: Håkan Andréasson Matematiska vetenskaper
Examinator: Ulla Dinger och Maria Roginskaya

Institutionen för Matematiska vetenskaper
CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
GÖTEBORGS UNIVERSITET
Göteborg, Sverige 2019

Populärvetenskaplig presentation

Stjärnorna vi ser på natthimlen och även solen tillhör galaxen Vintergatan. Vintergatan är ett exempel på en spiralgalax vilka känns igen på att de har tydliga stråk av stjärnor i spiraler utgående från galaxens centrum. Galaxerna är tunna relativt sin storlek och kan beskrivas som diskformade. Förklaringen bakom spiralgalaxernas form är att det så kallade *rörelsemängdsmomentet* är bevarat. Rörelsemängdsmoment är en egenskap hos saker som snurrar liksom hastighet är en egenskap hos saker som rör sig. Ett objekt som snurrar snabbt och har mycket tyngd långt ifrån sin rotationsaxel har ett stort rörelsemängdsmoment. Bevaring av rörelsemängdsmoment är en fundamental fysikalisk lag som kan illustreras av en konstnär som snurrar snabbare i en piruett genom att dra in sina händer närmare kroppen. Fenomenet förklarar även andra saker vi ser i naturen såsom formen på till exempel Saturnus ringar. Vintergatan är bara en av många spiralgalaxer i universum och att förstå hur de fungerar är av stort intresse för både fysiker och matematiker.

Astronomen Vera Rubins gjorde under 60- och 70-talet observationer av hur stjärnor roterar i spiralgalaxer. Stjärnornas hastighet runt galaxens mitt mättes och tabellerades. Resultatet av dessa observationer var spännande eftersom de inte alls såg ut som man hade förväntat sig. Stjärnorna tycktes röra sig på ett sätt som inte den tidens teorier kunde beskriva. Dessa motstridigheter mellan teori och observationer är en av anledningarna till införandet av så kallad *mörk materia*. Teorin om mörk materia påstår att majoriteten av massan i universum är *mörk*, dvs att materia inte ger ifrån sig med ljus eller annan strålning och kan därmed inte observeras. Det enda sättet som substansen gör sig till känna är att den påverkar sin omgivning genom gravitation. Genom att införa denna typ av materia kan det underliga rörelsemönstret hos stjärnorna beskrivas. Den mörka materians existens är dock ännu inte bevisad och många forskare arbetar idag med att lösa mysteriet.

Rubins observationer av rotationshastigheten hos spiralgalaxer har inte bara lett till införandet av mörk materia, de har även väckt ett intresse för att få en djupare matematisk och fysikalisk förståelse av spiralgalaxer. De senaste åren har flera matematiska modeller arbetats fram för att försöka beskriva galaxerna. Dessa modeller har använts för att undersöka om överensstämmelse mellan teori och observationer kan uppnås utan mörk materia eller om dess införande är oundvikligt.

I den här studien används en samling av matematiska ekvationer som tillsammans kallas Vlasov-Poissonsystemet för att beskriva galaxer. Lösningen till systemet beskriver vad stjärnornas position och hastighet förväntas vara i en galax. Modellen kommer ur att man ser galaxen som ett moln av gas, där gaspartiklarna i detta fallet utgörs av stjärnor som enbart påverkar varandra genom gravitation. Kraften mellan stjärnorna, gravitationen, beskrivs enligt den klassiska modellen som Isaac Newton presenterade år 1687. Vlasov-Poissonsystemet är en välstuderad modell för galaxer, systemet är dock väldigt svårt att lösa med penna och papper. Matematiken översätts därmed till ett datorprogram som hittar en approximativ lösning.

Projektets handledare, Håkan Andréasson, och hans kollega, Gerhard Rein, skrev år 2014 en artikel om deras studie av Vlasov-Poissonsystemet. I detta arbete hittades lösningar till systemet som beskrev en typ av galax som liknar spiralgalaxerna ute i rymden. Den platta diskformen uppnåddes men de spiralformade armarna som vi ser hos spiralgalaxer utelämnades ur modellen. Istället infördes *axisymmetri* hos galaxerna. En galax med axisymmetri kan roteras en godtycklig vinkel kring dess rotationsaxel utan att den ändrar form. Då dessa diskformade galaxers egenskaper undersöktes hittades många tillfredsställande överensstämmelser med observationer av riktiga galaxer, och detta utan införandet av mörk materia! Hade alltså en modell hittats som kunde beskriva verkligheten utan mörk materia? Betyder det att mörk materia inte behöver finnas? Inga bevis kunde tyvärr läggas fram, dessutom syntes i arbetet att total överensstämmelse med observationer inte hade uppnåtts vilket vidare skvallrade om att modellen var ofullständig. Men då den har visat mycket lovande resultat är ett logiskt nästa steg i arbetet att utveckla modellen för att se om bättre resultat kan erhållas.

Detta arbete tar vid där Andréasson och Rein avslutade sitt, genom att utveckla typen av galaxer som modelleras av Vlasov-Poissonsystemet. Utvidgningen som görs är i huvudsak att introducera en central utbuktning till de platta diskgalaxerna. Denna tredimensionella del av galaxen införs då observationer visar på att spiralgalaxer tenderar att vara mer massiva kring dess centrum och att de dessutom brukar ha en viss tjocklek. Den andra typen av galaxer som modelleras är diskgalaxer med en stor sfär som innesluter disken. Denna typ kan tolkas som en diskgalax innesluten i en volym av mörk materia som används för att undersöka vilka fördelar som teorin om mörk materia erbjuder. En tredje typ är en

blandning av de två ovannämnda.

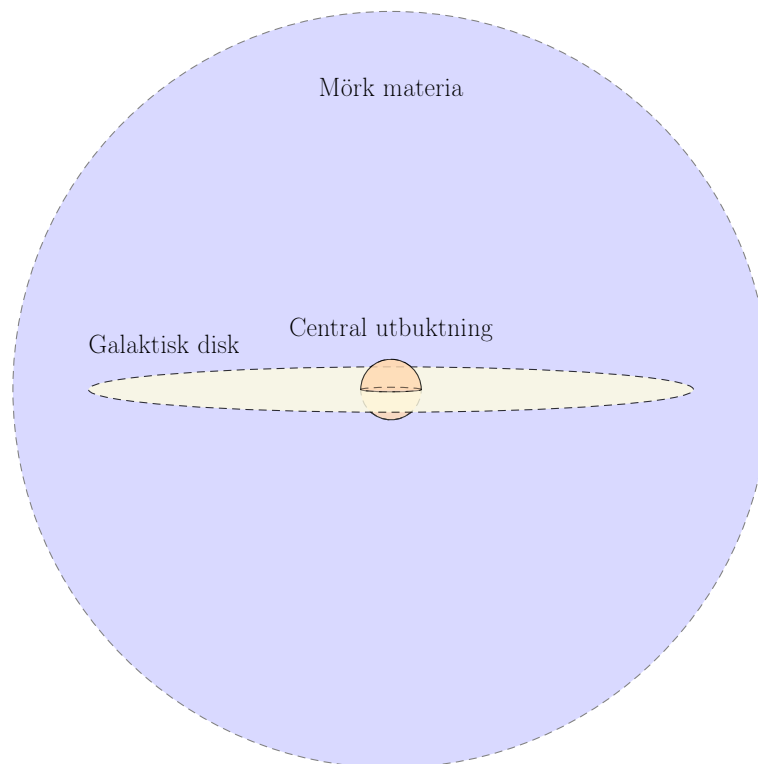
I Figur 1 visas en skiss av de galaxer som kan simuleras med metoderna framtagna i projektet. Den består av tre delar:

- Disken utgör merparten av den synliga delen av galaxen. Det är denna del som ofta ser spiralliknande ut för de galaxer vi observerar i rymden.
- Centrala utbuktningen tecknas som en sfär i diskgalaxens mitt och gör dess centrum tyngre och ger galaxen en utsträckning i alla tre dimensioner.
- Volymen av mörk materia som innesluter galaxen. I kosmologin uppskattas mörk materia utgöra runt 80 % av materian i universum.

Resultatet av arbetet är de galaxer som kan modelleras av det utvidgade systemet och de egenskaper som galaxerna har. Den mer komplicerade modellen ger mer spännande beteenden för de stjärnor som galaxerna innehåller. Exempel på detta är hur snabbt de rör sig i cirklar kring galaxens centrum. Jämförelser med verkliga galaxer visar att utvidgningen är ett steg i rätt riktning då ytterligare observationer kan matchas med våra galaxer. Modellen är fortfarande inte komplett då vi ser liknande problem som uppkommit i tidigare arbeten.

Andra spännande egenskaper hos axisymmetriska galaxer upptäcks också i arbetet då en utav lösningarna till Vlasov-Poissons systemet tillåts utvecklas i tiden. Med detta menas att man studerar hur en galax förändras när alla dess stjärnor släpps lösa och börjar röra sig enligt Newtons gravitationslag. Det visar sig att galaxens form tycks svänga fram och tillbaka i tiden på ett sätt som i vår vetenskap aldrig tidigare studerats för denna typ av lösningar.

Resultaten visar alla på att det finns mycket kvar att upptäcka kring galaxer och universum. Hur är egentligen galaxer uppbyggda? Hur mycket mörk materia innehåller de? Frågorna är många och forskningsområdet är ständigt aktuellt. Vi har än så länge bara skrapat på ytan av dessa mysterier men mycket har hänt bara på en generation, för 60 år sedan ritade Rubin sina grafer för hand medan det idag går att fotografera svarta hål. Så en sista fråga värd att ställa är: vad kommer vara möjligt att göra om ytterligare 60 år?



Figur 1: Här visas en galax som kan genereras av metoderna framtagna i projektet. Vi ser en disklik galax i mitten med merparten av sin tyngd i centrum. Detta representeras med en utbuktning som är placerad i galaxens mitt. Galaxen omsluter sig även i en stor volym av mörk materia som i bilden ses som en stor mörk sfär.

Sammandrag

Vlasov-Poissons systemet introduceras och härleds i det generella fallet och Jeans sats bevisas. Jeans sats möjliggör att hitta statiska, axisymmetriska lösningar till systemet genom att ansätta faserumsdistributionen till en funktion av energin och z -komponenten av rörelsemängdsmomentet. Detta specialfall av Vlasov-Poissons systemet löses numeriskt som ett fixpunktsproblem. Lösningar till olika axisymmetriska galaxmodeller och deras tillhörande rotationskurvor presenteras. De olika modeller av galaxer som undersöks är singulära diskar, singulära diskar med en central utbuktning, singulära diskar omgivna av en halo samt en kombination av de två sistnämnda. Platta rotationskurvor för testpartiklar i potentialen tillhörande diskgalaxer med central utbuktning presenteras och jämförs med lösningar med en mörkmateriahalo. Existensområdet för cirkulära banor i galaxen påverkas inte signifikant av de olika ansatserna och detta område beräknas till radier $r \in [0, 0.6R_{\max}]$. Den genomsnittliga tangentiella hastigheten för lösningarna stämmer ej väl överens med rotationskurvan för testpartiklar för någon av de presenterade lösningarna. För att undersöka stabilitet av statiska lösningar introduceras en metod för att lösa det tidsberoende Vlasov-Poissons systemet, *Particle-in-cell*-metoden. Tidsutveckling av en toroidal statisk lösning, utsatt för en störning, uppvisar nästintill periodiska oscillationer över tid. Detta har i författarnas vetenskap inte tidigare undersökts i axisymmetri.

Abstract

The Vlasov-Poisson system is introduced and derived in a general setting and a proof Jeans theorem is presented. Jeans theorem allows for finding static, axisymmetric solutions by making the ansatz that the phase space distribution is a function of only the energy and z -component of the angular momentum. This special case of the Vlasov-Poisson system is solved numerically as a fixed point problem. Solutions to different axisymmetric galactic models are found and their rotation curves are presented. The different models considered are singular disks, singular disks with a central bulge, singular disks with surrounding halo and a combination of the two last mentioned. Flat rotation curves for test particles in the potential associated with disk galaxies with a central bulge are presented and compared to ones from a galaxy with surrounding halo. The region of existence for circular orbits in the galaxy is not heavily dependant on the type of ansatz and is calculated to be around $[0, 0.6R_{\max}]$. The average tangential velocity of the solutions does not match the rotation curves obtained from test particles for any of the presented solutions. To analyse stability a method for solving the time dependent Vlasov-Poisson system is introduced, the *Particle-in-cell* method. Time evolution of a toroidal static solution, with its amplitude perturbed, displays nearly periodic oscillations in time. This has, to the knowledge of the authors, not been studied before in axisymmetry.

Innehållsförteckning

| | | |
|----------|--------------------------------------------------------------------------|-----------|
| 1 | Introduktion | 1 |
| 2 | Teori | 1 |
| 2.1 | Vlasov-Poissons systemet | 2 |
| 2.2 | Härledning av Vlasov-Poissons systemet | 2 |
| 2.3 | Approximation av en galax som en kollisionlös gas av partiklar | 3 |
| 2.4 | Jeans sats | 4 |
| 2.5 | Energikonservering och Virialteoremet | 5 |
| 2.6 | Cirkulära banor och rotationskurvor | 5 |
| 3 | Reducering av Vlasov-Poissons systemet | 6 |
| 3.1 | Tvådimensionell del | 6 |
| 3.2 | Tredimensionell del | 7 |
| 3.3 | Potentialen i cylindriska koordinater | 8 |
| 4 | Stabilitet och tidsutveckling av statiska lösningar | 9 |
| 5 | Ansats | 10 |
| 6 | Numeriska algoritmer | 10 |
| 6.1 | Statisk algoritm | 10 |
| 6.2 | Particle-in-cell | 11 |
| 6.3 | Lösning av det karakteristiska systemet | 12 |
| 7 | Numeriska resultat och diskussion | 13 |
| 7.1 | Diskformade galaxer med central utbuktning | 13 |
| 7.1.1 | Disk utan central utbuktning | 13 |
| 7.1.2 | Central utbuktning | 14 |
| 7.2 | Diskformade galaxer med mörk materia | 15 |
| 7.3 | Genomsnittliga tangentiella hastigheter | 16 |
| 7.4 | Singulär disk med central utbuktning och omgivande halo | 17 |
| 7.5 | Stabilitet | 18 |
| 7.6 | Jämförelse med observationer | 19 |
| 8 | Framtida utvidgningar av projektet | 19 |
| A | Härledning av potentialen i cylindriska koordinater | 22 |
| B | Kompletterande figurer | 23 |

Förord

Vi vill tacka vår handledare Håkan Andréasson för all hjälp genom arbetets gång samt för utkasten av kod som möjliggjorde de numeriska beräkningarna i arbetet. Vi vill även tacka fackspråk och alla andra som har läst rapporten för vägledningen genom skrivandet.

1 Introduktion

I slutet av 1970-talet och början av 1980-talet observerades att stjärnorna i spiralgalaxer roterar med ungefär samma hastighet oberoende av avståndet till galaxens mitt, bortsett från stjärnorna närmast centrum. Detta stämde inte överens med den tidens fysikaliska och matematiska modeller. Under antagandet att merparten av galaxens massa befinner sig i centrum ger Newtons gravitationslag samt klassisk mekanik att rotationshastigheten minskar som $r^{-1/2}$. Observationer att stjärnors rotationshastighet var till synes samma oberoende radie var en av anledningarna till introduktionen av mörk materia, en teori om att galaxer delvis består av materia som inte ger ifrån sig mätbar strålning. Efter att denna teori introducerats har olika modeller, både med och utan mörk materia, använts i syfte att modellera galaxer med liknande egenskaper som de observerade galaxerna. En av dessa modeller som påvisat stor potential utgår från en kinetisk tolkning av galaxen genom att betrakta den som ett moln av kollisionsslösa partiklar som växelverkar under gravitation. Detta system av partiella differentialekvationer kallas Vlasov-Poissons systemet.

Projekthandledaren H. Andréasson tillsammans med kollegan G. Rein skrev 2014 en artikel, se [1], där det statiska Vlasov-Poissons systemet, här efter VP-systemet, tillämpades för att beskriva platta diskgalaxer. Lösningen till detta system av partiella differentialekvationer är en massfördelning över de positioner och hastigheter som stjärnorna i galaxen kan anta. I artikeln studerade författarna platta axisymmetriska galaxer, en förenklad modell av spiralgalaxer, där alla stjärnor befinner sig i ett plan. Genom en ansats av funktionen som beskriver densiteten av partiklarna på fasrummet löstes VP-systemet numeriskt och approximativa lösningar presenterades.

En intressant egenskap hos lösningar till systemet är hastigheten hos testpartiklar som befinner sig på en cirkulär bana med en given radie i galaxens gravitationspotential; detta kommer här efter benämnas som rotationskurvor. De rotationskurvor som hittades i [1] stämde väl överens med observationer. Detta var en spännande upptäckt då de fysikaliska parametrarna som använts i ansatsen bara hade tagit hänsyn till galaxens synliga massa och ingen mörk materia hade införts. En matematisk modell hade alltså lyckats beskriva realistiska rotationskurvor, för testpartiklar, utan att behöva införa mörk materia. Resultatet motiverar till fortsatt studie av rotationskurvor tillhörande lösningar till VP-systemet.

Andréasson och Rein presenterar ett bevis för att partiklarna som beskrivs av deras lösningar inte kan finnas i cirkulära banor i utkanten av galaxen. De numeriska lösningarna lyder under detta teorem då de typiskt tillåter cirkulära banor för radier $R \in [0, 0.6R_{\max}]$, där R_{\max} betecknar galaxens yttersta radie. Resultatet är inte karakteristiskt för observerade diskformade galaxer där stjärnorna observeras röra sig i nästintill cirkulära banor. Detta motiverar utveckling av modellen använd av Andréasson och Rein vilket är syftet med detta projekt. En sådan utveckling av arbetet motiveras av ett resultat presenterat i [2]. I artikeln visades existens av en speciell typ av axisymmetriska statiska lösningar till VP-systemet. Den presenterade modellen bestod av en singular del som är begränsad till ett plan och en fullt tredimensionell del. Den matematiska existensen av sådana lösningar motiverar en undersökning av dessa system numeriskt vilket leder till syftet av detta projekt.

Arbetets syfte är att utveckla galaxmodellen från Andréasson och Reins arbete i enlighet med modellen presenterad i [2] och att implementera en numerisk algoritm i C som finner lösningar till detta system. Exempel på lösningar som undersöks är diskgalaxer med en central utbuktning och diskgalaxer inneslutna i en s.k. *halo* av mörk materia. Lösningarnas egenskaper jämförs sedan med tidigare resultat. Speciellt undersöks egenskaper såsom rotationskurvor och i vilka områden galaxer tillåter existens av cirkulära partikelbanor. Sekundärt fokus är att implementera en *Particle-in-cell*-metod i C som tillåter en tidsutveckling av axisymmetriska lösningar. Syftet med detta är att undersöka stabilitet hos de statiska lösningar som genereras och undersöka respons vid störning av dessa.

Rapporten är uppbyggd på följande sätt. I avsnitt 2 härleds och introduceras VP-systemet som används för att modellera galaxer. Systemet reduceras sedan i avsnitt 3 för lättare implementering i den numeriska algoritmen. I avsnitt 4 ges matematisk bakgrund till tidsutveckling av det statiska systemet, vilket undersöks numeriskt enligt metoden *Particle-in-cell*. Avsnitt 5 innehåller en förklaring av ansatsfunktionen som används i de numeriska beräkningarna samt diskussion av de ingående parametrarna till systemet. De numeriska algoritmerna som används för att lösa VP-systemet introduceras i stycke 6. I avsnitt 7 presenteras och diskuteras numeriska resultat för de olika modellerna. Avsnitt 8 ger en kort slutsats kring rapportens resultat samt tankar och idéer på fortsatta studier av galaxers rotationskurvor.

2 Teori

I detta avsnitt presenteras VP-systemet och teorin bakom de antagandena som gjorts för att beskriva galaxer med hjälp av VP-systemet.

2.1 Vlasov-Poissons systemet

För att undersöka egenskaper hos spiralgalaxer modelleras de med hjälp av Vlasov-Poissons systemet,

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f - \nabla_{\mathbf{x}} U \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f &= 0, \\ \Delta U &= 4\pi\rho, \quad \lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} U(t, \mathbf{x}) = 0, \\ \rho &= \int_{\mathbb{R}^3} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d^3\mathbf{v}.\end{aligned}\tag{2.1}$$

I detta system är funktionen $f : \mathbb{R}^6 \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ en massfördelning på det 6-dimensionella fasrummet med en tidskoordinat. Storheten ρ beskriver massfördelningen på positionsrummet eller densiteten av galaxen som används för att beräkna den gravitationspotentialen U . Notera att enheterna är omskrivna så att gravitationskonstanten G , som annars är en del av Poissons ekvation, är lika med 1 samt att massan för en enskild stjärna är 1. I nästa avsnitt ges en kort härledning av detta system.

2.2 Härledning av Vlasov-Poissons systemet

Ett dynamiskt system kan momentant beskrivas fullständigt med enbart positioner och hastigheter. Detta kallas systemets tillstånd. Fasrummet är ett rum som utgörs av alla möjliga tillstånd för ett system. Alla möjliga tillstånd, unikt representerade av uppsättningar av positions- och hastighetskoordinater, bildar i det allmänna fallet ett $2F$ -dimensionellt rum, med F positions- och F hastighetskoordinater, där F är antalet frihetsgrader för systemet. För en partikel i tre dimensioner har fasrummet således 6 dimensioner, för två partiklar har fasrummet 12 dimensioner och om systemet beskriver en galax med N stjärnor har fasrummet $6N$ dimensioner.

Vi betraktar tidsutvecklingen av ett godtyckligt tillstånd, representerat av en punkt \mathbf{w} i fasrummet. Med tre frihetsgrader kan vi uttrycka \mathbf{w} i kanoniska koordinater¹ $\mathbf{w} = (\mathbf{q}, \mathbf{p})$, där $\mathbf{q}, \mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$ representerar position respektive rörelsemängd. Tidsutvecklingen beskrivs av en s.k *bana*², $\mathbf{w}(t) = (\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t))$, vilken är entydigt bestämd för alla t med *Hamiltons ekvationer*³,

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{p}} &= -\nabla_{\mathbf{q}} H, \\ \dot{\mathbf{q}} &= \nabla_{\mathbf{p}} H,\end{aligned}\tag{2.2}$$

ett system av 6 ordinära differentialekvationer som relaterar \mathbf{q} till \mathbf{p} via hamiltonianen H .

För att beskriva ett system med N partiklar måste vi således lösa ett system av $6N$ ordinära differentialekvationer. Man kan därmed föreställa sig att ett $6N$ -dimensionellt fasrum, där N är antalet stjärnor i en galax, är svårt att hantera. För ett system av så många frihetsgrader är det välmotiverat att tillämpa en statistisk beskrivning. Formellt⁴, i gränsen då $N \rightarrow \infty$, så kan systemet beskrivas av en masstäthet på fasrummet. Låt $f(t, \mathbf{w})$, $t \in \mathbb{R}_+$, $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^6$, beskriva partiklarnas massa fördelad över fasrummet, dvs fördelad över alla enpartikeltillstånd \mathbf{w} , vid tiden t . Masstätheten f på fasrummet är analog med en konventionell massdensitet på positionsrummet. Skillnaden här är att massan i varje position i rummet även är fördelad över olika hastigheter.

Liouvilles teorem, ett viktigt resultat inom statistisk mekanik, säger att en fördelningsfunktion på fasrummet är konstant längs banor i systemet. Längs en bana, $\mathbf{w}(t)$, gäller alltså att $df(t, \mathbf{w}(t))/dt = 0$. Utvecklar vi detta uttryck erhålls en kontinuitetsekvation för en lokalt konserverad storhet på fasrummet⁵,

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{w}} \cdot (f \dot{\mathbf{w}}) = 0.\tag{2.3}$$

I kanoniska koordinater kan vi använda (2.2) för att utveckla den andra termen i (2.3). Vi får att

$$\begin{aligned}\nabla_{\mathbf{w}} \cdot (f \dot{\mathbf{w}}) &= \nabla_{\mathbf{q}} \cdot (f \dot{\mathbf{q}}) + \nabla_{\mathbf{p}} \cdot (f \dot{\mathbf{p}}) = \nabla_{\mathbf{q}} \cdot (f \nabla_{\mathbf{p}} H) - \nabla_{\mathbf{p}} \cdot (f \nabla_{\mathbf{q}} H) = \\ &= \nabla_{\mathbf{q}} f \cdot \nabla_{\mathbf{p}} H + f \nabla_{\mathbf{p}} \cdot \nabla_{\mathbf{q}} H - \nabla_{\mathbf{p}} f \cdot \nabla_{\mathbf{q}} H - f \nabla_{\mathbf{q}} \cdot \nabla_{\mathbf{p}} H = \dot{\mathbf{q}} \cdot \nabla_{\mathbf{q}} f + \dot{\mathbf{p}} \cdot \nabla_{\mathbf{p}} f.\end{aligned}\tag{2.4}$$

Insatt i (2.3) erhålls *Vlasovs ekvation*, även kallad *kollisionslösa Boltzmannekvationen*,

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \dot{\mathbf{q}} \cdot \nabla_{\mathbf{q}} f + \dot{\mathbf{p}} \cdot \nabla_{\mathbf{p}} f = 0.\tag{2.5}$$

¹En uppsättning koordinater på fasrummet som kan beskriva ett system i varje given tidpunkt.

²I litteraturen kallad *trajectory*.

³Två ekvationer som tillsammans entydigt beskriver ett systems tidsutveckling. Funktionen $H = H(\mathbf{w})$ kallas Hamiltonianen och beskriver ett systems totala energi.

⁴Det är ett öppet problem att visa att denna gräns går att genomföra rigoröst.

⁵Ekvationen kallas ibland för *Liouvilles ekvation*.

I ett inertialsystem⁶ med kartesiska koordinater $\mathbf{w} = (\mathbf{x}, \mathbf{v})$, $\mathbf{x}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$, kan Hamiltonianen för systemet beskrivas enligt $H = \mathbf{v}^2/2 + U(t, \mathbf{x})$, där U är ett potentialfält. Notera att vi här antar att samtliga partiklar har enhetsmassa. Under detta antagande antar (2.5) formen

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f - \nabla_{\mathbf{x}} U \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f = 0. \quad (2.6)$$

Vi antar att potentialen U är en gravitationspotential som i klassisk mekanik ges som lösningen till Poissons ekvation

$$\Delta U = 4\pi\rho,$$

där ρ är en masstäthet. Notera att enheter har valts så att gravitationskonstanten $G = 1$. Notera också att det är enkelt att byta ut växelverkan till annan typ, till exempel kan ett plasma beskrivas om Newtonsk gravitation byts ut till Maxwells fältekvationer. Ett annat relevant exempel är att koppla Vlasovs ekvation till Einsteins teori för gravitation, där Poissons ekvation byts ut till Einsteins fältekvationer och uttrycken för $(\dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{p}})$ byts ut mot geodetekvationerna på den krökta rumtidsmångfalden, se [einsteinvlasov]. Att istället använda Newtonsk gravitation är en approximation men också en stor förenkling.

För att koppla Vlasov och Poissons ekvationer görs observationen att densiteten ρ kan beskrivas med hjälp av massfördelningen på fasrummet f enligt

$$\rho(t, \mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) d^3\mathbf{v}. \quad (2.7)$$

Då vi studerar ett isolerat system gäller randvillkoret att potentialen försvinner i oändligheten, dvs

$$\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} U(t, \mathbf{x}) = 0.$$

Potentialen ges då som faltningen av ρ med Greensfunktionen till Laplaces ekvation på \mathbb{R}^3 ,

$$U(t, \mathbf{x}) = - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(t, \mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d^3\mathbf{y}. \quad (2.8)$$

Ekvationerna (2.6), (2.7) och (2.8) bildar tillsammans *Vlasov-Poissons systemet* (2.1), ett system av partiella differentialekvationer som kan användas för att modellera partiklar som växelverkar genom en gravitationspotential.

2.3 Approximation av en galax som en kollisionslös gas av partiklar

Den presenterade modellen beskriver galaxer som kollisionslösa gaser av partiklar. Kollisionslösheten uppkommer i härledningen då högerledet i kontinuitetsekvationen (2.3) sätts till 0. Om två partiklar skulle kollidera under ett tidselement dt förändras deras hastigheter i det generella fallet inte kontinuerligt. Således kan ett sådant förlopp inte beskrivas av (2.3) och därmed inte heller av systemet som helhet. Skulle ett högerled inkluderas för att även modellera kollisioner återfås istället Boltzmannekvationen, en kinetisk ekvation som används för att beskriva gaser där kollisioner dominerar över krafter som växelverkar på stora avstånd. Vi måste således argumentera för att galaxer är kollisionsfria för att kunna använda modellen.

En skillnad mellan en gas av stjärnor och t.ex en atomär gas är kraften som utgör gaspartiklarnas växelverkan. Partiklar i en atomgas växelverkar på kort avstånd, de upplever en stark repulsiv kraft när de befinner sig nära varandra, annars är kraften relativt liten. De upplever således kraftiga accelerationer när de kolliderar och nästintill försumbar acceleration i övrigt. Stjärnor känner emellertid krafter på långt avstånd från varandra och accelerationen varierar mer slätt. Båda system kan beskrivas med liknande kinetiska modeller. De två olika modellerna har olika svårigheter, egenskaper och användningsområden och i vissa fall kan de kombineras men då i resultatet av en oerhört generell men avancerad partiell integro-differentialekvation.

I ett stycke ur Galactic Dynamics av J. Binney och S. Tremaine, se [3], definieras *kollisionsfria* tidsförlopp som tider i storleksordning $t \lesssim t_{\text{relax}}$, där t_{relax} betecknar *relaxationstiden*. Detta är analogt med att partiklarna rör sig i ett effektivt slätt gravitationsfält, det vill säga ett gravitationsfält genererat av en kontinuerlig massfördelning och inte en samling punktmassor. Relaxationstiden kan ses som tiden det tar för en stjärnas bana att förändras märkvärdigt från banan stjärnan hade haft om den befann sig i ett

⁶Ett referenssystem i vilket tröghetslagen, $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, gäller.

gravitationsfält genererat av en kontinuerlig massfördelning. Skillnaden beror på gravitationella möten med andra stjärnor som stör stjärnrörelsen. Efter t_{relax} har stjärnan haft tillräckligt många sådana möten att den inte har något minne av sin tidigare bana. En uppskattning av t_{relax} ges av

$$t_{\text{relax}} \simeq \frac{0.1N}{\ln N} t_{\text{cross}}, \quad (2.9)$$

där *korsningstiden*, t_{cross} , definieras som tiden det tar för en typisk stjärna att färdas från ena sidan av galaxen till den andra, och N betecknar antal stjärnor i galaxen. Korsningstiden ges av kvoten mellan galaxradien och den typiska hastigheten för en stjärna i en cirkulär omlopps bana i utkanten av galaxen, $t_{\text{cross}} = R/|\mathbf{v}|$. Vi ser att relaxationstiden, givet en korsningstid, beror på antalet stjärnor i galaxen enligt $t_{\text{relax}} \propto N/\ln N$; alltså minskar effekten av gravitationella möten på stjärnornas banor med ökande N . Galaxer innehåller typiskt omkring 10^{11} stjärnor [3], därmed kan vi enligt (2.9) uppskatta $t_{\text{relax}} \simeq 10^8 t_{\text{cross}}$. I Galactic Dynamics uppskattas relaxationstiden vara väl över universums ålder, $\sim 10^{10}$ år, för galaxer i stroleksordningen $N = 10^{11}$ vilka därmed kan betraktas som kollisionlösa under alla tänkbara tidsförlopp.

2.4 Jeans sats

Att hitta lösningar till VP-systemet, ett sjudimensionellt olinjärt system av partiella differentialekvationer, är komplicerat. Vi studerar här lösningar som är statiska i fasrummet, dvs funktioner f som löser (2.5) och (2.8) där $\partial f/\partial t = 0$. Angreppssättet är via Jeans teorem, efter den engelska matematikern och astronomen James Jeans. Vi börjar med att definiera begreppet rörelseintegraler⁷.

Definition. En rörelseintegral $Q : \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}$ är en funktion på fasrummet som är konserverad längs med banor $(\mathbf{X}, \mathbf{V})(t)$ i en potential.

En bana i en potential U ges av lösningarna till systemet av ordinära differentialekvationer,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{X}(t) &= \mathbf{V}(t) \\ \frac{d}{dt} \mathbf{V}(t) &= -\nabla_{\mathbf{x}} U(\mathbf{X}(t), t). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Vi introducerar nu Jeans sats som möjliggör lösningen av VP-systemet.

Sats. En funktion löser den tidsberoende Vlasovekvationen om och endast om det är en funktion av endast rörelseintegraler.

I detta arbete är endast den vänstra implikationen av intresse, dvs att en funktion f av endast rörelseintegraler löser den tidsberoende Vlasovekvationen. Beviset presenteras nedan.

Bevis. Antag att f är en funktion av rörelseintegraler, $f = f(Q_1, \dots, Q_n)$, $n \geq 1$. Vi betraktar f längs en godtycklig bana $(\mathbf{X}, \mathbf{V})(t)$ och tar en total tidsderivata,

$$\frac{df}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial Q_i} \frac{dQ_i(\mathbf{X}(t), \mathbf{V}(t))}{dt} = 0. \quad (2.11)$$

Där vi använt antagandet att Q_i , $i = 1, \dots, n$ är konstant längs banor. Vi kan också skriva,

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial Q_i} \frac{dQ_i}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial Q_i} (\nabla_{\mathbf{x}} Q_i \cdot \frac{d\mathbf{X}}{dt} + \nabla_{\mathbf{v}} Q_i \cdot \frac{d\mathbf{V}}{dt}) = \\ &= \nabla_{\mathbf{x}} f \cdot \mathbf{V} - \nabla_{\mathbf{v}} f \cdot \nabla U. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Där vi använt kedjeregeln bakvänt samt Newtons ekvationer (2.10). Eftersom detta gäller för en godtycklig bana och vi har existens av lösningar till Newtons ekvationer för godtycklig startpunkt från teorin om ordinära differentialekvationer så ger (2.11) och (2.12) att

$$\nabla_{\mathbf{x}} f \cdot \mathbf{v} - \nabla_{\mathbf{v}} f \cdot \nabla_{\mathbf{x}} U = 0 \quad (2.13)$$

gäller i hela fasrummet vilket är statiska Vlasovs ekvation. \square

⁷I litteraturen kallade *Integrals of Motion*.

Notera att detta endast löser Vlasovs ekvation och att än så länge så har potentialen inte behandlats. Det kan tyckas vara ett smärre problem då Poissons ekvation enkelt löses med Greens metod. Svårigheten uppkommer då de två PDE:erna är kopplade med varandra. I rapporten väljs uteslutande rörelseintegralerna till energin $E = \mathbf{v}^2/2 + U(\mathbf{x}, t)$ samt z -komponenten av rörelsemängden $L_z = x_1v_2 - x_2v_1 = xv_y - yv_x$. Energin är en rörelseintegral under antagandet att systemet är statistiskt så att $U(\mathbf{x}, t) = U(\mathbf{x})$. L_z är en rörelseintegral under antagandet att systemet är axisymmetriskt. Notera här att energin beror på potentialen. Denna implicitet gör systemet svårt att lösa analytiskt vilket talar för numeriska metoder.

2.5 Energikonservering och Virialteoremet

Storheter så som massa och energi konserveras i Vlasov-Poissons systemet. Detta är viktigt för att förstå hurvida lösningar till systemet existerar. Det är också viktigt i numerik då detta ger en möjlighet att uppskatta de numeriska felen. Algoritmen, se sektion 6.2, som används för att tidsutveckla lösningar konserverar automatiskt massan, men den totala energin konserveras inte per automatik och är därför en uppskattning av de numeriska felen. Den totala energin $E_{\text{tot}}(t)$ för en lösning till Vlasov-Poisson ges av

$$E_{\text{tot}}(t) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{v}|^2 f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) d^3\mathbf{x} d^3\mathbf{v} + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \rho(t, \mathbf{x}) U(t, \mathbf{x}) d^3\mathbf{x}. \quad (2.14)$$

Ett annat sätt att analysera det numeriska felet i lösningar är via virialteoremet, detta funkar även i det statistiska fallet. Satsen säger att för ett stabilt system av partiklar som interagerar via en potential, som är proportionerlig mot r^{-2} där r är avståndet mellan partiklar, gäller följande samband,

$$2\langle T \rangle = -\langle U \rangle. \quad (2.15)$$

Beteckningen $\langle \cdot \rangle$ benämner tidsmedelvärdet av en storhet och T och U är kinetisk respektive potentiell energi givna av första och andra termen i (2.14)⁸. Eftersom vi söker statistiska lösningar kan tidsmedelvärdet utelämnas.

2.6 Cirkulära banor och rotationskurvor

För att analysera rotationskurvor tillhörande lösningar för olika modeller av galaxer kommer samma procedur som använts i [1] tillämpas. Två olika definitioner av rotationskurvor studeras. Den första kan ses som hastigheten för testpartiklar som rör sig i cirkulära banor i potentialen för galaxen och den andra som tangentiella medelhastigheten för stjärnorna i den statistiska fasrumsfördelningen f .

Vi börjar med att studera rotationskurvor för testpartiklar i den statistiska lösningens potentialfält. Vi påminner oss om rörelseekvationerna i cylindriska koordinater för radiella positionen r och radiella hastigheten w och benämner den tangentiella hastigheten med v_θ . Vi har alltså följande rörelseekvationer,

$$\begin{aligned} \dot{r} &= w \\ \dot{w} &= \frac{v_\theta^2}{r} - U'(r) = \frac{L_z^2}{r^3} - U'(r). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Där L_z är rörelsemängdsmomentet i z -led som i cylindriska koordinater är $L_z = rv_\theta$ och U är potentialen. För en cirkulär bana har vi $w = 0$ och följaktligen $\dot{w} = 0$, vilket ger att

$$\frac{L_z^2}{r^3} = U'(r). \quad (2.17)$$

Den cirkulära hastigheten $v_c = v_\theta$ kan därmed skrivas som,

$$v_c^2 = rU'(r). \quad (2.18)$$

Detta ger oss ett sätt att bestämma rotationskurvan som en galax ger upphov till genom att från lösningen beräkna $U'(r)$ och därigenom $v_c(r)$. Vi kan även använda detta resultat för att säga någonting om existensen av cirkulära banor för stjärnorna i vår statistiska lösning. Energin för en partikel längs en cirkulär bana kan vi nu skriva enligt

$$E = \frac{v_c^2}{2} + U(r) = \frac{rU'(r)}{2} + U(r). \quad (2.19)$$

Givet en övre begränsning på energin, E_0 ger detta ett krav för existensen av cirkulära banor för en given radie. Nämligen att om $\Gamma := E_0 - E \leq 0$ existerar inga cirkulära partikelbanor. Vi sätter in ekvation

⁸Ett bevis av virialteoremet för fasrumsdistributioner i det statistiska fallet på tensor samt skalärform hittas i Galactic Dynamics [3], s.360.

(2.19) i uttrycket för Γ vilket ger oss följande område i vilket cirkulära banor inte existerar, nämligen alla radier r för vilket,

$$\Gamma(r) := E_0 - \frac{rU'(r)}{2} - U(r) < 0. \quad (2.20)$$

I [1] presenteras numeriska simuleringar och beräkning av Γ . Ett av deras resultat visar att för de diskformade galaxerna som studeras där tillåts endast existensen av cirkulära banor på området $[0, 0.6R_{\max}]$, där R_{\max} är galaxens totala radie. Detta resultat stämmer inte överens med observationer enligt samma artikel.

Ett annat sätt att definiera rotationskurvan för en diskformad lösning är att studera väntevärdet av den tangentiella hastigheten för fasrumstätheten f och tillhörande densitet ρ given av

$$\langle v_\theta(r) \rangle = \frac{1}{\rho(r)} \int_{\mathbb{R}^3} v_\theta f d^3\mathbf{v}, \quad (2.21)$$

där v_θ är den tangentiella hastigheten för en partikel givet dess position och totala hastighet. En viktig sak att notera är att detta v_θ inte är samma som det i härledningen av v_c .

3 Reducering av Vlasov-Poissons systemet

I detta avsnitt introduceras en variant av VP-systemet för att beskriva galaxen. Vi utgår ifrån axisymmetri kring z -axeln likt tidigare resultat men i detta fallet betraktas två separata system sammankopplade genom en gemensam potential. Ett av systemen är begränsat till xy -planet i rummet, vinkelrätt mot symmetriaxeln, och det andra lever i hela \mathbb{R}^3 . I de två första avsnitten reduceras uttrycken för densiteterna tillhörande de två olika systemen. I det tredje avsnittet reduceras uttrycket för potentialen med hjälp av symmetriantaganden.

En variant av (2.6), introducerad i [2], där fasrumsfördelningen delats upp i en tredimensionell del samt en del som begränsas till xy -planet studeras. Vi låter $f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) = f_1(t, \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{v}})\delta(z)\delta(v_z) + f_2(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})$ där $\bar{\mathbf{x}}$ och $\bar{\mathbf{v}}$ är punkter i xy - respektive $v_x v_y$ -planen medan \mathbf{x} och \mathbf{v} tillhör hela \mathbb{R}^3 . Det motsvarande VP-systemet blir

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial t} - \nabla_{\bar{\mathbf{v}}} f_1 \cdot \nabla_{\bar{\mathbf{x}}} U + \nabla_{\bar{\mathbf{x}}} f_1 \cdot \bar{\mathbf{v}} &= 0 \\ \frac{\partial f_2}{\partial t} - \nabla_{\mathbf{v}} f_2 \cdot \nabla_{\mathbf{x}} U + \nabla_{\mathbf{x}} f_2 \cdot \mathbf{v} &= 0 \\ \Delta U &= 4\pi \int_{\mathbb{R}^2} f_1 d^2\bar{\mathbf{v}} + 4\pi \int_{\mathbb{R}^3} f_2 d^3\mathbf{v}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

För att finna statistiska lösningar används Jeans teorem för att ansätta f_1 och f_2 så att de endast beror på rörelseintegraler. Vi är också intresserade av axisymmetriska lösningar vilket gör att både energin $E = \mathbf{v}^2/2 + U(\mathbf{x})$ samt z -komponenten av rörelsemängdsmomentet $L_z = xv_y - yv_x$ är konserverade längs banor. Lösningen ansätts därför som en funktion av dessa rörelseintegraler

$$f_1 = f_1(\hat{E}, \hat{L}_z), \quad f_2 = f_2(E, L_z), \quad (3.2)$$

där (\hat{E}, \hat{L}_z) tar hänsyn till den begränsade definitionsmängden för f_1 . Lösningarna är implicita då fasrumsdistributionen fortfarande beror på den okända potentialen. Poissons ekvation löses med hjälp utav Greensfunktionen till Laplaceoperatoren i \mathbb{R}^3 given av $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}$. Lineariteten i beräkningen tillåter även en uppdelning potentialbidragen vilket ger

$$U(\mathbf{x}) = U_1(\mathbf{x}) + U_2(\mathbf{x}) = - \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\rho_1}{|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}'|} d^2\bar{\mathbf{x}}' - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho_2}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3\mathbf{x}', \quad (3.3)$$

där ρ_1 och ρ_2 är densiteterna givna av

$$\rho_1 = \int_{\mathbb{R}^2} f_1 d^2\bar{\mathbf{v}}, \quad \rho_2 = \int_{\mathbb{R}^3} f_2 d^3\mathbf{v}. \quad (3.4)$$

3.1 Tvådimensionell del

Betrakta delen av systemet som är begränsat till att endast existera i xy -planet. Utgående ifrån ansatsen och symmetriantaganden utförs ett par förenklingar. Den tvådimensionella integralen för ρ_1 skrivs om

med hjälp av variabelbytet $(v_x, v_y) \rightarrow (\hat{E}, \hat{L}_z)$. Bytet definieras av systemet

$$\begin{aligned}\hat{E} &= \frac{v_x^2 + v_y^2}{2} + U(r) \\ \hat{L}_z &= x_1 v_y - x_2 v_x,\end{aligned}\tag{3.5}$$

där potentialen U endast beror av $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ då vi uteslutande betraktar axisymmetriska lösningar. Avbildningen ovan kallas hädanefter för $T(v_x, v_y)$. Detta systems invers är en flervärd funktion av E och L_z ,

$$\begin{aligned}v_x &= r^{-2} \left(-\hat{L}_z x_2 \pm x_1 \sqrt{2r^2(\hat{E} - U(r)) - \hat{L}_z^2} \right) \\ v_y &= r^{-2} \left(\hat{L}_z x_1 \pm x_2 \sqrt{2r^2(\hat{E} - U(r)) - \hat{L}_z^2} \right).\end{aligned}\tag{3.6}$$

De två grenarna kommer ur valet av plus-/minustecken vid rottagning. Notera att teckenvalet gäller för både v_x och v_y så att funktionen får två grenar. Efter variabelbytet kan den sökta integralen uttryckas som

$$\int_{T(\mathbb{R}^2)} f_1 |\det J_{T^{-1}}| d\hat{E} d\hat{L}_z,\tag{3.7}$$

där $J_{T^{-1}}$ är Jacobianen för variabelbytet. Vi använder denna notation trots den flervärda inversen då båda grenarnas Jacobian är lika till beloppet:

$$\det J_{T^{-1}} = \begin{vmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial \hat{E}} & \frac{\partial v_x}{\partial \hat{L}_z} \\ \frac{\partial v_y}{\partial \hat{E}} & \frac{\partial v_y}{\partial \hat{L}_z} \end{vmatrix} = \pm \frac{1}{\sqrt{2r^2(\hat{E} - U(r)) - \hat{L}_z^2}}.\tag{3.8}$$

Den fysikaliska tolkningen av storheterna (\hat{E}, \hat{L}_z) ger nu begränsningar på dess värden⁹. Energin \hat{E} för en partikel begränsas endast underifrån av potentialen $U(r)$ medan rörelsemängdsmomentet \hat{L}_z antar värden mellan $\pm r \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \stackrel{(3.6)}{=} \pm \sqrt{2r^2(\hat{E} - U(r))}$. Dessa begränsningar definierar nu området $T(\mathbb{R}^2)$ som utgör den sista delen i variabelbytet. Efter bytet beräknas alltså ρ_1 enligt

$$\rho_1(r) = 2 \int_{U(r)}^{\infty} \int_{-\sqrt{2r^2(\hat{E}-U(r))}}^{\sqrt{2r^2(\hat{E}-U(r))}} \frac{f_1(\hat{E}, \hat{L}_z) d\hat{L}_z d\hat{E}}{\sqrt{2r^2(\hat{E} - U(r)) - \hat{L}_z^2}}\tag{3.9}$$

där en faktor 2 inkluderas på grund av att variabelbytetets två grenar ger samma Jacobian.

3.2 Tredimensionell del

Vi betraktar nu det tredimensionella systemet och förenklar uttrycket för masstätheten på ett liknande sätt som i avsnitt 3.1. Vi påminner om uttrycket för ρ_2 i ekvation (3.4). Vi vill genomföra ett variabelbyte som tar oss till (E, L_z) -rummet i integralen. Eftersom vi integrerar över tre dimensioner och vill byta till ett tvådimensionellt rum vill vi beräkna en av integralerna explicit. Vi introducerar cylindriska koordinatsystem i både positions- och hastighetsrummet $(x, y, z) \rightarrow (r, \theta, z)$, $(v_x, v_y, v_z) \rightarrow (v_\rho, \psi, v_\theta)$. Bytet i hastighetsrummet definieras enligt

$$\begin{aligned}\mathbf{v} \cdot \hat{r} &= v_\rho \cos \psi, \\ \mathbf{v} \cdot \hat{z} &= v_\rho \sin \psi, \\ \mathbf{v} \cdot \hat{\theta} &= v_\theta,\end{aligned}\tag{3.10}$$

där $(\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{z})$ är cylindriska enhetsvektorer i positionsrummet. För varje position \mathbf{x} införs alltså ett cylindriskt koordinatsystem i hastighetsrummet där höjddkoordinaten v_θ är i den azimutiska riktningen hos det cylindriska koordinatsystemet i positionsrummet. Det speciella koordinatsystemet visualiseras i Figur 2. Bytet innebär att $d^3\mathbf{v} = v_\rho dv_\rho d\psi dv_\theta$ vilket ger att

$$\rho_2 = \int_{\mathbb{R}^3} f_2 v_\rho dv_\rho d\psi dv_\theta.\tag{3.11}$$

⁹Notera att den fysikaliska tolkningen inte är nödvändig i variabelbytet. Det är endast en hjälp i härledningen.

I det nya koordinatsystemet ges uttrycken för E och L_z av

$$E = \frac{v_\rho^2 + v_\theta^2}{2} + U(r, z) \quad (3.12)$$

$$L_z = r v_\theta.$$

Notera att varken E eller L_z beror på ψ och därmed så är även f_2 oberoende av ψ . Vi kan beräkna integralen över ψ och får

$$\rho_2(r, z) = 2\pi \int_{\mathbb{R}^2} f_2 v_\rho dv_\rho dv_\theta. \quad (3.13)$$

Vi kan nu byta till E och L_z . Låt $S(E, L_z)$ vara inversen av koordinatbytet i (3.12), den ges av

$$v_\rho = \sqrt{2(E - U(r, z)) - L_z^2/r^2} \quad (3.14)$$

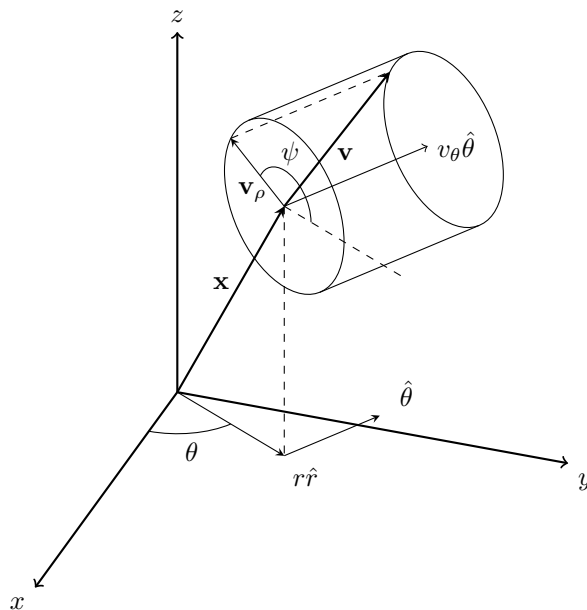
$$v_\theta = L_z/r.$$

Notera att vi inte får ett minustecken vid rottagningen eftersom $v_\rho > 0$. De nya integralgränserna ges helt analogt till de tvådimensionella fallet. Beloppet av determinanten av Jacobianen ges av

$$|\det J_S| = \frac{1}{v_\rho r}. \quad (3.15)$$

Vi utför variabelbytet och får

$$\rho_2(r, z) = \frac{2\pi}{r} \int_{U(r, z)}^{\infty} \int_{-r\sqrt{E-U(r, z)}}^{r\sqrt{E-U(r, z)}} f_2(E, L_z) dL_z dE. \quad (3.16)$$



Figur 2: En visualisering av koordinatsystemet som används för att förenkla integralen i uttrycket för den tredimensionella densiteten.

3.3 Potentialen i cylindriska koordinater

De två systemen vi betraktat ovan beror på ett potentialfält U vilket i sin tur beror på densiteterna ρ_1 och ρ_2 . Vi betraktar nu potentialen i cylindriska koordinater vilket tillåter vissa förenklingar i ljuset av de symmetriantaganden vi arbetar med. Genom att utgå från ekvation (3.3) kan följande samband visas:

$$U_1(r, z) = -4 \int_0^{\infty} \frac{s \rho_1(s)}{\sqrt{(r+s)^2 + z^2}} K(k|_{\zeta=0}) ds. \quad (3.17)$$

$$U_2(r, z) = -4 \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s \rho_2(s, \zeta)}{\sqrt{(r+s)^2 + (z-\zeta)^2}} K(k) d\zeta ds. \quad (3.18)$$

I detta uttryck används variabeln

$$k = \frac{2\sqrt{rs}}{\sqrt{(r+s)^2 + (z-\zeta)^2}} \quad (3.19)$$

som argument till första ordningens elliptiska integral som definieras enligt

$$K(\xi) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-\xi^2 t^2} \sqrt{1-t^2}} \quad 0 \leq \xi \leq 1. \quad (3.20)$$

Härledningen till denna reducering ges i appendix A.

4 Stabilitet och tidsutveckling av statiska lösningar

I detta avsnitt presenteras en metod för att undersöka stabiliteten av en statisk lösning. Stabilitet går att definiera på en mängd olika sätt, här anses en numerisk lösning till ett statiskt system vara stabil om den inte frångår sin ursprungliga lösning när den utsätts för en störning. Stabilitet för Vlasov-Poissons systemet går till viss del att undersöka analytiskt vilket görs i avsnitt 2 av [REIN]. Numerisk stabilitet av sfärisksymmetriska lösningar till systemet har studerats i [4], där presenteras hur små störningar av en statisk lösning ger upphov till periodiska variationer i potentiell och kinetisk energi. Det är en vedertagen hypotes, trots att inget bevis finns, att den numeriska algoritmen som behandlas i projektet ger stabila lösningar. Detta har till viss del numerisk uppbackning i [5]. Det är intressant att undersöka om statiska lösningar till systemet som studeras är stabila enligt definitionen ovan. Det visar sig att det är problematiskt att tidsutveckla lösningar i cylindriska koordinater med massa i origo på grund av singulariteten i det cylindriska koordinatsystemet. Fördelen med cylindriska jämfört med kartesiska koordinater är att den numeriska algoritmen blir betydligt effektivare. I [4] har man valt att utveckla skalformade lösningar i sfärisk symmetri utan massa i ett område runt origo. På liknande sätt begränsas de axisymmetriska lösningarna i rapporten till att inte ha massa i origo vilket ger toroidala galaxer. Detta för att testa stabiliteten för ett specialfall genom tidsutveckling av den statiska lösningen.

Innan den numeriska metoden introduceras ges en kort introduktion till karakteristiska system för linjära PDE:er av första ordningen. Denna typ av ekvation kan skrivas på formen

$$\sum_{i=1}^n a_i(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_i} = c(x_1, \dots, x_n, u), \quad (4.1)$$

där $(a_i)_{i=1}^n$ och c är godtyckliga funktioner. Givet ett kraftfält är Vlasovs ekvation (2.6) en linjär PDE där $c \equiv 0$ och $(a_i)_{i=1}^7$ är koefficienterna framför de partiella derivatorna.

Det *karakteristiska systemet* för en linjär PDE är ett system av ODE:er i termer av en parametrisering s på formen

$$\frac{dx_i}{ds} = a_i(x_1, x_2, \dots, x_7), \quad i = 1, \dots, 7, \quad (4.2)$$

där $(x_i)_{i=1}^7$ representerar våra sex fasrumsvariabler samt vår tidsvariabel $(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})$ och $(a_i)_{i=1}^7$ är koefficientfunktionerna i Vlasovs ekvation (4.1) i vårt fall. Lösningar till detta system, $(x_i(s))_{i=1}^7$, kallas *karakteristiska kurvor*. Betrakta nu $f(s) = f(t(s), \mathbf{x}(s), \mathbf{v}(s))$, en lösning till Vlasov-Poissons systemet längs en karakteristisk kurva. Differentiering med avseende på parametriseringen s ger oss att

$$\frac{d}{ds} f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) = \sum_{i=1}^7 \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{dx_i}{ds} = \sum_{i=1}^7 \frac{\partial f}{\partial x_i} a_i(x_1, \dots, x_7) = 0, \quad (4.3)$$

där Vlasovs ekvation används i sista steget. Vi har därmed att alla lösningar f till (2.6) är konstanta längs karakteristiska kurvor. Det följer att en lösning f till (2.6) förblir en lösning trots propagering i enlighet med det karakteristiska systemet, se [6].

Genom att gruppera derivator efter våra positions- och hastighetsvariabler kan vi skriva om (4.3) som

$$\frac{d}{ds} f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) = \left(\frac{\partial f}{\partial t}, \nabla_{\mathbf{x}} f, \nabla_{\mathbf{v}} f \right) \cdot \left(\frac{dt}{ds}, \frac{d\mathbf{x}}{ds}, \frac{d\mathbf{v}}{ds} \right) = 0. \quad (4.4)$$

Då Vlasovs ekvation kan skrivas på följande form

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}, \nabla_{\mathbf{x}} f, \nabla_{\mathbf{v}} f \right) \cdot (1, \mathbf{v}, -\nabla_{\mathbf{x}} U) = 0, \quad (4.5)$$

erhålls direkt följande ekvationssystem

$$\begin{cases} \frac{dt}{ds} = 1, & t(0) := 0 \implies t = s \\ \frac{d\mathbf{x}}{ds} = \mathbf{v}, & \iff \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v} \\ \frac{d\mathbf{v}}{ds} = -\nabla_{\mathbf{x}}U, & \iff \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla_{\mathbf{x}}U \end{cases} \quad (4.6)$$

Vi noterar att om massan för en stjärna m sätts till 1 så sammanfaller det karakteristiska systemet för Vlasovs ekvation med Newtons rörelsekvationer

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v}, \quad \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{1}{m}\mathbf{F}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{v}(t)), \quad (4.7)$$

där $\mathbf{F} = -\partial U/\partial \mathbf{x}$ för gravitationspotentialen U i fallet av VP-systemet. Med $U(t, \mathbf{x})$ given så hade alltså det tidsberoende VP-systemet kunnat lösas genom att först placera ut ett stort antal virtuella partiklar¹⁰ enligt en initialfördelning f som momentant löser VP-systemet. Därefter propageras partiklarna genom att lösa (4.7). I vårt fall beror dock potentialen U på lösningen f och systemet kan därmed inte lösas analytiskt. Denna metod, som i PDE-litteratur kallas 'method of characteristics', kan då ej tillämpas men inspirerar numeriska lösningsmetoder. *Particle-in-cell*-metoden som tillämpas i denna rapport är ett exempel på en sådan numerisk lösning och beskrivs i detalj under avsnitt 6.2.

5 Ansats

Ansatsen för fasrumsfördelningen som undersöks är på formen

$$\begin{aligned} f_1(E, L_z) &= A_1(E_{0,1} - E)_+^{k_1} (1 - Q_1|L_z|)_+^{l_1}, \\ f_2(E, L_z) &= A_2(E_{0,2} - E)_+^{k_2} (1 - Q_2|L_z|)_+^{l_2}, \end{aligned} \quad (5.1)$$

där $E_{0,1}, E_{0,2} < 0$, $A_1, A_2, Q_1, Q_2, k_1, k_2, l_1, l_2 > 0$ och $(x)_+ = x$ om $x > 0$ och 0 annars. Normaliseringskonstanterna A_1 och A_2 väljs genom att bestämma massorna på galaxens beståndsdelar, M_1 och M_2 . Var för sig har dessa ansättningar använts till att hitta statistiska lösningar till både Vlasov-Poissons systemet och det relaterade Vlasov-Einsteinsystemet där Newtonsk gravitation byts ut mot Generell Relativitetsteori. Det går inte på förhand går att säga hur galaxen kommer se ut för olika val av parametrar. Detta visar på ett syfte med arbetet; systemet bestående av två olika komponenter har undersökts analytiskt i [2] men hur dessa lösningar ser ut har ännu inte studerats numeriskt.

Trots komplexiteten i ansatsen kan hypoteser dras angående hur galaxen påverkas vid olika val av de ingående parametrarna. Till exempel ger $E_{0,1}$ en övre gräns för energin hos partiklar i den tvådimensionella fördelningen, då potentialen i allmänhet ökar med radien så möjliggör ett större $E_{0,1}$ partiklar längre ut från galaxens centrum. Tillsammans med M_1 ger $E_{0,1}$ möjlighet att ändra galaxens storlek. Motsvarande resonemang gäller för den tredimensionella delen.

Givet att galaxen har en viss storlek kan fördelningen av massa utmed diskens radie varieras, detta åstadkoms genom att variera k_1 och k_2 . I (5.1) ser vi att ett ökat k_1 viktas för högre täthet i de delar av fasrummet där energin är liten, vilket motsvarar centrum där potentialen är liten. Större k_1 respektive k_2 ger alltså ett mer massivt centrum på galaxen i den diskformade respektive tredimensionella. De andra parametrarna påverkar fasrumsfördelningens beroende på L_z där $1/Q_1$ och $1/Q_2$ ger övre begränsningar på rörelsemängdsmomentet. I huvudsak kommer den tredimensionella delen att ansättas isotropiskt¹¹, därför kan det hädanefter antas att $Q_2 = l_2 = 0$ om inget annat sägs.

6 Numeriska algoritmer

I detta avsnitt presenteras och förklaras de numeriska metoderna som används för att hitta lösningar till VP-systemet. Först presenteras metoden som löser det statistiska VP-systemet härlett i avsnitt 3, därefter introduceras Particle-in-cell-metoden som används för att tidsutveckla statistiska lösningar.

6.1 Statisk algoritm

Uttrycken för densiteten och potentialen för de två systemen (3.9) och (3.17) samt (3.16) och (3.18) definierar tillsammans ett fixpunktsproblem för den totala potentialen och densiteten i galaxen. Fixpunktsproblemet kan lösas numeriskt genom att anta initialfördelningar av ρ_1 och ρ_2 genom vilka potentialen

¹⁰Dessa behöver inte nödvändigtvis motsvara de fysikaliska partiklar vi modellerar.

¹¹Isotropiska fasrumsfördelningar beror endast på energin.

för galaxen beräknas enligt (3.17) och (3.18). Utifrån detta kan nya densiteter ρ_1 och ρ_2 beräknas enligt (3.9) och (3.16). Densiteten normaliseras i varje steg så att massan på de olika delarna i galaxen hålls konstant. Sedan kan potentialen beräknas utifrån de nya densiteterna. Detta utgör idén för den statistiska algoritmen. Iterationsschemat för de numeriska beräkningarna ser ut på följande sätt:

1. Först ansätts en startfördelning av massan i systemet genom att välja ρ_1^0 och ρ_2^0 , där ρ_1^0 lever i xy -planet och ρ_2^0 lever i hela \mathbb{R}^3 . Densiteterna ansätts så att de har total massa M_1 respektive M_2 .

För iteration n utförs sedan följande steg:

2. Potentialen U^n beräknas som summan av ekvationer (3.17) och (3.18) med massfördelningar ρ_1^n respektive ρ_2^n .
3. Ickenormerade densiteter $\hat{\rho}_1^{n+1}$ och $\hat{\rho}_2^{n+1}$ beräknas enligt (3.9) respektive (3.16) givet potentialen U^n .
4. Normeringskonstanter N_1 och N_2 beräknas för disken respektive sfären. Densiteterna uppdateras genom $\rho_1^{n+1} = N_1 \cdot \hat{\rho}_1^{n+1}$ och $\rho_2^{n+1} = N_2 \cdot \hat{\rho}_2^{n+1}$ så att massan efter en hel iteration är oförändrad.
5. Steg 2 utförs med $n = n + 1$.

Ovanstående steg upprepas till 2-normen av differensen $\rho_k^{n+1} - \rho_k^n$, för $k = 1, 2$, är mindre än en vald tolerans eller tills maximalt antal iterationer uppnås.

I beräkningen av potentialen (3.3) används andra ordningens elliptiska integral $K(k)$ given i (3.20). Det är en tung numerisk beräkning då en integralevaluering görs för alla punkter (r, z) , i varje iteration av den statistiska algoritmen. Därför inleds de program som beräknar potentialer med en beräkning av $K(k)$ för alla (r, s, z, ζ) som används senare i algoritmen, där

$$k = \frac{2\sqrt{rs}}{\sqrt{(r+s)^2 + (z-\zeta)^2}}. \quad (6.1)$$

$K(k)$ beräknas med funktionen `gsl_sf_ellint_Kcomp` hämtad från mjukvarubiblioteket *GSL (GNU Scientific Library)*.

För $(r = s, s, z = \zeta, \zeta)$, $\forall s, \zeta$ är $k = 1$ och $K(k)$ singular enligt (3.20); funktionen kan inte hantera dessa indata varpå en approximation erfordras. I punkterna $(r = s, s, z = \zeta, \zeta)$ då $r_{\min} < s < r_{\max}$ där r_{\min} och r_{\max} är minsta respektive största radien, approximeras därmed $K(k)$. För dessa k sätts $K(k)$ till medelvärde av K evaluerat i punkterna $(r = s + r_{\text{step}}, s, z = \zeta, \zeta)$ och $(r = s - r_{\text{step}}, s, z = \zeta, \zeta)$, där r_{step} är steglängden i r . I punkterna $(r_{\min}, r_{\min}, z = \zeta, \zeta)$ samt $(r_{\max}, r_{\max}, z = \zeta, \zeta)$ approximeras $K(k)$ med funktionsvärden i de närliggande punkterna $(r_{\min} + r_{\text{step}}, r_{\min}, z = \zeta, \zeta)$ respektive $(r_{\max} - r_{\text{step}}, r_{\max}, z = \zeta, \zeta)$ $\forall \zeta$. Hur singulariteter i K hanteras är något som döms kunna förbättras och betraktas som en potentiell källa till de numeriska felen i modellen.

6.2 Particle-in-cell

Particle-in-cell-metoden implementeras för att lösa det tidsberoende VP-systemet, detta är en välanvänd metod inom plasmafysik för att lösa Vlasovekvationen kopplad till elektromagnetisk växelverkan. Som initialvillkor till tidsutvecklingen används en lösning, alternativt en störd lösning, till det statistiska systemet för en uppsättning parametrar. Från lösningen fås fasrumsfördelningen $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = f(\mathbf{w})$ som används för att placera ut de virtuella partiklarna som används i metoden.

Metoden har två konceptuella delar. Den ena är en diskretisering av det femdimensionella fasrummet som parametreras med (r, z, v_r, v_z, L_z) för att utnyttja axisymmetrin och att L_z är konserverad längs banor. På det rutnät som ges av positionvariablerna hanteras fälten i problemet: densiteten, potentialen, samt gradienten av potentialen. Den andra delen är ett stort antal, N , virtuella partiklar¹². Partiklarna initieras i mitten av de celler som utgör diskretiseringen av fasrummet och tilldelas en massa given av $m_j = f(\mathbf{w}_j)\Delta V$ där \mathbf{w}_j är diskreta fasrumskoordinater, ΔV är motsvarande fasrumsvolym och $j = 1, 2, \dots, N$. Diskretiseringen av fasrummet och partiklarna är sammankopplade på följande sätt. Densiteten i rummet ges genom att extrapolera partiklarnas massa till kringliggande rutnätspunkter. Poissons ekvation kan då lösas på rutnätet och gradienten av potentialen erhålls. Denna interpoleras tillbaka till partiklarna som sedan kan förflyttas enligt det karakteristiska systemet till Vlasovs ekvation, i detta fall Newtons rörelseekvationer. Notera alltså att partiklarna inte är begränsade till rutnätet utan kan anta godtycklig

¹²De virtuella partiklarna motsvarar sällan fysikaliska partiklar, därav namnet.

position. Däremot är fälten endast specificerade på rutnätet. Fördelen med detta jämfört med att till exempel numeriskt lösa ett gravitationellt flerkroppssystem är att det är betydligt mer beräkningseffektivt att hantera potentialen på ett rutnät istället för att summera ihop potentialbidrag ifrån varje enskild partikel. Dessutom försvinner singulariteten som uppkommer när två partiklar kommer mycket nära varandra.

Nedan följer en beskrivning av den numeriska algoritmen som används för att utföra tidsutveckling enligt *Particle in cell*-metoden.

1. Det statiska systemet löses först med metoderna från avsnitt 6.1. Potentialen vid $t = 0$, U_0 , fås därefter som den statiska lösningens potential, som i sin tur ger fasrumsfördelningen via ansatsen i (5.1).
2. Ett rutnät initieras i det aktuella fasrummet och partiklarna placeras i mitten av cellerna. De tilldelas en massa motsvarande det volymselementet i fasrummet de representerar multiplicerat med värdet på initiala fasrumstätheten f i punkten. Dvs $m_j = f(\mathbf{w}_j)\Delta V$ för $j = 1, 2, \dots, N$ där N är antalet partiklar.

Tidsloopen startas därefter med $t_1 = 0$. För tiden t_i sker:

3. Densiteten ρ_{t_i} beräknas i rutnätet genom att extrapolera varje partikels massa till de fyra närmsta rutnätspunkterna i (r, z) -rummet och dividera med storleken på respektive cell.
4. Potentialen U_{t_i} beräknas i (r, z) -rutnätet enligt ekvation (3.18) med hjälp av ρ_{t_i} . Potentialens gradient beräknas också i dessa punkter.
5. Gradienten av potentialen vid partikelpositioner bestäms genom att interpolera från de omgivande rutnätspunkterna.
6. Partiklarnas positioner och hastigheter uppdateras genom numeriska metoder för lösning av ordinära differentialekvationer.

Steg 3 till 6 upprepas med $t_{i+1} = t_i + dt$ tills $t_i = t_{max}$.

6.3 Lösning av det karakteristiska systemet

I cylindriska koordinater $\mathbf{x} = (r, \theta, z)$ byts Newtons rörelseekvationer (4.7) ut mot motsvarande i cylindriska koordinater med inerta krafter. Vi parametriserar fasrummet med L_z istället för v_θ för att utnyttja att L_z är bevarad längs partikelbanor. Det resulterande systemet blir

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v}, \\ \frac{dv_r}{dt} = \frac{L_z^2}{r^3} - U_r(\mathbf{x}), \\ \frac{dL_z}{dt} = 0, \\ \frac{dv_z}{dt} = -U_z(\mathbf{x}) \end{cases} \quad (6.2)$$

Vi påminner oss om den begränsning som gjorts för stabilitetsanalysen diskuterad i 4. Det är tydligt att de cylindriska koordinaterna ger upphov till en singularitet i origo. En naiv lösning till detta är att tidsutveckla i kartesiska koordinater. Detta ger dock ett sexdimensionellt fasrum och tidskomplexiteten förvärras avsevärt. Därför tidsutvecklas systemet i cylindriska koordinater men de galaxer som undersöks begränsas till sådana utan massa i origo.

För att numeriskt integrera systemet i (6.2) används mittpunkts-algoritmen (midpoint algorithm).

$$\begin{cases} v_{n+1} = v_n + a_n dt \\ x_{n+1} = x_n + \frac{1}{2}(v_{n+1} + v_n)dt. \end{cases} \quad (6.3)$$

Det finns ett par mer avancerade metoder för att lösa Newtons rörelseekvationer. Dessa kan dock endast användas i Particle-in-cell-metoden om de inte använder a_{n+1} i beräkningen av v_{n+1} .

7 Numeriska resultat och diskussion

Teorin och den numeriska algoritmen som beskrivits kan användas för att modellera olika statistiska galaxer, som till exempel singulara diskgalaxer, sfäriska galaxer och kopplade system av dessa. Parametrarna i ansatsfunktionen kan varieras vilket ger oss möjligheten att modellera och undersöka egenskaper hos olika galaxer. I detta avsnitt presenteras numeriska resultat för att svara på de frågor som ställdes i inledningen. Rotationskurvor till galaxer bestående av enbart en singular disk, en singular disk med en central utbuktning, en singular disk omgiven av mörk materia och en singular disk med central utbuktning omgiven av mörk materia betraktas och jämförs. Numeriska lösningar för tidsutveckling av statistiska galaxer presenteras för att undersöka stabiliteten för lösningar från den statistiska numeriska algoritmen. Till sist jämförs numeriska resultat med observationer.

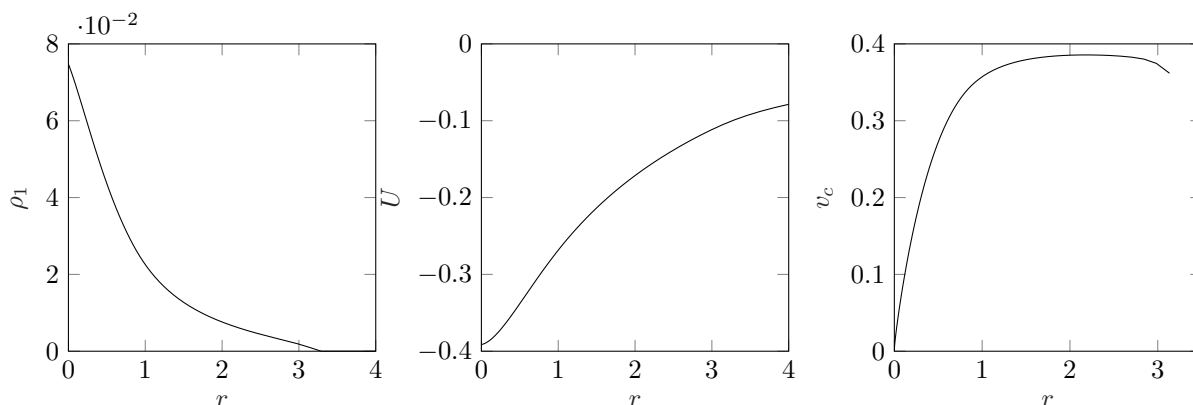
7.1 Diskformade galaxer med central utbuktning

Utgående från de resultat som presenterats i [1] med platta rotationskurvor återskapas en av lösningarna och jämförs med en lösning bestående av en singular disk med central utbuktning. Målet är att se hur lösningarna påverkas av den extra tredimensionella massan i mitten samt att undersöka om det går att producera lösningar för galaxer med betydande central massa som har platta rotationskurvor.

7.1.1 Disk utan central utbuktning

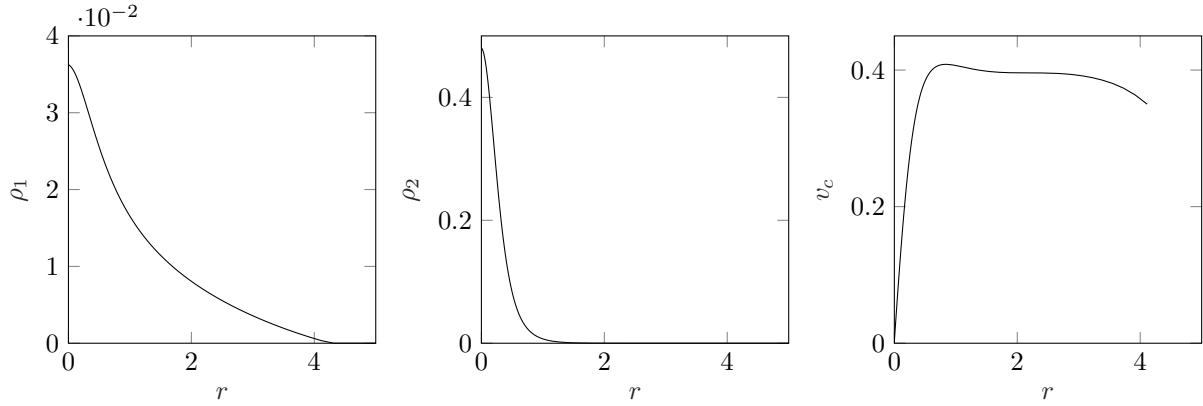
I Figur 3 visas en rekonstruktion av en lösning ifrån [1] för en singular disk. Notera att rotationskurvan är platt, utan införande av mörk materia i form av en halo som innesluter galaxen vilket är den allmänt accepterade modellen för spiralgalaxer. Det är viktigt att dessa rotationskurvor tolkas korrekt. Det är inte hastigheten för partiklarna i lösningen utan hastigheten för testpartiklar som färdas på cirkulära banor i tillhörande potential, något som förklaras i avsnitt 2.6.

Genom att beräkna Γ definierad i (2.20) fås att kravet för existens av cirkulära banor hos testpartiklar är uppfyllt för radier inom $[0, 0.61R_{\max}]$, där R_{\max} är galaxens slut. Om slutet istället definieras som den radie där 99% av galaxens massa är innesluten blir området istället $[0, 0.64R_{99\%}]$.

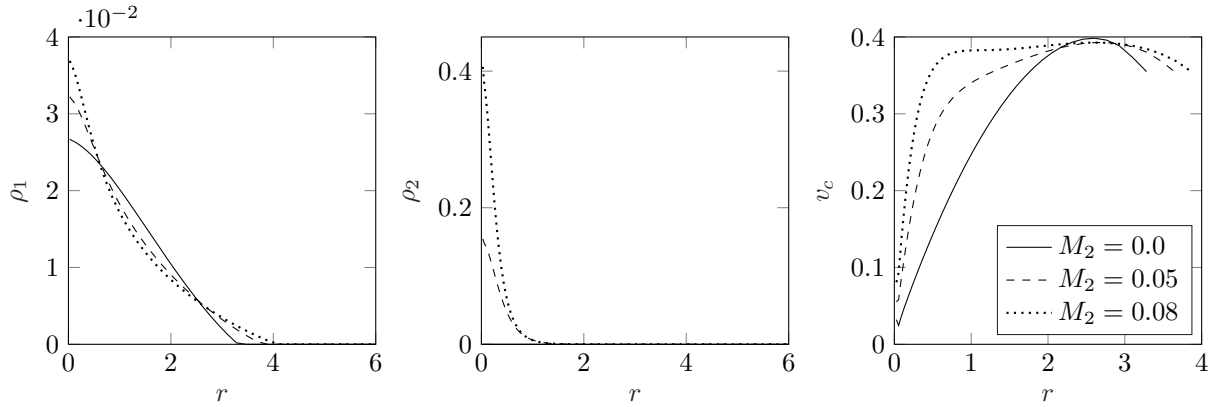


Figur 3: Singular disk med parametrarna: $M_1 = 0.3$, $M_2 = 0$, $k = 0$, $l = 1.0$, $Q = 2.0$, $E = -0.1$.
Figureerna visar densiteten, potentialen och rotationshastigheten för testpartiklar placerade i potentialen från galaxen.

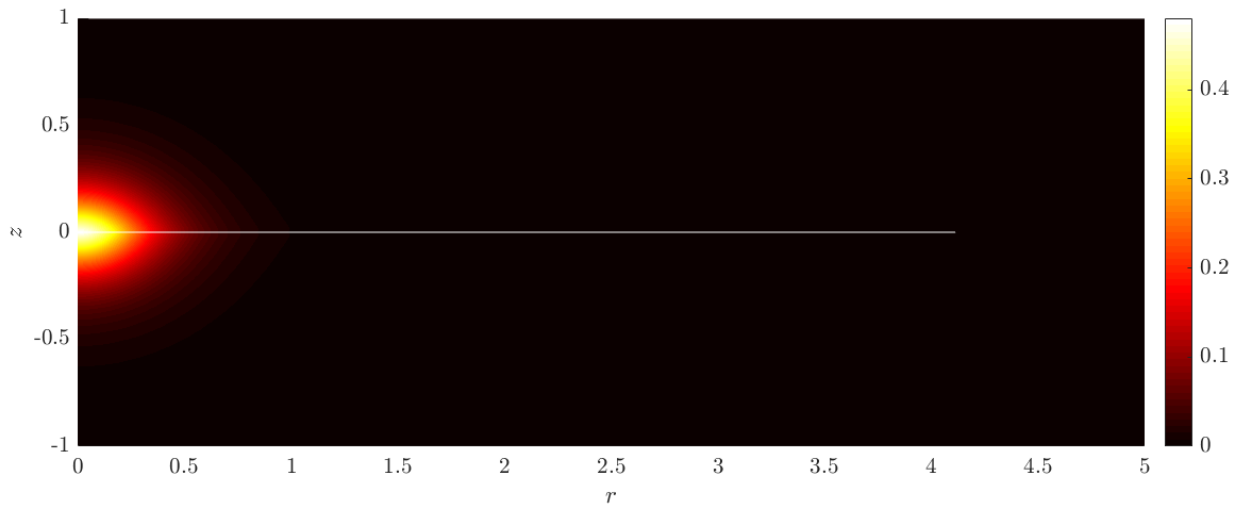
7.1.2 Central utbuktning



Figur 4: Singulär disk med central utbuktning och följande parametrar, $M_1 = 0.3, M_2 = 0.1, k_1 = 0.0, l_1 = 0.5, Q_1 = 0.5, E_{0,1} = -0.1, k_2 = 3.5, l_2 = 0.0, Q_2 = 0.0, E_{0,2} = -0.15$. Till vänster: densiteten för disken. I mitten: densiteten för utbuktningen längs $z = 0$. Till höger: rotationshastigheten för testpartiklar i potentialen.



Figur 5: Singulär disk och central utbuktning med parametrar $k_1 = 0.0, k_2 = 3.5, l_1 = 0.5, l_2 = 0.0, Q_1 = 0.5, Q_2 = 0.0, E_{0,1} = -0.1, E_{0,2} = -0.15$. Figurerna visar densiteten vid $z = 0$ för de två delarna av galaxen samt rotationskurvan vid $z = 0$. Massan hos den centrala utbuktningen antar värden $M_2 = 0.0, 0.5, 0.8$. Notera att $[\rho_1] = ML^{-2}, [\rho_2] = ML^{-3}$

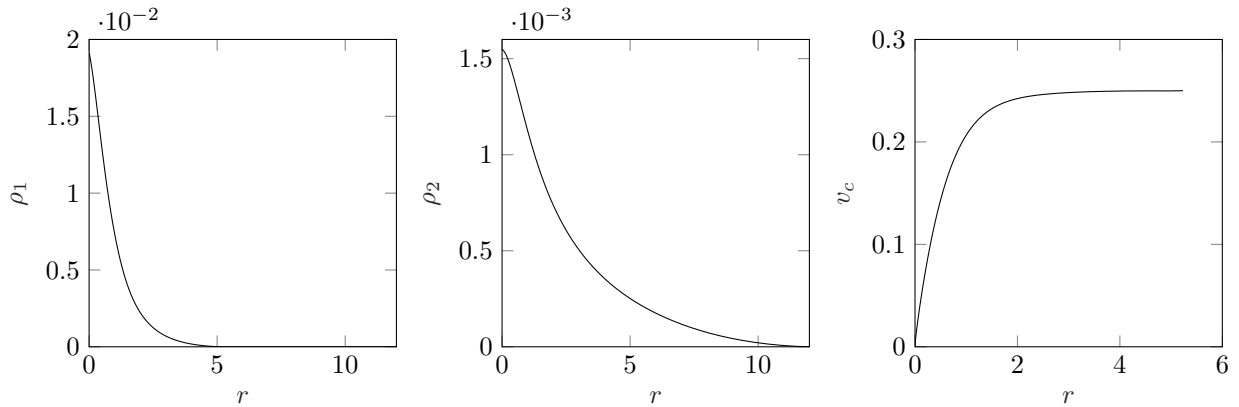


Figur 6: Singulär disk med central utbuktning och samma parametrar som i Figur 4. Figuren visar ρ_2 i en del av det plan som ges av konstant θ . Den ljusa linjen är inlagd för att illustrera diskens utbredning.

Vi inför en central utbuktning till lösningar liknande den i Figur 3. Om utbuktningen är tillräckligt massiv och kompakt är det rimligt att anta att rotationskurvan närmar sig den tillhörande en punktmasa, alltså $v_c \propto r^{-1/2}$. Det finns fall där införandet av en central utbuktning kan göra rotationskurvan plattare

över ett större område vilket visas i Figur 5. Det är också av intresse att förstå hur stor den centrala utbuktningen kan vara gentemot den singulära disken samtidigt som rotationskurvan är platt. Detta går givetvis att heuristiskt testa sig fram till ett sådant löst definierat grännsfall. Ett exempel på en lösning med den karakteristiken visas i Figur 4. I lösningen står den centrala utbuktningen för en fjärdedel av galaxens totala massa och som syns till höger i Figur 4 så är rotationskurvan relativt platt. Detta är möjligt då parametrarna som viktat beroendet på L_z har ändrats gentemot lösningen i Figur 3. En annan egenskap som flera av de lösningar med massiv central utbuktning delar är att deras rotationskurvan är branta för små r jämfört med lösningen i Figur 3. Nämnvärt är att ingen större skillnad ses för området där cirkulära banor kan existera och lösningen i Figur 4 stödjer cirkulära banor i området $[0, 0.61R_{\max}]$, eller $[0, 0.64R_{99\%}]$.

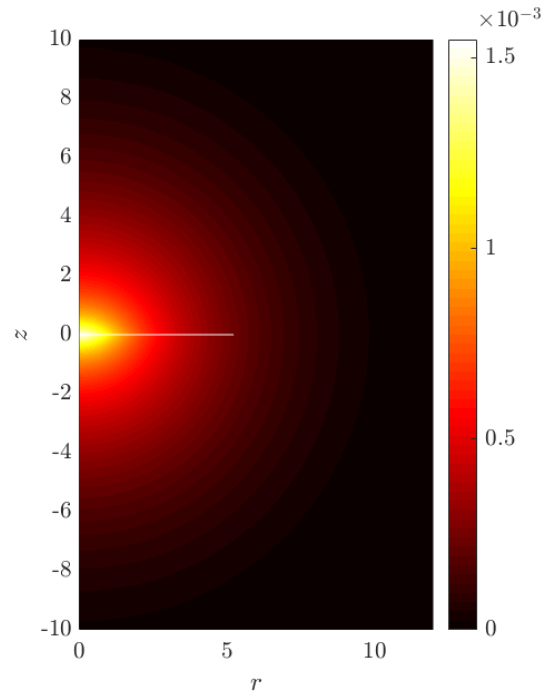
7.2 Diskformade galaxer med mörk materia



Figur 7: Disk med omslutande halo där $M_1 = 0.1, M_2 = 0.5, k_1 = 1.0, l_1 = 1.0, Q_1 = 2.0, E_{0,1} = -0.1, k_2 = 0.0, l_2 = 0.0, Q_2 = 0.0, E_{0,2} = -0.05$. Figurerna visar från höger till vänster, densiteten för disken, densiteten för utbuktningen längs $z = 0$ och rotationshastigheten för testpartiklar i potentialen längs disken. Rotationskurvan slutar där disken slutar.

I förra avsnittet begränsades storleken på den centrala utbuktningen och disken vara betydligt större. Nu görs det motsatta och det som tidigare var en central utbuktning innesluter istället disken. Detta kan ses som en enkel modell för en diskformad spiralgalax som är innesluten i en halo av mörk materia. I föregående del visas att galaxer utan en mörkmateriehalo kan ha platta rotationskurvor, även med en relativt massiv central utbuktning. Därför undersöks vilka andra egenskaper som införandet av en halo ger en diskgalax.

Likt tidigare finns många parametrar och vår utgångspunkt är att finna lösningar där ρ_2 sträcker sig en bit utanför disken samt att rotationskurvan är platt på f_1 s support¹³. Från kosmologin vet vi att massförhållandet mellan synlig och mörk materia i universum är kring 1 : 6. Det finns dock väldigt lite konsensus kring hur mycket mörk materia en typiskt spiralgalax innehåller. Dessa lösningar har ett liknande massförhållandet för att fixera åtminstone en ytterligare parameter. Huvudsakligen väljs storleken på de olika delarna med $E_{0,1}$ och $E_{0,2}$ så att halon innesluter disken. En sådan lösning visas i Figur 7 och Figur 8. För denna lösning beräknas området där testpartiklar på cirkulära banor kan existera till $[0, 0.61R_{\max}]$, eller $[0, 0.78R_{99\%}]$. Här ses en betydande skillnad gentemot systemen med utbuktning eller halo. Men bara om



Figur 8: Halon tillhörande lösningen i Figur 7. Figuren visar densiteten i halon där den singulära diskens utsträckning är markerad med en vit linje.

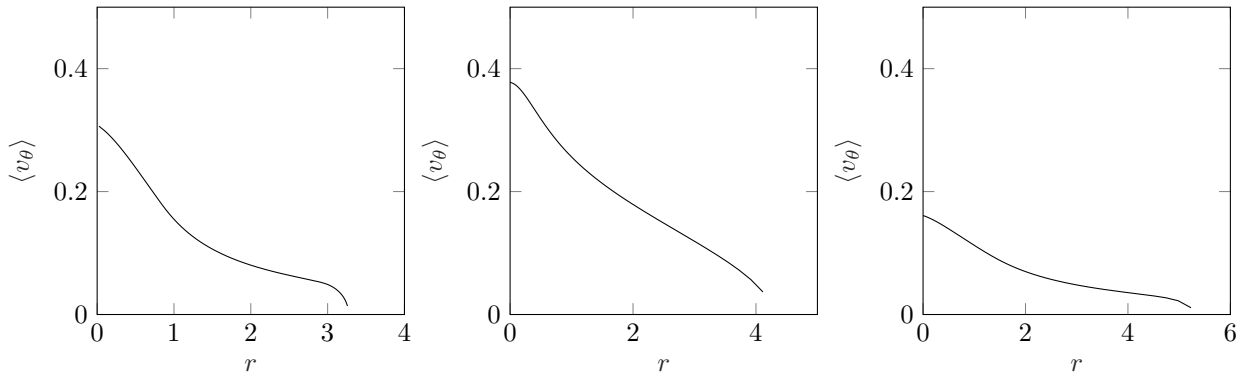
¹³En funktions support är den delmängd av definitionsmängden som inte avbildas på noll.

vi låter galaxen ta slut där 99% av massan är innesluten. En mer extrem lösning visas i Figur 14 och 15. För den lösningen förblir området för existens av cirkulära banor återigen oförändrat om galaxens slut definieras med R_{max} , men till $[0, 0.95R_{99\%}]$ med den andra definitionen. Notera att diskens densitet är oerhört låg för större radier.

7.3 Genomsnittliga tangentiella hastigheter

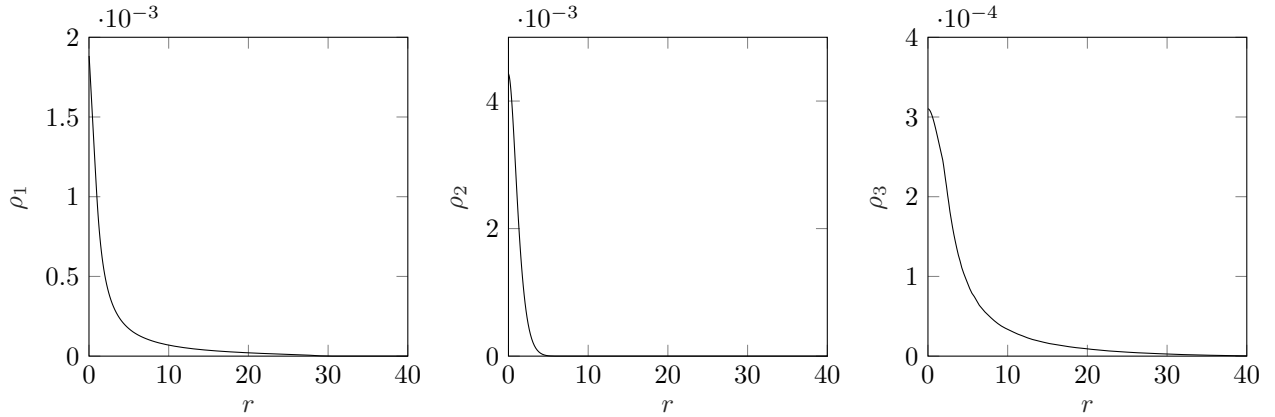
I avsnitt 2.6 diskuteras två olika sätt att definiera rotationshastigheten för en galax, cirkulära rotationskurvor för testpartiklar i galaxens potential samt den genomsnittliga tangentiella hastigheten för stjärnor i galaxen. Hittills har enbart rotationskurvor för testpartiklar betraktats, men det är även relevant att betrakta den genomsnittliga tangentiella hastigheten för stjärnorna. Därför beräknas $\langle v_\theta \rangle$, enligt (2.21), för de tre galaxerna presenterade i Figur 3, 4 samt 7; resultatet presenteras i Figur 9. Trots en markant skillnad i galaxernas struktur skiljer sig inte karakteristiken för $\langle v_\theta \rangle$ galaxerna emellan. För de enskilda galaxerna märks däremot tydliga skillnader mellan $\langle v_\theta \rangle$ och v_c . Notera att $\langle v_\theta \rangle$ representerar rotationshastigheten för stjärnorna i galaxen medan v_c beräknas från testpartiklar.

Att mäta rotationskurvor för stjärnorna i en galax är komplicerat, därför görs istället mätningar på gasmoln som omger stjärnorna. En gaspartikels massa är liten relativt massan för en stjärna vilket gör att mätningarna av gaspartiklarnas rotationskurvor kan liknas vid rotationskurvor för testpartiklar i en galax potentialfält, vilket är vad v_c beskriver. v_c för de tre galaxerna ses i Figur 3, 4 och 7. Varken införandet av en central utbuktning eller en omgivande halo av mörk materia, med de ansatser som använts, ger att de två rotationskurvorna v_c och $\langle v_\theta \rangle$ blir nämnvärt mer överensstämmande än för den singulära galaxen i Figur 3. Det är den allmänna uppfattningen att observationer av gaspartiklarnas rotationskurvor borde överensstämma med rotationskurvorna för stjärnor i en verklig galax då stjärnorna bildas ifrån gaspartiklarna och rörelsemängdsmomentet är bevarat. Diskrepansen mellan v_c och $\langle v_\theta \rangle$ för de tre lösningarna utgör därför en brist i modellen. Det är viktigt att notera att resultaten inte nödvändigtvis är generella, utan gäller för de ansatser och parametrar som presenterats. Det är ett intressant problem att titta på om andra ansatsfunktioner kan ge platta rotationskurvor även för $\langle v_\theta \rangle$ och om andra ansatser kan ge att v_c och $\langle v_\theta \rangle$ överensstämmer, med det är inget som undersökts vidare i denna studie.



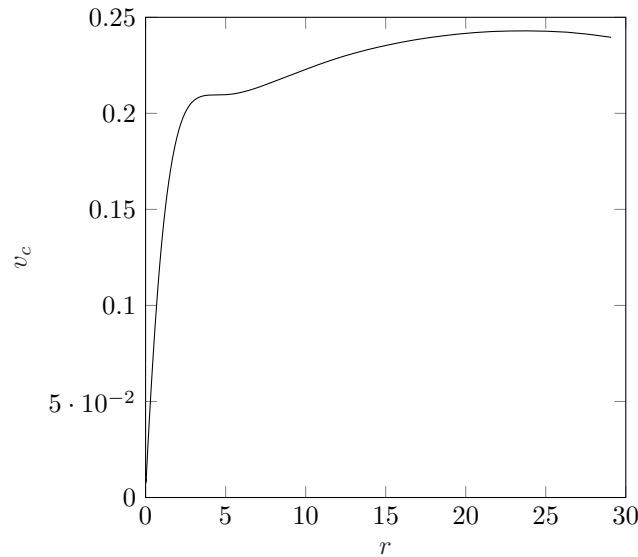
Figur 9: Medelvärde av den tangentiella rotationshastigheten med anseende på radien för tre olika galaxer. Vänster: $\langle v_\theta \rangle$ för galaxen i Figur 3. Mitten: $\langle v_\theta \rangle$ för galaxen i Figur 4. Höger: $\langle v_\theta \rangle$ för galaxen i Figur 7.

7.4 Singulär disk med central utbuktning och omgivande halo



Figur 10: Singulär disk med central utbuktning och omslutande halo av mörk materia. $M_1 = 0.1$, $E_{0,1} = -0.07$, $Q_1 = 2.0$, $l = 1.0$, $k = 0.0$, $M_2 = 0.1$, $E_{0,2} = -0.15$, $Q_2 = 1.0$, $l_2 = 0.0$, $k_2 = 2.0$, $M_3 = 2.0$, $E_{0,3} = -0.05$, $Q_3 = 1.0$, $l_3 = 0.0$ och $k_3 = 0.0$.

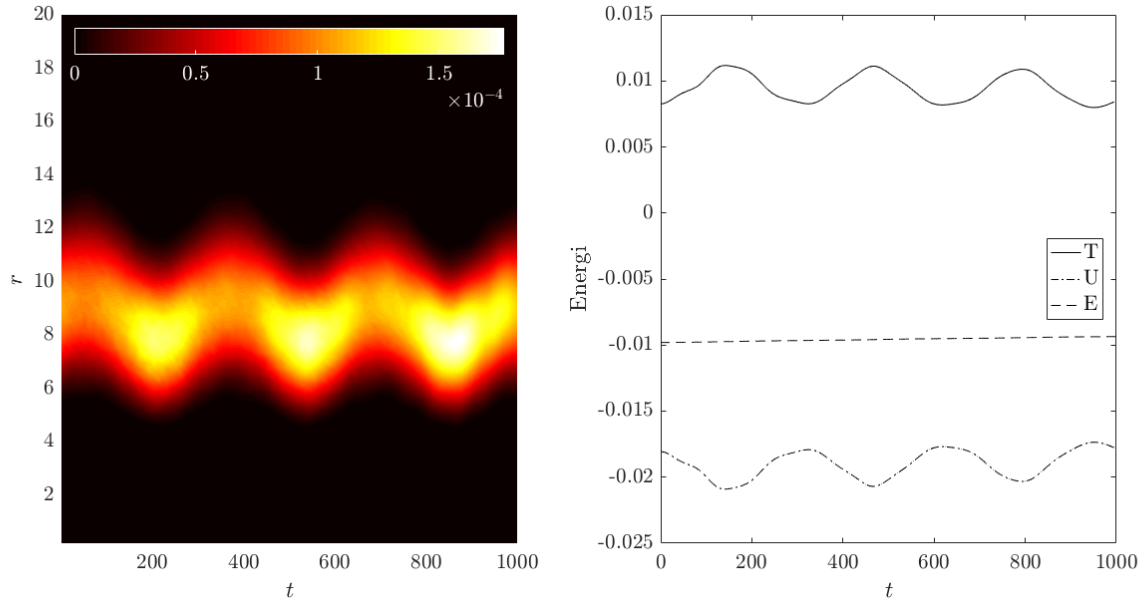
Till vänster: Densiteten för disken, parametrar betecknade med index 1. I mitten: Densiteten för utbuktningen längs $z = 0$, parametrar betecknade med index 2. Till höger: Densiteten för halon längs $z = 0$, parametrar betecknade med index 3.



Figur 11: Rotationskurvan längs $z = 0$ för galaxen med samma parametrar som för galaxen i Figur 10.

Vi betraktar en galax bestående av tre delar: en singulär disk, en central utbuktning och en halo av mörk materia för att undersöka existens av en sådan galax och för att betrakta dess rotationskurva. I Figur 10 visas densiteten för galaxens tre olika delar längs r vid $z = 0$. I Figur 11 visas rotationskurvan för galaxen. Existensområdet för cirkulära banor i galaxen är $[0, 0.60R_{\max}]$ eller $[0, 0.63R_{99\%}]$. Radien R_{\max} är avståndet från origo till diskens slut och $R_{99\%}$ är avståndet från origo till där 99% av diskens massa innesluts. Införande av en massiv omgivande halo av mörk materia leder inte till någon skillnad i existensområdet jämfört med lösningen i Figur 4. Värt att belysa är att parametrarna för galaxen inte är valda för att maximera området för existens av cirkulära banor utan istället för att få önskat förhållande mellan galaxens tre delar samt en platt rotationskurva. En annan egenskap som en central utbuktning ger både lösningen i Figur 4 och lösningen i Figur 10 är att rotationskurvan är brantare och därmed plattare för mindre r , en önskvärd egenskap utgående från de observationer som gjorts, se [rubin].

7.5 Stabilitet



Figur 12: Figuren visar tidsutvecklingen av en statisk lösning störd genom att öka massan med 10% med ansats given av 7.1 med parametrar givna av $M_2 = 0.5$, $E_{0,2} = -0.04$, $k_2 = 0.0$, $l_2 = 0.0$, $Q_2 = 0.0$, $C = 1.0$. Till vänster visas densiteten för olika radier vid $z = 0$ vid olika tider. Till höger visas kinetiska (T), potentiella (U) och totala (E) energin vid olika tidpunkter. Cirka 4.6 miljoner partiklar används för att approximera fasrumsfördelningen.

Det är av intresse att tidsutveckla fullt tredimensionella axisymmetriska statiska lösningar med störd initialdata för att undersöka lösningarnas stabilitet. I ljuset av begränsningen i metoden att inte kunna hantera massa vid $r = 0$ måste först en klass av godtagbara lösningar hittas. Detta görs genom att modifiera ansatsen i (5.1) till att vara

$$\tilde{f}_2(E, L_z) = \begin{cases} f_2(E, L_z) & \text{om } |L_z| > C \\ 0 & \text{annars} \end{cases}, \quad (7.1)$$

där C är en undre begränsning på L_z . Enbart en undre begränsning på $L_z = rv_\theta$ förhindrar inte massa från att befinna sig nära mitten av galaxen. Däremot, i kombination med en övre begränsning på energin, som samtliga av våra ansatsfunktioner inkluderar, tillåts inte hastigheten för stjärnorna vara godtyckligt hög. Således fås en undre begränsning på radien och ingen massa tillåts i en omgivning till origo som bestäms av C och E_0 .

I [4] visas numeriskt hur sfärisksymmetriska statiska lösningar till VP-systemet oscillerar för tillräckligt små sfärisksymmetriska störningar. I [4] störs lösningar på en handfull olika sätt, med liknande resultat. De finner att för tillräckligt små störningar beror frekvensen av oscillationen endast på lösningen och inte på vilken typ av störning.

I Figur 12 visas en tidsutveckling av en statisk lösning. Störningen som tillämpas är av typen *amplitude perturbation* presenterad i [4]. den statiska lösningen f störs enligt $\tilde{f} = (1 + \epsilon)f$, $\epsilon = 0.1$. Värt att notera är att lösningen är axisymmetrisk på fasrummet, således blir även störningen axisymmetrisk. Lösningen upphör att vara statisk, men en tillräckligt robust lösning förväntas inte röra sig avsevärt ifrån sitt ostörda läge. Värt att notera är att en störning inte är helt nödvändig för att få till en oscillation på de numeriska statiska lösningarna. Med den noggrannhet som uppnåtts i den statiska lösningsmetoden så är de numeriska felen nog för att generera oscillationer. Detta kan ses genom att studera totala kinetiska och potentiella energin för galaxen och se hur väl virialteoremet uppfylls. För en ostörd lösning med samma ansats som den i Figur 12 så ges $T = 7.5 \cdot 10^{-3}$ och $U = -1.49 \cdot 10^{-2}$. Virialteoremet är alltså uppnått till en noggrannhet på endast cirka 10% och lösningar borde uppvisa oscillationer. I Figur 16 i Appendix B presenteras tidsutvecklingen av lösningen utan störning. Även utan en explicit störning av amplituden syns liknande oscillationer som i Figur 12.

Noggrannheten i tidsutvecklings-metoden är bestämd av en rad parametrar och det är inte trivialt hur dessa skall väljas för att minimera felet givet en viss beräkningskapacitet. Antalet partiklar som förflyttas är direkt kopplat till diskretiseringen av fasrummet och påverkar hur väl initialfördelning kan

approximeras. Upplösningen av rz -planet påverkar storleken på felet i inter- och extrapoleringar av potentialen. Slutligen påverkas också tidsteget noggrannheten i förflyttningen av partiklar. I Figur 12 ses att den totala energin ökar. Detta är ett mått på hur stort det numeriska felet är då vi behandlar ett slutet system. Notera att lösningen visualiserad i Figur 12 inte är helt periodisk. Om detta är en numerisk artefakt eller en egenskap av en äkta lösning kan vi inte sluta oss till med noggrannheten i simuleringen.

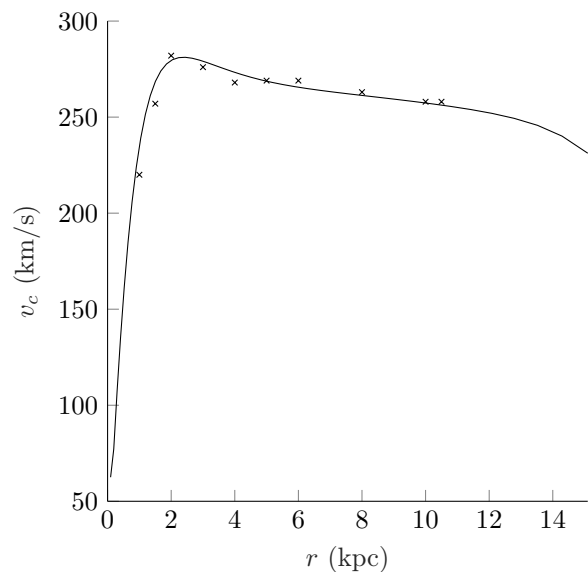
Inga enheter visas på tidsaxeln men partiklarnas genomsnittliga förflyttning beräknas vara runt 9 gånger galaxens radie, alltså uppskattningsvis ett par t_{cross} .

Det går inte att undersöka stabiliteten hos lösningarna till det kopplade VP-systemet presenterade i 7.1 och 7.2 utan att genomföra tidsutvecklingen av dessa lösningar explicit, på samma sätt som för den toroidala lösningen i Figur 12.

7.6 Jämförelse med observationer

Rubin et al. presenterar i [rubin] observationer av rotationskurvor för ett antal spiralgalaxer däribland galaxen NGC 7217¹⁴. I en lista med noteringar kring de studerade galaxerna beskrivs NGC 7217 som "Filamentary, tightly wound spiral arms, big bulge galaxy"(V. Rubin 1982, s.441 [rubin]). En ansats tillämpas på VP-systemet för en disk med en central utbuktning för att hitta en statisk lösning med en rotationskurva som stämmer överens med den observerade för NGC 7217. I Figur 13 presenteras rotationskurvan för denna lösning tillsammans med observationsdata av NGC 7217 hämtad från [rubin].

I avsnitt 2.2 presenteras VP-systemet på dimensionslös form. Den enda fysikaliska konstant som uppträder i systemet, G , normaliseras till 1. Vi kan således fritt välja enheter för tid, längd och massa så länge $G = 1$ uttryckt i dessa enheter. Uttryckt i enheter vanliga inom astronomin är $G = 4.30091 \cdot 10^{-6} \text{ kpc } M_{\odot}^{-1} (\text{km/s})^2$.¹⁵ I Figur 13 är enheten för längd vald så att radien för lösningen sammanfaller med den observerade galaxradien, och enheten för hastighet vald så att lösningens rotationshastighetskurva är i höjd med de observerade rotationshastigheterna. Detta val av enheter implicerar en enhet för massa. Genom att uttrycka $M_1 + M_2$ i denna enhet erhålls en prediktion av galaxens massa, $M_{7217} = 1.4938 \cdot 10^{11} M_{\odot}$. Rubin et al. uppskattar massan för NGC med hjälp av den observerade rotationskurvan till $M_{7217} = 2.27 \cdot 10^{11} M_{\odot}$ [rubin]¹⁶. Trots osäkerheter i hur massan beräknas ser vi att denna metod ger ett svar i en överensstämmande storleksordning. Mer intressant är att modellen över huvudtaget kan generera en rotationskurva lik den observerad i [rubin], dessutom utan införandet av mörk materia i modellen. Lösningen består i sin helhet av en disk med en central utbuktning vilket är hur NGC 7217 beskrivs av författarna.



Figur 13: Disk med central utbuktning där $M_1 = 0.3$, $M_2 = 0.0815$, $k_1 = 0.0$, $k_2 = 3.5$, $l_1 = 1.0$, $l_2 = 0.0$, $E_{0,1} = -0.1075$, $E_{0,2} = -0.19$, $Q_1 = 1.0$, $Q_2 = 0.0$. Figuren visar beräknad rotationskurva (heldragen) tillsammans med observerade värden tillhörande spiralgalaxen NGC7217 (kryss), med angiven radie $R = 15.1 \text{ kpc}$, hämtad från [rubin].

8 Framtida utvidgningar av projektet

Införandet av en central utbuktning och en halo av mörk materia i den modell som presenterades i [1] har lett till flera intressanta resultat. Jämförelser med observationer visar att utvecklingen av modellen är ett steg i rätt riktning för förståelsen av galaxer och deras rotationskurvor. Resultaten visar även på att det finns mycket kvar att undersöka och brister i modellen har lyfts fram. I det här avsnittet diskuteras frågeställningar som väckts under projektet.

Studien har endast berört en typ av ansats för fördelningsfunktionen f . Ansatsfunktionen avgränsar storleken på galaxerna genom att sätta en gräns på energin, E_0 . Vid galaxens kanter närmar sig den

¹⁴NGC, *A New General Catalogue of Nebulae and Clusters of Stars*, är en astronomisk katalog sammanställd av J.L.E Dreyer år 1888.

¹⁵En solmassa är definierad som $1 M_{\odot} = 1.98847 \cdot 10^{30} \text{ kg}$, och en kiloparsec, $1 \text{ kpc} = 3.08567758 \cdot 10^{19} \text{ m}$.

¹⁶I [rubin2] uppskattar samma författare massan för NGC 7217 till $M_{7217} \approx 1.5 \cdot 10^{11} M_{\odot}$ baserat på snarlika rotationsdata.

potentiella energin E_0 och den kinetiska energin går således mot noll, därmed kan inte cirkulära rotationskurvor existera i detta område. Att öka existensområdet för cirkulära rotationskurvor har varit ett fokus i detta arbetet men inga av de resultat som erhållits har haft cirkulära rotationskurvor längre ut än 70% av totala radien för galaxen. Ingen av de galaxer som modellerats har haft platta rotationskurvor för medelhastigheten $\langle v_\theta \rangle$ för stjärnor i galaxen, se Figur 11, vilket är en stor brist för modellen. Det är en intressant utvidgning av projektet att testa om andra ansatsfunktioner kan lösa dessa problem. Värt att notera är också att alla statiska axisymmetriska lösningar till Vlasov-Poissonsystemet inte kan studeras med ansatser endast beroende av E och L_z då det i allmänhet finns fler rörelseintegraler. Dessa antar dock sällan analytiska uttryck och är därför mycket svåra att inkludera, se s.156 [3].

Tester för stabilitet av de statiska lösningarna har enbart gjorts med toroidala initialvillkor. Detta eftersom koden som använts inte kan hantera partiklar i galaxens centrum på ett bra sätt. Det är intressant att utveckla en variant av Particle-in-cell-metoden som kan tidsutveckla de galaxer som presenteras i rapporten för att testa deras stabilitet. Detta innebär förmodligen att använda en numerisk metod för att lösa Newtons rörelseekvationer i cylindriska koordinater som kan hantera partiklar nära origo. Ett exempel på en sådan metod har utvecklats för plasmamodellering och beskrivs av Delzanno och Camporeale i [7], men inte lyckats implementeras av författarna till detta projekt.

Referenser

- [1] Håkan Andréasson och Gerhard Rein. “On the rotation curves for axially symmetric disc solutions of the Vlasov–Poisson system”. I: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 446.4 (dec. 2014), s. 3932–3942. DOI: 10.1093/mnras/stu2346. URL: <https://dx.doi.org/10.1093/mnras/stu2346>.
- [2] Roman Firt, Gerhard Rein och Martin Seehafer. “Flat Galaxies with Dark Matter Halos—Existence and Stability”. I: *Communications in Mathematical Physics* 291.1 (okt. 2009), s. 225–255. DOI: 10.1007/s00220-009-0872-7. URL: <https://doi.org/10.1007/s00220-009-0872-7>.
- [3] James Binney och Scott Tremaine. *Galactic Dynamics, Revised Second Edition*. Princeton University Press, 2008. ISBN: 9780691130279.
- [4] Tobias Ramming och Gerhard Rein. “Oscillating solutions of the Vlasov–Poisson system – A numerical investigation”. I: *Physica D: Nonlinear Phenomena* 365.1 (febr. 2018), s. 72–79. DOI: 10.1016/j.physd.2017.10.013. URL: <https://arxiv.org/abs/1602.07989v1>.
- [5] Håkan Andreasson och Gerhard Rein. “A numerical investigation of the stability of steady states and critical phenomena for the spherically symmetric Einstein–Vlasov system”. I: *Classical Quantum Gravity* 23.11 (2006), s. 3659–3677. DOI: 10.1088/0264-9381/23/11/001.
- [6] R. Courant och D. Hilbert. *Methods of Mathematical Physics Vol. 2 Partial Differential Equations*. John Wiley Sons, 1989, s. 28–32. ISBN: 0471504394.
- [7] G.L. Delzanno och E. Camporeale. “On particle movers in cylindrical geometry for Particle-In-Cell simulations”. I: *Journal of Computational Physics* 253 (2013), s. 259–277. ISSN: 0021-9991. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2013.07.007>. URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999113004798>.

A Härledning av potentialen i cylindriska koordinater

Vi vill hitta ett uttryck för en tidsberoende potential U skriven i cylindriska koordinater. Vi utgår därför från (2.8) och tar bort tidsberoendet.

$$U(\mathbf{x}) = - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d^3\mathbf{y}, \quad (\text{A.1})$$

där $\rho(r, z) = \rho_1(r)\delta(z) + \rho_2(r, z)$. Punkten \mathbf{x} uttrycks nu i de polära koordinaterna (r, θ, z) för att kunna utnyttja potentialens axisymmetri på följande sätt.

$$U(\mathbf{x}) = U(r, \theta, z) = U(r, 0, z) := U(r, z). \quad (\text{A.2})$$

Integrationsvariabeln \mathbf{y} i (A.1) uttrycks nu också i polära koordinater $\mathbf{y} := (s, \varphi, \zeta)$. Detta ger oss att avståndet i kvadrat mellan en punkt $\mathbf{x} = (r, 0, z)$ och \mathbf{y} kan skrivas som

$$\begin{aligned} |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2 &= (r - s \cos \varphi)^2 + (-s \sin \varphi)^2 + (z - \zeta)^2 = \\ &= (r + s)^2 - 4rs \cos^2 \frac{\varphi}{2} + (z - \zeta)^2 = \left((r + s)^2 + (z - \zeta)^2 \right) \left[1 - k^2 \cos^2 \frac{\varphi}{2} \right], \\ k &= \frac{2\sqrt{rs}}{\sqrt{(r + s)^2 + (z - \zeta)^2}}. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Genom att tillämpa första ordningens elliptiska integral,

$$K(\xi) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1 - \xi^2 t^2} \sqrt{1 - t^2}} \quad 0 \leq \xi \leq 1, \quad (\text{A.4})$$

följer det med substitutionen $t = \cos \frac{\varphi}{2}$ att

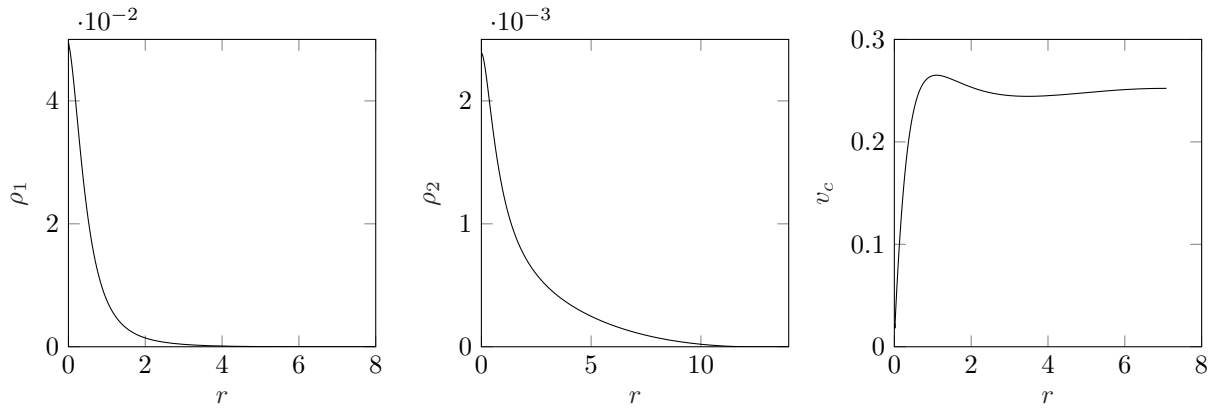
$$\begin{aligned} U(r, z) &= - \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_0^{2\pi} \frac{s\rho(s, \zeta)}{|(r, 0, z) - \mathbf{y}|} d\varphi d\zeta ds = \\ &= - \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \frac{s\rho(s, \zeta)}{\sqrt{(r + s)^2 + (z - \zeta)^2}} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \cos^2 \frac{\varphi}{2}}} d\zeta ds = \\ &= -4 \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \frac{s\rho(s, \zeta)}{\sqrt{(r + s)^2 + (z - \zeta)^2}} K(k) d\zeta ds. \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Vi påminner om att masstätheten ges av $\rho(r, z) = \rho_1(r)\delta(z) + \rho_2(r, z)$. Vi låter $U(r, z) = U_1(r, z) + U_2(r, z)$ där U_1 och U_2 är bidraget från ρ_1 och ρ_2 respektive. Insättning ger då att

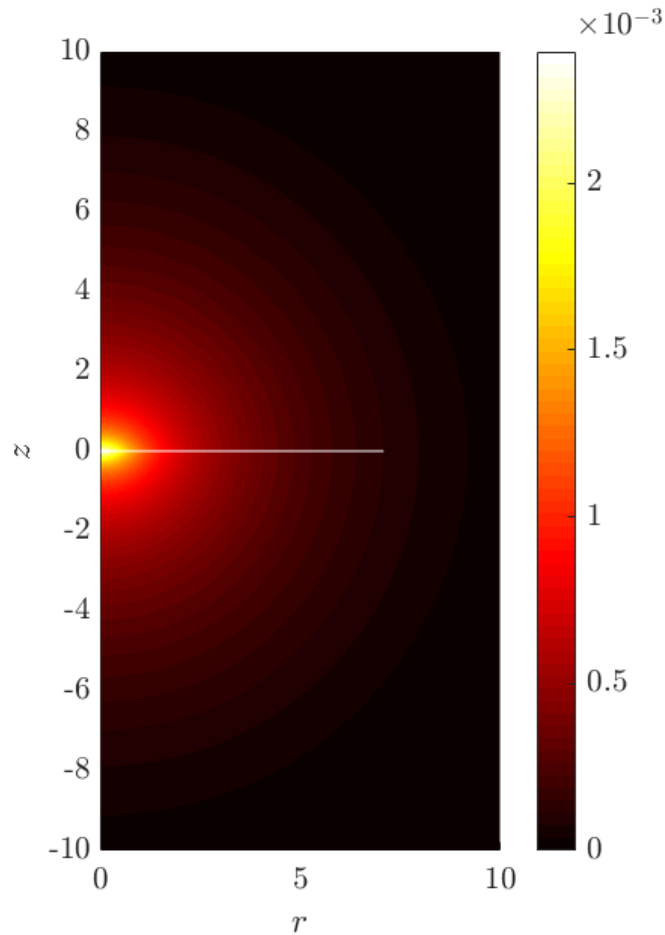
$$U_1(r, z) = -4 \int_0^\infty \frac{s\rho_1(s)}{\sqrt{(r + s)^2 + z^2}} K(k|_{\zeta=0}) ds. \quad (\text{A.6})$$

$$U_2(r, z) = -4 \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \frac{s\rho_2(s, \zeta)}{\sqrt{(r + s)^2 + (z - \zeta)^2}} K(k) d\zeta ds. \quad (\text{A.7})$$

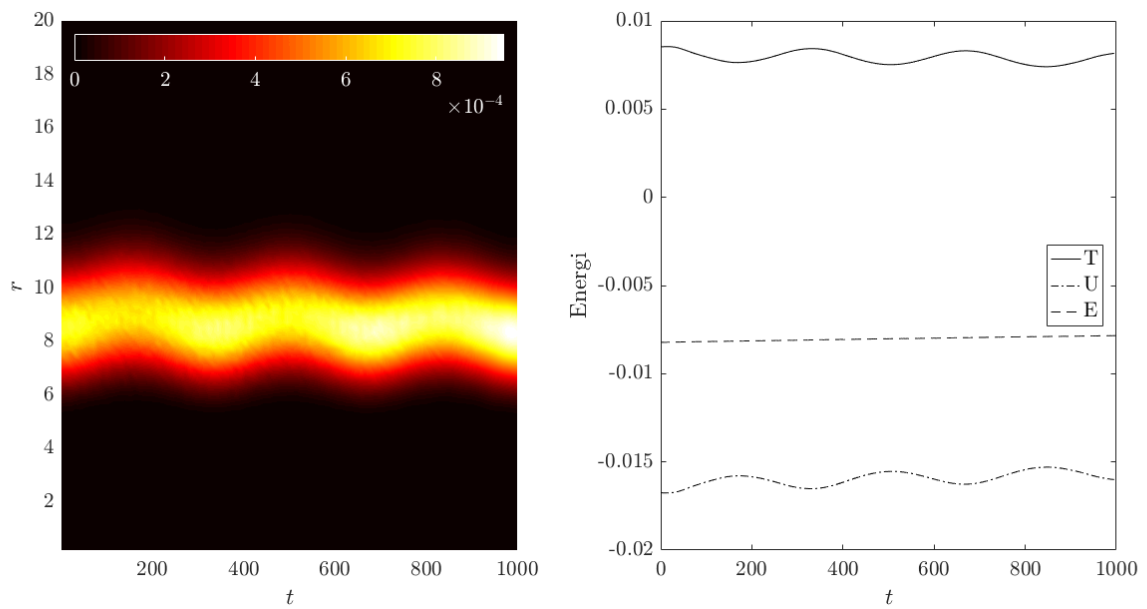
B Kompletterande figurer



Figur 14: Disk med omslutande halo där $M_1 = 0.1, M_2 = 0.5, k_1 = 2.0, l_1 = 1.0, Q_1 = 2.0, E_{0,1} = -0.08, k_2 = 0.0, l_2 = 0.0, Q_2 = 0.0, E_{0,2} = -0.05$. Figurerna visar densiteten för disken, densiteten för utbuktningen längs $z = 0$ och rotationshastigheten för testpartiklar i potentialen längs disken. Rotationskurvan slutar där disken slutar. Området med existens av singulära banor är $[0, 0.61R_{max}]$ eller $[0, 0.95R_{99\%}]$



Figur 15: Halon tillhörande lösningen i Figur 14. Figuren visar densiteten i halon där den singulära diskens utsträckning är markerad med en vit linje.



Figur 16: Tidsutveckling av en statisk lösning given av parametervärderna $M_2 = 0.5$, $E_{0,2} = -0.04$, $k_2 = 0.0$, $l_2 = 0$, $Q_2 = 0.0$, $C = 1.0$. Till vänster visas densiteten för olika radier vid $z = 0$ vid olika tider. Till höger visas kinetiska (T), potentiella (U) och totala (E) energin vid olika tidpunkter. Runt 4.6 miljoner partiklar används för att approximera fasrumsfördelningen.