CHALMERS | GÖTEBORGS UNIVERSITET

Radon, radar och representationsteori

Harmonisk analys med tillämpningar

Examensarbete för kandidatexamen i matematik vid Göteborgs universitet

Mattias Byléhn
Rahim Nkunzimana

Institutionen för Matematiska vetenskaper
CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
GÖTEBORGS UNIVERSITET
Göteborg, Sverige 2019

Radon, radar och representationsteori

Harmonisk analys med tillämpningar

Examensarbete för kandidatexamen i matematik vid Göteborgs universitet

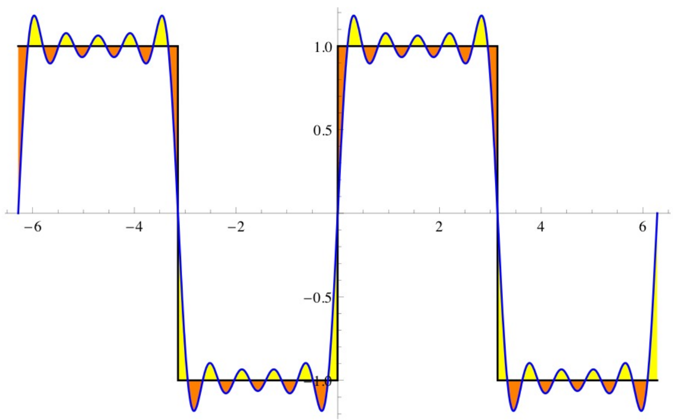
Mattias Byléhn   Rahim Nkunzimana

Handledare: Michael Björklund
Genkai Zhang
Examinator: Ulla Dinger
Maria Roginskaya

Institutionen för Matematiska vetenskaper
CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
GÖTEBORGS UNIVERSITET
Göteborg, Sverige 2019

Populärvetenskaplig presentation

Vågor är fundamentala objekt inom bland annat fysik och de förekommer i vår vardag i form av till exempel ljud, ljus, vattenvågor och signaler i elektronisk utrustning. En typisk våg är *sinusvågen*, som i musiksammanhang kan tolkas som en ren ton/ren frekvens. De flesta ljud och signaler som vi stöter på är dock nästan aldrig rena, utan i någon mer oregelbunden form. När man till exempel spelar ett ackord på en gitarr produceras nya vågor som kombinationer av de rena tonerna. Vi säger att vågorna *adderas*. Det är nu rimligt att fråga sig om alla vågor dyker upp på detta sätt, alltså om de ges av en summa av rena frekvenser. Den franske matematikern och fysikern Jean-Baptiste Joseph Fourier svarade i början av 1800-talet på denna fråga i sina studier om värmeflöde. Han visade att varje periodisk våg kan uttryckas som en summa av dess rena delfrekvenser. Vidare införde Fourier den så kallade *Fouriertransformen*, som tar en våg och ger hur stor del av en viss frekvens vågen i fråga innehåller.



Figur 1: En approximation av en fyrkantsvåg med sinusvågor.

Varje periodisk våg bestäms entydigt av sitt beteende över en period. Därför kan man tolka periodiska vågor som funktioner på cirkeln och omvänt. Om man till exempel observerar något tidsberoende fenomen över en dag som upprepar sig varje timme kan man se det som ett fenomen beroende av klockans minutvisare snarare än tid. Annorlunda formulerat så visade Fourier alltså att varje funktion på cirkeln kan uttryckas som en summa av enkla funktioner motsvarande de rena frekvenserna. I denna rapport visar vi hur man kan generalisera denna uppdelning i enkla funktioner - motsvarande rena toner - på två andra matematiska objekt utöver cirkeln.

Det första som studeras är sfären och vi visar att motsvarigheten till rena frekvenser blir så kallade *klotytefunktioner*. De har en nära koppling till kvantmekanik på det sättet att de beskriver olika tillstånd en elektron, kretsandes kring en atomkärna, kan anta. Vi kan således tolka en elektrons tillstånd i termer av dess ”rena frekvenser” och vi konstruerar sedan en analog till Fouriertransformen som mäter hur stor del av ett tillstånd, säg en elektron, är i. Detta ger upphov till det som man i kemi och fysik kallar för *orbitaler*.

Vi studerar också *Heisenberggruppen* som kopplar de två fundamentala fysikaliska storheterna läge och moment i kvantmekanik. En familj av enkla funktioner bestäms och vi definierar även här en analog till Fouriertransformen.

Sammanfattning

Detta arbete behandlar grunderna i harmonisk analys på sfären S^2 och den reducerade Heisenberggruppen H_1. Vi presenterar grundläggande terminologi för unitära representationer och visar hur man kan utvidga grundläggande koncept från Fourieranalys till sfären och Heisenberggruppen. Huvudsyftet är att visa att vi får en lämplig ortogonal uppdelning av $L^2(S^2)$ genom matriskoefficienter och att detta väsentligen stämmer även för $L^2(H_1)$. Slutligen beräknar vi matriskoefficienterna och finner att de kan uttryckas i termer av Legendrepolynom i S^2-fallet respektive Laguerrepolynom i H_1-fallet.

Abstract

This paper concerns the foundations of harmonic analysis on the sphere S^2 and on the reduced Heisenberg group H_1. We present the basic language of unitary representations and show how one may generalise the core concepts of Fourier analysis to the sphere and the Heisenberg group. The main goal is to show that one obtains a suitable orthogonal decomposition of $L^2(S^2)$ by way of matrix coefficients; and that this is essentially the case with $L^2(H_1)$ as well. Finally, we calculate the matrix coefficients corresponding to the irreducible representations and find that they can be expressed in terms of Legendre polynomials in the S^2 case and Laguerre polynomials in the H_1 case.

Innehåll

Förord

Det här är ett kandidatarbete som behandlar grunderna för harmonisk analys på sfären och den reducerade Heisenberggruppen. Arbetet behandlar grunder inom områden som topologi, integrationsteori, funktionalanalys samt algebra och läsaren väntas ha matematiska kunskaper motsvarande en kandidatexamen. Vi tackar våra handledare Michael Björklund och Genkai Zhang för deras engagemang, värdefulla diskussioner och intressanta föreläsningar. Vi riktar också ett tack till Erik Håkansson för hans stora hjälp med diverse detaljer genom arbetet. Arbetet med rapporten har delats jämnt av bägge författare; en dagbok och tidslogg har förts där arbetsprocessen redovisas.

Syfte

Resultaten som diskuteras i rapporten är klassiska och välstuderade inom området harmonisk analys. En del av syftet är att återge en central del av den grundläggande harmoniska analysen i två speciella fall. Utöver detta görs även explicita beräkningar, som inte är särskilt lättillgängliga i litteraturen. För att precisera syftet så ämnar rapporten finna basfunktioner för ett särskilt rum av funktioner på sfären och Heisenberggruppen (vars definition ges i Sektion 5). Vi skall etablera följande satser:

Sats A. *Funktionerna*

$$Y_m^n(\theta,\varphi) = \frac{1}{(|m|!)^2}\sqrt{(2n+1)\frac{(n-m)!}{(n+m)!}}P_m^n(\cos\varphi)\mathrm{e}^{im\theta}, \quad n\in\mathbb{N}_0, |m|\le n$$

är en ortonormal bas i $L^2(S^2)$ på det sättet att varje $f\in L^2(S^2)$ kan skrivas som

$$f = \sum_{n\ge 0}\sum_{|m|\le n}\langle f, Y_m^n\rangle Y_m^n.$$

Sats B. *Funktionerna*

$$\psi_{kl}^n(t,x+iy) = \sqrt{|n|}\mathrm{e}^{-2\pi int}\sqrt{\frac{l!}{k!}}(-i\sqrt{\pi}z)^{k-l}\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}|nx+iy|^2}L_l^{k-l}(\pi|nx+iy|^2),$$

$$\psi_{lk}^n(t,z) = \overline{\psi_{kl}^n(-t,-z)}, \quad n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}, k,l\in\mathbb{N}_0, k\geqslant l$$

bildar för varje $n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ en ortonormal bas i $L^2(\mathbb{C})$ på det sättet att varje $g\in L^2(H_1)$ kan skrivas som

$$g(t,z) = \int_{\mathbb{C}}\widehat{g_0}(w)\chi_z(w)dw + \sum_{n\neq 0}\sum_{k,l\ge 0}\langle g,\psi_{kl}^n\rangle\psi_{kl}^n(t,z),$$

där

$$g_0(z) = \int_{S^1} g(t,z)dt, \quad \chi_z(w) = \mathrm{e}^{2\pi i\langle z,w\rangle}.$$

Funktionerna P_m^n och L_k^l som dyker upp i formlerna kallas för Legendre- respektive Laguerrepolyom och det visar sig att denna typ av så kallade *speciella funktioner* frekvent dyker upp inom representationsteori och harmonisk analys.

Avgränsningar

Eftersom vårt syfte är konkret - och på grund av begränsningen i rapportens omfång - har vi strävat efter att endast ha med den teori som verkligen krävs för att nå vårt mål. Dessa avgränsningar har inte bara varit nödvändiga men har även förhoppningsvis bidragit till att göra målet mer tydligt.

Metod och genomförande

Rapporten är främst grundad i litteraturstudier samt diskussioner och föreläsningar med handledarna. I rapporten formuleras centrala definitioner och resultat men för att göra stoffet mer lättillgängligt antas i vissa delar en mer diskursiv ton, i stället för att endast presentera formella satser och bevis. Bevisen av vissa centrala resultat har lämnats åt referenser för att rapporten ska vara mer lättillgänglig, men vissa bevis presenteras inte för att de inte tillför något mer än påståendet i sig. En stor del av arbetet har också bestått i att utföra och presentera tekniska kalkyler i rapporten.

Disposition

Vi inleder rapporten med en kort introduktion.

I Sektion 2 presenteras centrala begrepp som läsaren inte förväntats vara bekant med sedan innan.

Sektion 3 ämnar att introducera läsaren till ett annat perspektiv på Fourieranalysen som lättare generaliseras till de fall som rapporten behandlar.

I Sektion 4 presenteras det första problemet och vi visar det första huvudresultatet - som generaliserar Fourieranalysen till funktioner på sfären. Här ser vi också hur teorin som utvecklats kan tillämpas i tomografi.

I Sektion 5 studeras Heisenberggruppen. Här bevisas det andra huvudresultatet och vi tillämpar delar av resultatet inom radar.

1 Introduktion

Det råder ingen tvekan om att grupper är intressanta objekt att studera inom många områden av matematik och det är vidare intressant att studera funktioner, säg komplexvärda, på grupper. Funktioner från en grupp G till $\mathbb{C}$ kan på ett naturligt sätt adderas och multipliceras med en skalär på grund av vektorrumsstrukturen på $\mathbb{C}$. Detta ger ett vektorrum $\mathbb{C}^G = \{f : G \to \mathbb{C}\}$ och vi kan identifiera G med till exempel indikatorfunktioner. I fallet då G är en ändlig abelsk grupp, säg $G = \mathbb{Z}_n$ för något $n \in \mathbb{N}$ är $\{f_k : l \mapsto \mathrm{e}^{2\pi i k \frac{l}{n}}\}$ en ortonormalbas för skalärproduktsrummet $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_n} \cong \mathbb{C}^n$, så vi kan skriva varje komplexvärd funktion på $\mathbb{Z}_n$ som en linjärkombination av dessa komplexa exponentialer. Den unitära avbildningen som tar $f \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_n}$ till funktionen $l \mapsto \sum_{k \in \mathbb{Z}_n} f(k)\mathrm{e}^{-2\pi i k \frac{l}{n}}$ kallas för den *diskreta Fouriertransformen*. Mer allmänt ger Fourieranalys en uppdelning av 'snälla' delrum av funktioner på till exempel cirkeln S^1 och $\mathbb{R}$ i form av komplexa exponentialer. Det är alltså rimligt att fråga sig om det för andra grupper går att uttrycka funktioner - eller åtminstone något intressant delrum av funktioner - med en bas på samma sätt som ovan.

2 Representationsteoretisk bakgrund

För att kunna ta oss an huvudsatserna formulerade i syftet introduceras först ett par begrepp och resultat. Vi inleder med att återge några grundläggande begrepp för Hilbertrum av godtycklig dimension och introducerar grundläggande terminologi i teorin för *grupprepresentationer* som kommer att behandlas i kommande avsnitt. Vi noterar att följande definitioner inte är i sin mest generella form utan är preciserade till de fall som rapporten berör.

Ett **Hilbertrum** är ett komplext inre produktrum $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ som är fullständigt med avseende på normen $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$. Ett Hilbertrum som är av stort intresse i denna rapport är följande: För ett mätbart rum (X,m) är

$$L^2(X,m) = \left\{ f : X \to \mathbb{C} \,\middle|\, \int_X |f|^2 dm < \infty \right\} \Big/ \sim \quad ,$$

där ekvivalensrelationen $\sim$ ges av att $f \sim g$ precis om $m(\{f \neq g\}) = 0$, ett Hilbertrum med avseende på skalärpodukten

$$\langle f, g \rangle = \int_X f \overline{g} dm.$$

Vi betraktar speciellt fallet då $X = G$ är en lokalt kompakt grupp och m_G är **vänsterinvariant**, det vill säga $m_G(gS) = m_G(S)$ för varje Borelmängd $S \subset G$.

En kontinuerlig linjär avbildning $T : V_1 \to V_2$ är en isomorfi om det är en linjär homeomorfi. Vi kallar en isomorfi för en *isometrisk isomorfi* om $\langle Tx, Ty \rangle_{V_2} = \langle x, y \rangle_{V_1}$ för alla $x, y \in V_1$. Vi definierar den **unitära gruppen** $\mathrm{U}(V)$ hörande till V att vara rummet av isometriska isomorfier $T : V \to V$. Således är unitära operatorer särskilt homeomorfier av V.

Med det **duala vektorrummet** V^* menar vi rummet av kontinuerliga linjära funktionaler; *Frechét-Riesz representationssats* [EW17, Cor. 3.19] ger en antilinjär isometrisk isomorfi $\psi : V \to V^*$ given av $\psi(v) = \langle \cdot, v \rangle$. Det finns således en naturlig inre produkt på dualen given av

$$\langle u^*, v^* \rangle_{V^*} := \langle v, u \rangle_V$$

där $u^*, v^* \in V^*$ är funktionalerna som representeras av $u, v \in V$.

Med Hilbertkompletteringen av ett inre produktrum V menar vi det minsta Hilbertrummet $U \supset V$

sådant att varje Cauchyföljd i V i är konvergent [EW17, Thm. 2.32]. Notera att varje ändligdimensionellt inre produktrum är fullständigt, så Hilbertkomplettering kommer endast vara intressant i fallet av oändligdimensionella vektorrum.

Låt V_1, V_2 vara Hilbertrum. Den **direkta summan** av vektorrummen $V_1 \oplus V_2$ blir ett Hilbertrum genom att definiera en inre produkt

$$\langle u_1 \oplus u_2, v_1 \oplus v_2 \rangle_{V_1 \oplus V_2} := \langle u_1, v_1 \rangle_{V_1} + \langle u_2, v_2 \rangle_{V_2}, \quad u_i, v_i \in V_i.$$

När vi har oändligt många icke-triviala Hilbertrum V_i så är den direkta summan $\bigoplus_i V_i$ inte längre Hilbert. Vi definierar Hilbertsumman $\widehat{\bigoplus}_i V_i$ som Hilbertkompletteringen av den direkta summan med avseende på den inre produkten.

Vi beskriver också vad som menas med **tensorprodukten** $V_1 \otimes V_2$. Den algebraiska tensorprodukten $V_1 \otimes V_2$ är det fria vektorrummet genererat av baselement i $V_1 \times V_2$ modulo relationerna

$$(u_1, u_2) + (v_1, u_2) = (u_1 + v_1, u_2), \quad (u_1, u_2) + (u_1, v_2) = (u_1, u_2 + v_2), \quad c(u_1, u_2) = (cu_1, u_2) = (u_1, cu_2).$$

Tensorprodukten av Hilbertrum är Hilbertkompletteringen $V_1 \widehat{\otimes} V_2$ av $V_1 \otimes V_2$ med avseende på inre produkten

$$\langle u_1 \otimes u_2, v_1 \otimes v_2 \rangle_{V_1 \otimes V_2} := \langle u_1, v_1 \rangle_{V_1} \langle u_2, v_2 \rangle_{V_2}.$$

Vi går nu vidare till att beskriva vad som menas med en representation. Vi ger endast definitionen av en unitär representation av en topologisk grupp G som alltid antas vara lokalt kompakt.

Definition 2.1. *En* ***representation*** *π av G är ett par (π, V_π) bestående av ett Hilbertrum V_π och en kontinuerlig unitär gruppverkan π av G på V_π, med andra ord en kontinuerlig homomorfi*

$$\pi : G \to \mathrm{U}(V_\pi),$$

där $\mathrm{U}(V_\pi)$ ges den starka operatortopologin.

Kontinuiteten av π innebär att för varje $u \in V_\pi$ är avbildningen $g \mapsto \pi(g)u$ kontinuerlig. Vi säger att π är en *G-representation* och när det är tydligt vilken representation man talar om skriver vi $g \cdot u$ för $\pi(g)u$. Det finns alltid en enkel representation $(\mathbf{1}, V)$, given av att $\mathbf{1}(g)$ är identiteten på V för alla $g \in G$. En mer intressant representation är den **vänsterreguljära representationen** $(\lambda, L^2(G))$ given av $\lambda(g)f(h) := f(g^{-1}h)$. Denna representation är unitär eftersom integralen på G är vänsterinvariant, det vill säga $\int_G f(gh)dh = \int_G f(h)dh$, då måttet på G är vänsterinvariant.

Om (π, V) är en unitär representation och V_o är ett slutet delrum sådant att $\pi(g)V_o \subset V_o$ för varje $g \in G$, så erhålls en så kallad **delrepresentation** (π_o, V_o), definierad genom $\pi_o(g) := \pi(g)|_{V_o}$. En representation sägs vara **irreducibel** om den endast fixerar de triviala delrummen, $\{0\}$ och V_π.

Om $K < G$ är en sluten delgrupp och π är en representation så definieras V_π^K som delrummet av vektorer u så att $\pi(k)u = u$ för alla $k \in K$. En vektor i V_π^K sägs vara **K-invariant** och en representation sägs vara **K-sfärisk** om $V_\pi^K \neq \{0\}$.

Låt (π, V) och (π_i, V_i) vara representationer av G. Till Hilbertrummen V_π^*, $\widehat{\bigoplus}_i V_{\pi_i}$ samt $V_1 \widehat{\otimes} V_2$ kan vi definiera G-representationer

$$\pi^*(g)v^*(u) := v^*(\pi(g)^{-1}u),$$
$$\big(\bigoplus_i \pi_i\big)(g)\big(\sum_i v_i\big) := \sum_i \pi_i(g)v_i$$
$$(\pi_1 \otimes \pi_2)(g)(v_1 \otimes v_2) := \pi_1(g)v_1 \otimes \pi_2(g)v_2.$$

Definition 2.2. *Vi säger att två G-representationer π_1, π_2 är ekvivalenta om det finns en unitär linjär isomorfi $\psi : V_1 \to V_2$ sådan att*

$$\psi\pi_1(g) = \pi_2(g)\psi, \quad \forall g \in G.$$

Vi låter $[\pi]$ beteckna ekvivalensklassen med avseende på denna relation. Den unitära dualen $\widehat{G}$ är samlingen av ekvivalensklasser av irreducibla G-representationer.

Vi låter $\widehat{G}^K$ beteckna delmängden av K-sfäriska irreducibla representationer. Mer generellt om π_1, π_2 är G-representationer så definieras $\mathrm{Hom}_G(\pi_1, \pi_2)$ att vara kontinuerliga linjära avbildningar $\psi : V_1 \to V_2$ sådana att

$$\psi\pi_1(g) = \pi_2(g)\psi$$

Vi definierar $\mathrm{End}_G(\pi) := \mathrm{Hom}_G(\pi, \pi)$. Elementen i dessa rum kallas för **sammanflätare**, eller G-homomorfier i litteraturen.

2.3 Schurs Lemma. *Om π är en unitär G-representation så är π irreducibel precis då*

$$\mathrm{End}_G(\pi) = \mathbb{C}\mathbf{1}. \tag{2.1}$$

Bevis. [DE09, Lem. 6.1.7]. ■

Korollarium 2.4. *Om π och σ är irreducibla G-representationer så är en sammanflätare $\psi : V_\sigma \to V_\pi$ antingen en isomorfi eller trivial. Om $\psi \not\equiv 0$ så finns $c > 0$ så att $c\psi$ är en unitär ekvivalens. Med andra ord är $\mathrm{Hom}_G(\sigma, \pi) \cong \mathbb{C}$ om π, σ är ekvivalenta och $\{0\}$ annars.*

Bevis. [DE09, Cor. 6.1.9] ■

Notera att om π, σ är irreducibla ändligdimensionella representationer och $\psi \in \mathrm{Hom}_G(\sigma, \pi)$ så är $\ker\psi$ och $\mathrm{im}\,\psi$ delrepresentationer. Av irreducibilitet följer således att $\psi \equiv 0$ eller att ψ är en isomorfi. Detta argument misslyckas i oändlig dimension eftersom man a priori inte vet om $\mathrm{im}\,\psi$ är ett slutet delrum.

En trevlig konsekvens av Schurs lemma är att representationsteorin för abelska grupper blir tämligen snäll, man kan nämligen karaktärisera den unitära dualen i mer explicita termer. Låt G vara en abelsk grupp. Om π är en irreducibel representation får vi att

$$\pi(g)\pi(h) = \pi(gh) = \pi(hg) = \pi(h)\pi(g), \tag{2.2}$$

så $\pi(h)$ är en unitär sammanflätare för varje $g, h \in G$. Det följer från Schurs Lemma att $\pi(g) = \chi(g)\mathbf{1}_{V_\pi}$ där $\chi : G \to S^1$ är en homomorfi. Detta betyder att varje slutet delrum är G-invariant, så för att π ska vara irreducibel måste vi ha att $\dim V_\pi = 1$, då varje ändligtdimensionellt delrum av ett Hilbertrum är slutet. Vi får alltså att att $\widehat{G}$ sammanfaller med grupphomomorfier $\chi : G \to S^1$, så kallade *karaktärer*.

3 Fourieranalys

Vi repeterar här lite Fourierteori med hjälp av den representationsteorin som har introducerats. Vi tar som exempel att studera Fourierserier. Låt $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong \{e^{2\pi it} : t \in [0,1]\}$ vara cirkelgruppen. Då denna grupp är abelsk vet vi att varje irreducibel unitär representation kommer vara en karaktär χ verkandes på ett endimensionellt rum. Alltså är $\chi : S^1 \to S^1$ en homomorfi som uppfyller Cauchy-ekvationen $\chi(t+s) = \chi(t)\chi(s)$, vilken precist har Lebesgue-mätbara lösningar $\chi_n : t \to \mathrm{e}^{2\pi int}$, $n \in \mathbb{Z}$. Alltså är den unitära dualen $\widehat{S^1} \cong \mathbb{Z}$ som grupper med operationen $\chi_m\chi_n = \chi_{m+n}$. På samma sätt ser vi att $\widehat{\mathbb{Z}} = \{\chi_t : t \in [0,1)\} \cong S^1$ på det sättet att $\chi_t(n) = \overline{\chi_n(t)}$. Förser vi S^1 och $\mathbb{Z}$ med Lebesguemåttet respektive det diskreta måttet vet vi att Fouriertransformen

$$\begin{aligned} \mathscr{F} : L^2(S^1) &\longrightarrow \ell^2(\mathbb{Z}) \\ f &\longmapsto \widehat{f} \end{aligned}$$

given av

$$\widehat{f}(n) = \langle f, \chi_n \rangle = \int_{S^1} f(t)\overline{\chi_n(t)}dt$$

enligt Plancherels sats är en isometrisk isomorfi. Vi kan nu rekonstruera $f \in L^2(S^1)$ genom

$$f(t) = \langle \widehat{f}, \chi_t \rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n)\chi_n(t)$$

Lebesgue-nästan överallt (n.ö.). Vidare är karaktärerna $\chi_n \in L^2(S^1)$ en ON-bas och vi får sammanfattningsvis en ortogonal uppdelning

$$L^2(S^1) \cong \widehat{\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}} \mathbb{C}\chi_n \tag{3.1}$$

genom $(a_n\chi_n)_{n\in\mathbb{Z}} \mapsto \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n\chi_n$. Vårt mål är att i någon mening hitta basfunktioner likt karaktärerna ovan för att beskriva L^2-funktioner på *sfären*

$$S^2 = \left\{x \in \mathbb{R}^3 : ||x|| = 1\right\}$$

och den så kallade *reducerade Heisenberggruppen* $H_1 = S^1 \times_\omega \mathbb{C}$, med en multiplikation

$$(t,z)(s,w) = (t+s+\omega(z,w), z+w),$$

genom att studera irreducibla representationer av relaterade grupper. Innan dess tar vi och återkallar ett par resultat från Fourieranalys på $\mathbb{R}$. Fouriertransformen ger enligt Plancherels sats en isometrisk isomorfi av $L^2(\mathbb{R})$, där den för $f \in L^1 \cap L^2$ ges av

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\mathrm{e}^{-2\pi i\xi t}dt.$$

En viktig familj av funktioner, *Hermitefunktionerna*, definieras som

$$h_k(x) = \frac{2^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{2^k k!}} H_k(\sqrt{2\pi}x)\mathrm{e}^{-\pi x^2},$$

där $H_k(x) = (-1)^k \mathrm{e}^{x^2} \frac{d^k}{dx^k} \mathrm{e}^{-x^2}$ är *Hermitepolynom*. Dessa bildar en ortonormal egenbas till Fouriertransformen på $L^2(\mathbb{R})$ med egenvärden $(-i)^k$. Vi kommer att ha stor nytta av dessa resultat i Sektion 5.

4 Sfären

Vårt mål är väsentligen att finna en lämplig bas till Hilbertrummet $L^2(S^2)$, vilket i sin tur kommer ge oss en naturlig Fouriertransform av L^2-funktioner på sfären S^2. Sektionen avslutas med en tillämpning av resultaten på ett problem relaterat till tomografi.

Vi inleder sektionen med att visa hur sfären kan realiseras som en topologisk kvot av en särskild matrisgrupp genom att bädda in sfären i ett lämpligt rum på vilket matrisgruppen verkar naturligt.

4.1 Gruppverkan av SU(2) på sfären

Låt $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ beteckna $n \times n$-matriser över $\mathbb{C}$. Vi definerar den *speciella unitära gruppen* på $\mathbb{C}^2$ som

$$\mathrm{SU}(2) = \{g \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C}) : \langle gx, gy\rangle = \langle x, y\rangle, \det g = 1\} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix} : |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \right\}.$$

Låt $G = \mathrm{SU}(2)$. Det är inte svårt att se att $\mathrm{SU}(2) \subset \mathbb{C}^2$ är sluten och begränsad, så kompakt. Vi visar här att G som kompakt topologisk grupp har en naturlig kontinuerlig verkan på S^2 och att $G/\mathrm{stab}_G(X) \cong S^2$ för $X \in S^2$ som konsekvens. Det är inte uppenbart på vilket sätt vi skall välja G att verka på S^2, så vi betraktar sfären inbäddad i ett 3-dimensionellt reellt delrum av $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$. Definiera

$$\mathrm{H}_0(2) = \left\{ A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C}) : A = A^*, \operatorname{tr} A = 0 \right\}$$

med skalärprodukten $\langle A, B\rangle = \frac{1}{2} \operatorname{tr} AB$. Då definierar $\mathrm{H}_0(2)$ ett 3-dimensionellt reellt vektorrum med baselement

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

och vi kan låta G verka på $\mathrm{H}_0(2)$ genom $g \cdot A = gAg^*$ då

$$(g \cdot A)^* = (gAg^*)^* = g(gA)^* = gA^*g^* = gAg^* = g \cdot A$$

och

$$\operatorname{tr}(g \cdot A) = \operatorname{tr}(gAg^*) = \operatorname{tr}(gg^*A) = \operatorname{tr} A = 0,$$

så $g \cdot A \in \mathrm{H}_0(2)$. Verkan är unitär då

$$2||g \cdot A||^2 = \operatorname{tr}(gAg^*gAg^*) = \operatorname{tr}(A^2) = 2||A||^2.$$

Vidare är denna G-verkan på $\mathrm{H}_0(2)$ kontinuerlig eftersom addition och multiplikation på $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ är kontinuerliga operationer. Vi betraktar S^2 i $\mathrm{H}_0(2)$ som randen på enhetsbollen. Fixera basvektorn $Z \in S^2 \subset \mathrm{H}_0(2)$ och låt $\phi : G \to S^2$ ges av $\phi(g) = g \cdot Z$. Eftersom

$$\begin{aligned} \phi : G &\longrightarrow G \times S^2 \longrightarrow S^2 \\ g &\mapsto (g, Z),\ (g, A) \mapsto g \cdot A \end{aligned}$$

är ϕ kontinuerlig då den är en sammansättning av en kontinuerlig inklusion och den kontinuerliga gruppverkan. Vidare är ϕ surjektiv ty varje $A \in S^2$, $g \in G$ är på formen

$$A = A_{\varphi,\theta} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \mathrm{e}^{i\theta}\sin\varphi \\ \mathrm{e}^{-i\theta}\sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}, \theta \in [0,2\pi), \varphi \in [0,\pi], \quad g = g_{\alpha,\beta} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix} : |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1, \qquad (4.1)$$

vilket ger att $\alpha = \pm \mathrm{e}^{i\psi}\cos(\varphi/2)$, $\beta = \mp \mathrm{e}^{i(\theta-\psi)}\sin(\varphi/2)$, $\psi \in [0,2\pi)$ när vi löser $A = g \cdot Z$ och vi ser att G verkar transitivt på S^2. Skriver vi

$$K = \mathrm{stab}_G(Z) = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \overline{\lambda} \end{pmatrix} : |\lambda| = 1 \right\} = \mathrm{U}(1)$$

får vi en bijektion $\tilde{\phi} : G/K \to G \cdot Z = S^2$ så att

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\pi"'] & S^2 \\ G/K \arrow[ur, "\tilde{\phi}"'] & \end{tikzcd}$$

kommuterar, där $\pi : G \to G/K$ är kvotavbildningen. Kvotavbildningen är per konstruktion kontinuerlig och öppen i kvottopologin, så $\tilde{\phi}$ är kontinuerlig om och endast om ϕ är det. Vi har att G/K är kompakt då G är kompakt och K är sluten. Vidare är S^2 Hausdorff, så $\tilde{\phi}$ är en homeomorfi.

4.2 Sfäriska polynom

I fallet S^1 kunde vi förlita oss på en gruppstruktur för att finna en bas av karaktärer. Nu har S^2 inte en gruppstruktur men som vi har sett kan vi skriva $S^2 = \mathrm{SU}(2)/\mathrm{U}(1)$, så om vi kan bestämma $L^2(\mathrm{SU}(2))$ ser vi att $L^2(S^2)$ rimligen borde kunna identifieras med höger-U(1)-invarianta funktioner $L^2(\mathrm{SU}(2))^{\mathrm{U}(1)}$ med avseende på den vänsterreguljära representationen. För att tala om $L^2(S^2)$ måste vi införa ett mått på S^2, vilket vi formulerar som en sats.

Sats 4.1. *(Haar) Låt G vara en kompakt grupp och K en sluten delgrupp. Då existerar det ett unikt vänster- och högerinvariant sannolikhetsmått på Borel-σ-algebran av G. Vidare inducerar detta ett unikt vänsterinvariant sannolikhetsmått på G/K.*

Ett bevis av denna sats ges i [EW17, Thm. 10.1., Prop. 10.2] och [RT08, Thm. 2.4.25.]. Måttet

$$d\mu := \frac{1}{4\pi}\sin\varphi d\varphi d\theta$$

är invariant under isometrier eftersom Jacobianen är det, så då G verkar unitärt är måttet nödvändigtvis G-invariant. Vidare är $\mu(S^2) = 1$, så enligt satsen ovan är integralen unik. Vi betraktar från och med nu $L^2(S^2, \mu)$. Med den vänsterreguljära representationen $(\lambda, L^2(\mathrm{SU}(2)))$ är vi nu på god väg att kunna säga något om $L^2(S^2)$. Följande sats är fundamental inom harmonisk analys av kompakta grupper och ger oss en ortogonal uppdelning av $L^2(\mathrm{SU}(2))$.

4.2 Peter-Weyls sats. *Låt G vara en kompakt grupp och λ den vänsterreguljära representationen av G på $L^2(G)$. Då är de irreducibla representationerna av G ändligdimensionella och*

$$L^2(G) \cong \widehat{\bigoplus}_{[\pi]\in\widehat{G}} V_\pi \otimes V_\pi^* \qquad (4.2)$$

där den sammanflätande isomorfin ges av $(u_\pi \otimes v_\pi^*)_{[\pi]} \mapsto \sum_{[\pi]}\langle u_\pi, \pi(\cdot)v_\pi\rangle$. Vidare om vi låter $\{v_k^\pi\}_k$ vara *en ON-bas av V_π bildar funktionerna* $\sqrt{\dim V_\pi}\phi^\pi_{kl}$ *en ON-bas av* $L^2(G)$*, där*

$$\phi^\pi_{kl} : g \longmapsto \langle v^\pi_k, \pi(g)v^\pi_l \rangle.$$

Bevis. Detta omfattande resultat kräver en del funktionalanalytiska förkunskaper och lämnas till den intresserade läsaren. Ett bevis presenteras i [DE09, Thm. 7.21]. ■

Funktionerna ϕ^π_{kl} kallas för *matriskoefficienter* associerade till π. Notera att denna sats inkluderar fallet S^1, se ekvation 3.1. Allmänt kan vi identifiera $L^2(G/K)$ med $L^2(G)^K$, det vill säga höger-K-invarianta funktioner på G, och vi ser att

$$L^2(G/K) \cong \widehat{\bigoplus}_{[\pi]\in\widehat{G}^K} V_\pi \otimes (V^*_\pi)^K,$$

vilket inducerar en ON-bas av matriskoefficienter i $L^2(G/K)$. Vi tar upp ett sista resultat för att ge oss möjligheten att ta fram en ON-bas på $L^2(S^2)$.

Sats 4.3. *De irreducibla representationerna av* SU(2) *ges upp till unitär ekvivalens precis av* (σ_n, V_n) $n \in \mathbb{N}_0$*, där*

$$V_n = \{\textit{komplexa bivariata homogena polynom av grad } n\}$$

med skalärprodukten inducerad av normen $||z^i w^{n-i}||^2 = i!(n-i)!$ *och* $(\sigma_n(g)p)(z,w) = p(g^{-1}(z,w))$.

Bevis. Den intresserade hänvisas till [Dei05, Ch. 10] för en utförlig härledning av detta resultat. ■

Vi har nu irreducibla representationer (σ_n, V_n) av $G = \mathrm{SU}(2)$ och en vänsterinvariant integral på S^2. Skalärprodukten på V_n ges explicit av $\langle p,q\rangle = (q(\partial_z,\partial_w)p)(0,0)$, så låt $\{p_i\}_{i=0}^n$ vara ON-basen i V_n given av

$$p_i(z,w) = \frac{z^i w^{n-i}}{\sqrt{i!(n-i)!}}.$$

Om vi betraktar verkan av $K = \mathrm{U}(1)$ på V_n ser vi för $k = k(\lambda) \in K$ att

$$\sigma_n(k)p_i(z,w) = p_i(k^{-1}(z,w)) = \lambda^{n-2i} p_i(z,w),$$

så $V^K_{2n} = \mathbb{C}p_n$ och $V^K_{2n+1} = \{0\}$ för alla $n \in \mathbb{N}_0$. Ur Peter-Weyls sats följer det att

$$L^2(S^2) \cong \widehat{\bigoplus_{n\in\mathbb{N}_0}} V_{2n} \otimes \mathbb{C}p_n.$$

Givet $n \in \mathbb{N}$ har vi en linjär avbildning $\psi_n : V_{2n} \to \mathbb{C}$ som ges av $\psi_n(p) = \langle p, p_n\rangle$. Detta inducerar höger-$K$-invarianta funktioner $\phi^n_k \in L^2(S^2)$ genom

$$\phi^n_k(gK) = \psi_n(\sigma_{2n}(g)^{-1}p_k) = \langle p_k, \sigma_{2n}(g)p_n\rangle,$$

med andra ord matriskoefficienterna $\phi^{\sigma_{2n}}_{kn}$. Låt $A = A_{\theta,\varphi} \in S^2$ vara som i ekvation 4.1 och

$$g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\varphi}{2} & \mathrm{e}^{i\theta}\sin\frac{\varphi}{2} \\ -\mathrm{e}^{-i\theta}\sin\frac{\varphi}{2} & \cos\frac{\varphi}{2} \end{pmatrix}.$$

så att $g \cdot Z = A$. Beräkning av ϕ_k^n ger

$$\begin{aligned}\sqrt{k!(2n-k)!}n!\phi_k^n(gK) &= \langle g(z^k w^{2n-k}), z^n w^n\rangle = \langle (\alpha z + \beta w)^k (\overline{\alpha} w - \overline{\beta} z)^{2n-k}, z^n w^n\rangle \\ &= \sum_{l=0}^{k}\sum_{j=0}^{2n-k}\binom{k}{l}\binom{2n-k}{j}\alpha^l(\overline{\alpha})^j\beta^{k-l}(-\overline{\beta})^{2n-k-j}\langle z^{2n-k-j+l}w^{k+j-l}, z^n w^n\rangle\end{aligned}$$

och utnyttjar vi att $\{p_k\}$ är en ortonormal familj får vi för $k \le n$ att

$$\begin{aligned}\mathrm{HL} &= (n!)^2\sum_{l=0}^{k}(-1)^{n-l}\binom{k}{l}\binom{2n-k}{n-k+l}\alpha^l(\overline{\alpha})^{n-k+l}\beta^{k-l}(\overline{\beta})^{n-l} \\ &= (n!)^2 \mathrm{e}^{i(k-n)\theta}\sum_{l=0}^{k}(-1)^{n-l}\binom{k}{l}\binom{2n-k}{n-k+l}(\cos\frac{\varphi}{2})^{2l+n-k}(\sin\frac{\varphi}{2})^{-2l+n+k}.\end{aligned}$$

Med relationerna $\sin^2\varphi = \frac{1-\cos 2\varphi}{2}$ och $\cos^2\varphi = \frac{1+\cos 2\varphi}{2}$ fås

$$\begin{aligned}\mathrm{HL} &= (n!)^2 2^{-n}\mathrm{e}^{i(k-n)\theta}(\sin\varphi)^{n-k}\sum_{l=0}^{k}(-1)^{n-l}\binom{k}{l}\binom{2n-k}{n-k+l}(1+\cos\varphi)^l(1-\cos\varphi)^{k-l} \\ &= (n!)^2 2^{-n}(\mathrm{e}^{-i\theta}\sin\varphi)^{n-k}P_{k,n}(\cos\varphi),\end{aligned}$$

där

$$P_{k,n}(z) = \sum_{l=0}^{k}(-1)^{k-l}\binom{k}{l}\binom{2n-k}{n-k+l}(1+z)^l(1-z)^{k-l} = \sum_{l=0}^{k}(-1)^{k-l}\binom{k}{l}\binom{2n-k}{n-l}(1+z)^l(1-z)^{k-l}.$$

Beteckna $D := \frac{\partial}{\partial z}$. Vi ser då att

$$\begin{aligned}D^{n-l}(1+z)^n &= \frac{n!}{(n-l)!}(1+z)^l \\ D^{n-k+l}(1-z)^n &= (-1)^{n-k+l}\frac{n!}{(n-k+l)!}(1-z)^{k-l},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{så}\quad P_{k,n}(z) &= \frac{1}{(n!)^2}\sum_{l=0}^{k}(-1)^k(n-l)!(n-k+l)!\binom{k}{l}\binom{2n-k}{n-l}D^{n-l}(1+z)^n D^{n-k+l}(1-z)^n \\ &= \frac{(2n-k)!}{(n!)^2}(-1)^k\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}D^{n-l}(1+z)^n D^{n-k+l}(1-z)^n.\end{aligned}$$

Med produktregeln får vi att

$$\begin{aligned}\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}D^{n-l}(1+z)^n D^{n-k+l}(1-z)^n &= D^k\left(D^{n-k}(1+z)^n D^{n-k}(1-z)^n\right) \\ &= (-1)^{n-k}\left(\frac{n!}{(n-k)!}\right)^2 D^k(1-z^2)^k.\end{aligned}$$

Slutligen är alltså

$$\phi_k^n(gK) = \frac{n!}{2^n\sqrt{k!(2n-k)!}}(\mathrm{e}^{-i\theta}\sin\varphi)^{n-k}P_{k,n}(z),$$

där

$$P_{k,n}(z) = (-1)^n\frac{(2n-k)!}{((n-k)!)^2}D^k(1-z^2)^k$$

och en liknande räkning som ovan ger för $k > n$ att

$$\phi_k^n(gK) = \frac{n!}{2^n\sqrt{k!(2n-k)!}}(\mathrm{e}^{i\theta}\sin\varphi)^{k-n}P_{2n-k,n}(z)$$

Skriv nu $k = n+m, m \in \{-n,...,n\}$. Definierar vi *Legendrepolynom* $P_n(z) = \frac{\partial^n}{\partial z^n}(1-z^2)^n$ och *associerade Legendrepolynom*

$$P_m^n(z) = \frac{(-1)^n n!}{2^n}(1-z^2)^{|m|/2}P_{n-|m|}(z)$$

får vi så kallade *klotytefunktioner*

$$Y_m^n(\theta,\varphi) := \sqrt{2n+1}\phi_{n+m}^n(gK) = \frac{1}{(|m|!)^2}\sqrt{(2n+1)\frac{(n-m)!}{(n+m)!}}P_m^n(\cos\varphi)\mathrm{e}^{im\theta},$$

vilka enligt Peter-Weyls sats bildar en ortonormal bas i $L^2(S^2)$. Denna diskussion sammanfattas i huvudresultat A.

4.4 Sats A. *Varje $f \in L^2(S^2)$ kan skrivas som en summa*

$$f(\theta,\varphi) = \sum_{n\in\mathbb{N}_0}\sum_{|m|\le n}\langle f, Y_m^n\rangle Y_m^n(\theta,\varphi), \quad \mu-n.ö.$$

Vi kan dessutom definiera en Fouriertransform genom

$$\widehat{f}(n,m) = \langle f, Y_m^n\rangle = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(\theta,\varphi)Y_{-m}^n(\theta,\varphi)\sin\varphi d\varphi d\theta.$$

Motsvarigheten till **Plancherels formel** blir nu

$$\sum_{n\in\mathbb{N}_0}\sum_{|m|\le n}|\widehat{f}(n,m)|^2 = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}|f(\theta,\varphi)|^2\sin\varphi d\varphi d\theta.$$

och med polarisering av skalärprodukten på $L^2(S^2)$ ser vi att Fouriertransformen är unitär. Som avslutning till denna sektion använder vi delar av vårt resultat i en kort tillämpning.

4.3 Tomografi

Vi tillämpar det vi nu vet om representationer av SU(2) och funktioner på sfären på ett problem inom området tomografi: Givet en kompakt "kropp" $K \subset \mathbb{R}^3$ och för varje affint plan $P \subset \mathbb{R}^3$ arean av $P \cap K$, kan vi då rekonstruera K utifrån denna data?

Vi följer problemformuleringen i [Kir94, § 4.3.3.] och ställer oss en enklare fråga, nämligen om vi kan göra samma rekonstruktion då planen P är linjära, med andra ord snittar origo. Svaret är nej då de sfäriska skalen $B_R\setminus B_r$ och bollarna $B_{\sqrt{R^2-r^2}}$ ger oss samma data när planen är linjära. Vidare om vi reflekterar kroppen i origo ges vi samma data. Vi sätter följande krav på K:

- Om $x \in K$ så är $\lambda x \in K$ för alla $\lambda \in [0,1]$.
- Om $x \in K$ så gäller att $-x \in K$.

Vi kallar en sådan delmängd *hel och centralsymmetrisk* och vi omformulerar vårt problem:

Problem: *Låt $K \subset \mathbb{R}^3$ vara en kompakt, hel och centralsymmetrisk delmängd. Är då K unikt bestämd av datan* Area$(P \cap K)$ *för alla linjära plan $P \subset \mathbb{R}^3$ (upp till nollmängder)?*

Vi kan beskriva K med dess radie $r_K \in L^2(S^2)$ given av $r_K(x) = \sup\{\lambda \in \mathbb{R} : \lambda x \in K\}$, vilket är en ickenegativ, jämn funktion då K är mätbar och centralsymmetrisk. Vidare uppfyller den att

$$\mathrm{Area}(P \cap K) = \frac{1}{2}\int_{P\cap S^2} r_K(x)^2 dx$$

och funktionen är entydigt bestämd av dess kvadrat, så problemet reduceras till det följande:

Problem: *Låt $f \in L^2(S^2)$ vara jämn, alltså $f(-x) = f(x)$. Är då f entydigt bestämd av $\int_{P\cap S^2} f(x)dx$ för (nästan) alla linjära plan P?*

Låt $x \in S^2$ och C_x vara snittet av S^2 med det linjära plan ortogonalt mot x. Notera att C_x är väldefinierad och att varje cirkel i S^2 med centrum i origo är på denna form samt att $C_x = C_y$ omm $y = \pm x$, så vi får en avbildning $J : C_+(S^2) \to C_+(S^2)$ given av

$$Jf(x) = \int_{C_x} f(y)dy$$

där $C_+(S^2)$ är jämna funktioner i $C(S^2)$. Den kallas för *Radontransformen* på S^2. Vi vill att J ska ta funktioner i L^2_+ till L^2_+, vilket vi skall se, så vi antar det för tillfället. Det är dock uppenbart för $f \in C_+(S^2)$ att Jf är kontinuerlig då cirklarna C_x varierar kontinuerligt med x. Om f är jämn så är $\lambda(g)f$ också jämn, så $C_+(S^2)$ är SU(2)-invariant. Observera att om $g \in \mathrm{SU}(2)$ är $C_{gx} = gC_x$ och vi har

$$J(\lambda(g)f)(x) = \int_{C_x} f(g^{-1}y)dy = \int_{C_{g^{-1}x}} f(y)dy = \lambda(g)(Jf)(x),$$

så J sammanflätar λ. Vi är nu frestade att använda Schurs lemma, men det kräver först att vi vet hur representationer av $L^2_+(S^2)$ ser ut. Det är uppenbart att uppdelningen $L^2 = L^2_+ \oplus L^2_-$ (där L^2_- är udda funktioner, $f(-x) = -f(x)$) är SU(2)-invariant, så inbäddningen $V_{2n} \to L^2(S^2)$ från sats 4.2 ligger i en av faktorerna. Om vi betraktar $\phi^n_n(gK) = \langle p_n, \sigma_{2n}(g)p_n\rangle$ ser vi att

$$\phi^n_n\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} K\right) = (-1)^n ||p_n||^2 = (-1)^n,$$

så inbäddningen är jämn omm $n \in \mathbb{N}$ är jämn, med andra ord

$$L^2_+(S^2) \cong \widehat{\bigoplus_{n\in\mathbb{N}_0}} V_{4n} \otimes \mathbb{C}p_{2n}.$$

Nu ser vi att $J|_{V_{4n}} = \lambda_n \mathrm{id}$ och vårt problem reduceras till att verifiera om $\lambda_n = 0$ för alla $n \in \mathbb{N}_0$ eller ej. Vi skriver $\phi_n = \phi^{2n}_{2n}$. Det gäller att $\phi_n(Z) = 1$, så $\lambda_n = J\phi_n(Z)$. Vidare är

$$J\phi_n(Z) = \int_{x^2+y^2=1} \phi_n(x,y,0)dxdy = 2\pi\phi_n(s)$$

för godtyckligt $s \in \{(x,y) : x^2 + y^2 = 1\}$ då ϕ_n per konstruktion är bi-K-invariant och alltså konstant på $\{(x,y) : x^2 + y^2 = 1\}$. Varje s är på formen

$$s = \begin{pmatrix} 0 & e^{i\theta} \\ e^{-i\theta} & 0 \end{pmatrix},$$

så om vi löser $s = g\cdot Z$ får vi att

$$g = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & e^{i\theta} \\ -e^{-i\theta} & 1 \end{pmatrix}.$$

Tar vi $\theta = 0$ får vi att $s = X$ och

$$\begin{aligned}
\phi_n(s) = \phi_n(gK) = \langle p_{2n}, \sigma_{4n}(g)p_{2n}\rangle &= \frac{1}{((2n)!)^2}\langle z^{2n}w^{2n}, 2^{-2n}(z-w)^{2n}(z+w)^{2n}\rangle \\
&= \frac{1}{4^n((2n)!)^2}\left\langle z^{2n}w^{2n}, \sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}(z^2)^k(-w^2)^{2n-k}\right\rangle = \frac{1}{4^n((2n)!)^2}\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}(-1)^{2n-k}\langle z^{2n}w^{2n}, z^{2k}w^{4n-2k}\rangle \\
&= \frac{1}{(-4)^n}\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(-4)^n(n!)^2},
\end{aligned}$$

så $\lambda_n = \frac{2\pi(2n)!}{(-4)^n(n!)^2} \neq 0$ för alla $n \in \mathbb{N}$. Nu är J en bijektiv linjär avbildning $L^2_+ \to L^2_+$ då om vi tar $f \in L^2_+$ och skriver $f = \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ för

$$f_n = \sum_{|m|\leq 2n}\langle f, Y^n_m\rangle Y^n_m$$

i bilden av V_{4n} har vi att

$$Jf = \sum_n Jf_n = 2\pi\sum_n \frac{(2n)!}{(-4)^n(n!)^2}f_n.$$

Vidare är

$$||Jf||_2^2 = 2\pi\sum_n \frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}||f_n||^2 \leq 2\pi\sum_n ||f_n||^2 = 2\pi||f||_2^2,$$

så J är kontinuerig. Inversen ges av $J^{-1}f = \frac{1}{2\pi}\sum_n \frac{(-4)^n(n!)^2}{(2n)!}f_n$ och vi kan nu besvara vår ursprungliga fråga: Vi var givna informationen

$$\text{Area}(P_x \cap K) = \frac{1}{2}\int_{C_x} r_K(y)^2 dy = \frac{1}{2}Jr_K^2(x) = \sum_{n\geq 1} c_n f_n(x)$$

där P_x är planet så att $P_x \cap S^2 = C_x$ och $f_n = \sum_{k=0}^{4n}\langle Jr_K^2, p_k\rangle p_k$. Vi kan nu rekonstruera r_K genom

$$r_K(x) = \sqrt{J^{-1}(2\text{Area}(P_x \cap K))} = \sqrt{\sum_{n\geq 1}\frac{2}{\lambda_n}c_n f_n(x)} = \sqrt{\sum_{n\geq 1}\frac{(-4)^n(n!)^2}{\pi(2n)!}c_n f_n(x)}$$

och därmed är svaret på vårt problem positivt då

$$K = \left\{x \in \mathbb{R}^3 : ||x|| \leq r_K\left(\frac{x}{||x||}\right)\right\}.$$

5 Heisenberggruppen

Vi betraktar samma problem som tidigare, men nu för en ny grupp som inte är kompakt. Förse mängden $\mathbb{R} \times \mathbb{C}$ med operationen

$$(t,z)(s,w) = (t + s + \omega(z,w), z + w)$$

där $\omega(x + iy, u + iv) = \frac{1}{2}(xv - yu)$. Vi kallar denna gruppen för *Heisenberggruppen* och den betecknas $\mathscr{H}_1 = \mathbb{R} \times_\omega \mathbb{C}$. Heisenberggruppen dyker upp som bilden av en speciell matrisalgebra, kallad Heisenbergalgebran, under matrisexponenten exp. Heisenbergalgebran representerar de så kallade *kanoniska kommuteringsrelationerna* som inom kvantmekaniken talar om hur moment och läge hör ihop. Den intresserade läsaren hänvisas till [Fol89, Ch. 1] för mer om den fysikaliska bakgrunden.

Notera att centret är $Z(\mathscr{H}_1) = \mathbb{R} \times_\omega \{0\} \cong \mathbb{R}$. Om vi tar den diskreta delgruppen

$$\Gamma := \mathbb{Z} \times_\omega \{0\} < Z(\mathscr{H}_1)$$

och kvotar med $\mathscr{H}_1$ är

$$H_1 = \Gamma \backslash \mathscr{H}_1 \cong S^1 \times_\omega \mathbb{C}$$

den så kallade *reducerade Heisenberggruppen*. I detta avsnitt ska vi finna en lämplig bas av $L^2(H_1)$ med avseende på irreducibla representationer och - på liknande sätt som på sfären - definiera en Fouriertransform.

5.1 Centrala karaktärer och Stone-von Neumanns sats

Vi vill nu undersöka irreducibla representationer av H_1. Låt $\sigma : H_1 \to \mathrm{U}(V)$ vara en irreducibel representation. Då gäller att $\sigma|_{Z(H_1)} \in \mathrm{End}_{H_1}(\sigma)$ per definition av centrum, så för varje $g \in Z(H_1)$ är $\sigma(g) = \chi_\sigma(g)\mathrm{Id}_V$ enligt Schurs lemma och det är lätt att se att $\chi_\sigma : Z(H_1) \to S^1$ är en homomorfi. Karaktären χ_σ kallas för den *centrala karaktären* av σ. Det gäller att

$$\sigma(t,z) = \sigma(t,0)\sigma(0,z) = \chi_\sigma(t)\sigma(0,z)$$

och $\chi_\sigma = \chi_n$ som i ekvation 3.1 för något n då vi har klassificerat karaktärer på den abelska gruppen S^1. Om $n = 0$ är $\sigma|_{S^1} = \mathrm{Id}_V$ och det inducerar en irreducibel representation av $\mathbb{C}$, alltså en karaktär

$$\chi_z : w \mapsto \mathrm{e}^{2\pi i \langle z,w\rangle}$$

för något $z \in \mathbb{C}$. Det följer att σ_0 också verkar som χ_z på V_{σ_0} och på grund av irreducibilitet är $V_{\sigma_0} = \mathbb{C}$. Då $n \neq 0$ kan vi låta σ verka på $L^2(\mathbb{R})$ genom

$$\sigma(0, x + iy)f(\xi) = \mathrm{e}^{2\pi i n x(\xi + y/2)} f(\xi + y).$$

Att denna verkan är unitär följer från att translation är en unitär operation och det är inte svårt att se att verkan är kontinuerlig. Vi skriver suggestivt $\sigma_n = \sigma$ och $\chi_n = \chi_{\sigma_n}$. Följande sats säger att dessa representationer i någon mening är unika.

5.1 Stone-von Neumanns sats. *För alla $n \neq 0$ är $\sigma_n : H_1 \to \mathrm{U}(L^2(\mathbb{R}))$ upp till ekvivalens den unika irreducibla unitära representation så att $\sigma_n|_{S^1} = \chi_n$.*

Representationerna σ_n kallas för *Schrödingerrepresentationer* och det följer ur sats 5.1 att den unitära dualen av H_1 är

$$\widehat{H}_1 = \{[\chi_z] : z \in \mathbb{C}\} \cup \{[\sigma_n] : n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}\}.$$

Vi kan nu med alla irreducibla representationer klassificerade börja tala om matriskoefficienter tillhörande σ_n, vilket vi från fallet S^2 kan ana bildar en lämplig kandidat för en ON-bas till $L^2(H_1)$. Ur translationsinvarians av Lebesguemåtten på $S^1, \mathbb{C}$ ser vi att

$$\int_{H_1} f \, dv = \int_{S^1} \int_{\mathbb{C}} f(t,z) dt dz$$

ger ett vänster- och högerinvariant mått och hädanefter betraktar vi $L^2(H_1, v)$. I Sektion 3 såg vi att varje L^2-funktion på cirkeln kunde skrivas i termer av dess karaktärer, så för $f \in L^2(H_1)$ finns det funktioner $f_n(z) = \langle f(\cdot, z), \chi_n \rangle, n \in \mathbb{Z}$ så att

$$f(t,z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n(z)\chi_n(t) \tag{5.1}$$

och det följer ur ortogonalitet av karaktärerna χ_n att

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} ||f_n||_2^2 = ||f||_2^2 < +\infty.$$

Alltså måste $f_n \in L^2(\mathbb{C})$ för alla $n \in \mathbb{Z}$. Omvänt om $(g_n) \subset L^2(\mathbb{C})$, $n \in \mathbb{Z}$ så att $\sum_n ||g_n||_2^2 < +\infty$ är $g(t,z) := \sum_n g_n(z)\chi_n(t)$ i $L^2(H_1)$ och vi får en ekvivalens

$$L^2(H_1) \cong \widehat{\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}} L^2(\mathbb{C}) \otimes \mathbb{C}\chi_n \tag{5.2}$$

på det sättet att

$$F \otimes \chi_n \longmapsto \Big((t,z) \mapsto F(z)\chi_n(t)\Big).$$

Då χ_n är centrala karaktärer tillhörande σ_n är det önskvärt att uttrycka $F \in L^2(\mathbb{C})$ i termer av σ_n, vilket matriskoefficienter kommer att låta oss göra. Härnäst beskriver vi hur σ_n ger en naturlig ON-bas av $L^2(\mathbb{C})$.

5.2 Matriskoefficienter och Fourier-Wignertransformen

Likt Peter-Weyls sats, sats 4.2, vill vi visa att matriskoefficienter tillhörande σ_n bildar en ortonormal familj i $L^2(H_1)$. Vi repeterar faktumet att våra irreducibla representationer av H_1 är (σ_n, V_n), där $V_n = L^2(\mathbb{R})$ för varje $n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ och karaktärer χ_z på $\mathbb{C}$ utöver Schrödingerrepresentationerna. Målet här är att visa att matriskoefficienter på V_n bildar en ON-bas i $L^2(\mathbb{C})$ för varje $n \neq 0$. Då $\sigma_n|_{S^1}$ verkar som den centrala karaktären χ_n räcker det att betrakta matriskoefficienter då $t = 0$ på det sättet att

$$\phi_{kl}^n(t,z) = \overline{\chi_n(t)}\langle e_k, \sigma_n(0,z)e_l\rangle,$$

där $\{e_k\}$ är en ON-bas i $V_n = L^2(\mathbb{R})$. Vi skriver $\sigma_n(z) = \sigma_n(0,z), \phi_{kl}^n(z) = \phi_{kl}^n(0,z)$ och ser att

$$\begin{aligned}\langle e_k, \sigma_n(x+iy)e_l\rangle &= \int_{\mathbb{R}} e_k(\xi) e^{-2\pi i n x(\xi+y/2)} \overline{e_l(\xi+y)} d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}} e_k(\xi - \frac{1}{2}y) \overline{e_l(\xi + \frac{1}{2}y) e^{-2\pi i n x \xi}} d\xi.\end{aligned} \tag{5.3}$$

Vi definierar *Fourier-Wignertransformen* som

$$\mathcal{V}F(x+iy) = \int_{\mathbb{R}} F((\xi - \frac{1}{2}y) + i(\xi + \frac{1}{2}y))\mathrm{e}^{-2\pi i x\xi} d\xi.$$

för $F \in L^2(\mathbb{C})$. Likt Peter-Weyls sats betraktar vi $V_n \otimes V_n^* = L^2(\mathbb{R}) \otimes L^2(\mathbb{R})^*$ och inbäddar vektorrummet i $L^2(\mathbb{C})$ genom att låta $(f \otimes g^*)(x+iy) = f(x)\overline{g(y)}$ för $f, g \in L^2(\mathbb{R})$. Skriver vi $\mathcal{V}(f,g) = \mathcal{V}(f \otimes g^*)$ är

$$\phi^n_{kl}(x+iy) = \mathcal{V}(e_k, e_l)(nx+iy) = \mathcal{F}_1((e_k \otimes e_l^*) \circ \iota)(nx+iy) \tag{5.4}$$

där $\iota : (\xi, y) \mapsto (\xi - \frac{1}{2}y, \xi + \frac{1}{2}y)$ och $\mathcal{F}_1$ är Fouriertransformen med avseende på realdelen. Vi utnyttjar detta faktum i beviset av följande sats.

Sats 5.2. *Matriskoefficienterna* $\{\sqrt{|n|}\phi^n_{kl}\}_{k,l}$ *betraktade som funktioner på* $\mathbb{C}$ *bildar en ON-bas i* $L^2(\mathbb{C})$.

Vi delar upp beviset genom att bevisa två lemmata.

Lemma 5.3. *Familjen* $\{\phi^n_{kl}\}_{k,l}$ *är ortonormal.*

Lemma 5.4. *Familjen* $\{\phi^n_{kl}\}_{k,l}$ *spänner upp* $L^2(\mathbb{C})$.

Bevis av Lemma 5.3. Låt $\mathcal{V}_nF(x+iy) = \mathcal{V}F(nx+iy)$. Med variabelbytet $\kappa : (\xi, y) \mapsto (\xi + y/2, \xi + y/2)$ blir

$$\iota \circ \kappa : (\xi, y) \mapsto (\xi, \xi + y)$$

och för $F \in L^2(\mathbb{C})$ är

$$\int_{\mathbb{C}} |\mathcal{F}_1(F \circ \iota)(nx+iy)|^2 dxdy = \frac{1}{|n|}||\mathcal{F}_1(F \circ \iota)||_2^2 = \frac{1}{|n|}||F \circ \iota||_2^2,$$

med hjälp av Plancherels formel på $\mathbb{R}$. Ur translations- samt isometri-invarians av Lebesguemåttet är nu

$$||\mathcal{V}_nF||_2^2 = \frac{1}{|n|}||\mathcal{F}_1(F \circ (\iota \circ \kappa))||_2^2 = \frac{1}{|n|}||F \circ (\iota \circ \kappa)||_2^2 = \frac{1}{|n|}||F||_2^2.$$

Ur detta ser vi att $\mathcal{V}_n$ är injektiv och kontinuerlig, samt att $||\phi^n_{kl}||_2 = |n|^{-1/2}$. Med en polarisering av skalärprodukten på $L^2(\mathbb{C})$ ser vi att

$$\langle \mathcal{V}_nF, \mathcal{V}_nG \rangle = \frac{1}{|n|}\langle F, G \rangle \tag{5.5}$$

för $F, G \in L^2(\mathbb{C})$, så $\{\sqrt{|n|}\phi^n_{kl}\}_{k,l}$ är en ortonormal familj då

$$\langle \mathcal{V}_n(e_i, e_j), \mathcal{V}_n(e_k, e_l) \rangle = \frac{1}{|n|}\langle e_i, e_k \rangle \langle e_j, e_l \rangle = \frac{1}{|n|}\delta_{ik}\delta_{jl}. \qquad \blacksquare$$

Innan vi bevisar Lemma 5.4 behöver vi införa nya begrepp. Låt $F \in L^2(\mathbb{C}), f \in L^2(\mathbb{R})$ och definiera en operator $\sigma_n(F) : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ enligt

$$\sigma_n(F)f(\xi) = \int_{\mathbb{C}} F(z)\sigma_n(z)f(\xi)dz = \int_{\mathbb{R}^2} F(x+iy)\mathrm{e}^{2\pi i n x(\xi + y/2)} f(\xi + y)dxdy.$$

Det följer att $\sigma_n(F)f \in L^2(\mathbb{R})$ då $||\sigma_n(F)f||_2^2 \le ||F||_2^2||f||_2^2$. Vi kan skriva $\sigma_n(F)$ som en kärnoperator

$$\sigma_n(F)f(\xi) = \int_{\mathbb{R}} K_F^n(\xi,y)f(y)dy$$

där kärnan K_F^n är given av

$$K_F^n(\xi,y) = \int_{\mathbb{R}} F(nx+i(y-\xi))\mathrm{e}^{\pi i n x(\xi+y)}dx = \frac{1}{|n|}(\mathscr{F}_1 F)(-\frac{1}{2}(\xi+y)+i(y-\xi)).$$

Om nu $\sigma_n(F)f = 0$ för alla $f \in L^2(\mathbb{R})$ är $K_F^n = 0$, varför $F = 0$ eftersom Fouriertransformen och $(\xi,y) \mapsto (-\frac{n}{2}(\xi+y), y-\xi)$ är bijektioner.

Bevis av Lemma 5.4. Låt $F \perp \operatorname{span}\{\phi_{kl}^n\}$. Då är

$$0 = \langle F, \phi_{kl}^n \rangle = \langle \sigma_n(F)e_l, e_k \rangle$$

för varje k,l. Då $\{e_k\}$ är en ON-bas är $\sigma_n(F) = 0$ och så $F = 0$. Alltså är $\operatorname{span}\{\phi_{kl}^n\}$ tät i $L^2(\mathbb{C})$ och resultatet följer. ∎

Vi har nu visat att matriskoefficienterna bildar en bas av $L^2(\mathbb{C})$ och vidare gäller det att varje $\mathcal{V}_n$ via Hilbertkomplettering ger en isomorfi

$$V_n \hat{\otimes} V_n^* \cong L^2(\mathbb{C}).$$

Det återstår för oss att finna explicita uttryck för funktionerna ϕ_{kl}^n med avseende på en lämplig bas.

5.3 Generaliserade Hermitefunktioner och Laguerrepolynom

För att kunna beräkna ϕ_{kl}^n måste vi välja en bas till $V_n = L^2(\mathbb{R})$. Då matriskoefficienterna enligt ekvation 5.4 kan uttryckas i termer av Fouriertransformen på $\mathbb{R}$ väljer vi lämpligen basen $\{h_k\}$ av Hermitefunktioner. Notera att eftersom $\sigma_n = \sigma_1 \circ \theta_n$ med automorfin θ_n given av

$$\theta_n(t, x+iy) = (nt, nx+iy)$$

får vi att $\phi_{kl}^n = \phi_{kl}^1 \circ \theta_n$. Således återstår det endast att beräkna de så kallade *generaliserade Hermitefunktionerna*

$$\Phi_{kl} = \phi_{kl}^1 = \mathcal{V}(h_k, h_l).$$

I denna del följs konventionerna i [Fol89] men för att undvika att introducera mer teori gör vi beräkningarna likt [Tha93]. Vi inleder med tre lemmata som ligger till grunden för våra beräkningar.

5.5 Mehlers Formel.

$$\sum_{k\ge 0} h_k(x)h_k(y)z^k = \sqrt{\frac{2}{1-z^2}}\exp\left(\frac{-\pi\left(1+z^2\right)\left(x^2+y^2\right)+4\pi zxy}{1-z^2}\right).$$

Bevis. Ett bevis presenteras i [Fol89, Thm. 1.87], här med mer teori än vad som täcks i detta arbete. ∎

Vi skall använda Mehlers formel för att visa ett samband mellan generaliserade Hermitefunktioner och *generaliserade Laguerrepolynom*. Det generaliserade Laguerrepolynomet L_k^α av typ $\alpha > -1$ och grad $k \in \mathbb{N}_0$ definieras genom

$$L_k^\alpha(x) := \frac{x^{-\alpha}\mathrm{e}^x}{k!}\frac{d^k}{dx^k}\left(x^{k+\alpha}\mathrm{e}^{-x}\right), \quad x \in \mathbb{R}_+$$

och Laguerrepolynom L_k fås genom att ta $\alpha = 0$.

Lemma 5.6. *För $x \in \mathbb{R}_+$ och $|z| < 1$ gäller*

$$\sum_{k=0}^{\infty} L_k^\alpha(x) z^k = \frac{1}{(1-z)^{\alpha+1}}\mathrm{e}^{-\frac{zx}{1-z}}.$$

Bevis. Låt $x \in \mathbb{R}_+$ och observera att högerledet i ovanstående ekvation är analytisk i den öppna enhetsbollen. Vi kan alltså skriva

$$f(x,z) := \frac{1}{(1-z)^{\alpha+1}}\mathrm{e}^{-\frac{zx}{1-z}} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^\alpha(x) z^k$$

för $|z| < 1$ och med Cauchys formel fås

$$c_n^\alpha(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(x,z)}{z^{n+1}} dz$$

för en sluten kurva γ kring 0. Med variabelbytet $w = x/(1-z)$ ser vi att

$$c_n^\alpha(x) = \frac{x^{-\alpha}\mathrm{e}^x}{2\pi i}\int_\gamma \frac{w^{n+\alpha}\mathrm{e}^{-w}}{(w-x)^{n+1}} dw = \frac{x^{-\alpha}\mathrm{e}^x}{n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^{n+\alpha}\mathrm{e}^{-x}) = L_n^\alpha(x).$$

■

Sats 5.7.

$$\Phi_{kk}(z) = e^{-\frac{\pi}{2}|z|^2} L_k\left(\pi|z|^2\right).$$

Bevis. Låt $G(\xi,y,w) := \sum_k h_k(\xi - \frac{y}{2})h_k(\xi + \frac{y}{2})w^k$. Mehlers formel säger att

$$G_w(\xi,y) = \sqrt{\frac{2}{1-w^2}}\exp\left(\frac{-\pi\left(1+w^2\right)\left((\xi-\frac{y}{2})^2+(\xi+\frac{y}{2})^2\right)+4\pi w(\xi^2-\frac{y^2}{4})}{1-w^2}\right) \tag{5.6}$$

samt att den definierande serien är absolutkonvergent för $|w| < 1$. Det är således legitimt att betrakta den partiella Fouriertransformen $\mathscr{F}_1$, dessutom ger Fubinis sats att

$$[\mathscr{F}_1 G_w](x,y) = \sum_k \mathscr{F}_1\left\{h_k(\xi - \frac{y}{2})h_k(\xi + \frac{y}{2})\right\}(x,y)w^k = \sum_k \Phi_{kk}(x+iy)w^k.$$

Å andra sidan fås högerledet i 5.6, genom att utveckla kvadraterna, till

$$\sqrt{\frac{2}{1-w^2}}\exp\left(-\frac{1+w}{1-w}\frac{\pi}{2}y^2\right)\exp\left(2\frac{1-w}{1+w}\left(-\pi\xi^2\right)\right) =: \sqrt{\frac{2}{1-w^2}}\exp\left(-\frac{1+w}{1-w}\frac{\pi}{2}y^2\right)H_w(\xi).$$

Alltså får vi att

$$\sum_k \Phi_{kk}(x+iy)w^k = \sqrt{\frac{2}{1-w^2}}\exp\left(-\frac{1+w}{1-w}\frac{\pi}{2}y^2\right)[\mathscr{F} H_w](x).$$

Men från räknereglerna i Fourieranalysen ser vi att $[\mathscr{F} H_w](x) = \sqrt{\frac{1}{2}\frac{1+w}{1-w}}\exp\left(-\frac{1+w}{1-w}\frac{\pi}{2}x^2\right)$, se exempelvis [Wei]. Sammanfattningsvis får vi att

$$
\begin{aligned}
\sum_k \Phi_{kk}(x+iy)w^k &= \sqrt{\frac{1}{2}\frac{1+w}{1-w}}\sqrt{\frac{2}{1-w^2}}\exp\left(-\frac{1+w}{1-w}\frac{\pi}{2}y^2\right)\exp\left(-\frac{1+w}{1-w}\frac{\pi}{2}x^2\right) \\
&= \left\{\frac{1-w}{1+w}y^2+\frac{1+w}{1-w}x^2=\frac{(1-w)+2w}{1-w}\left(x^2+y^2\right),\ z:=x+iy\right\} \\
&= \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}|z|^2}\frac{1}{1-z}\exp\left(\frac{\pi w|z|^2}{1-w}\right)=\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}|z|^2}\sum_k L_k(\pi|z|^2)w^k.
\end{aligned}
$$

Att $\Phi_{kk}(z)=\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}|z|^2}L_k(\pi|z|^2)$ följer genom att jämföra serierna termvis. ∎

Sats 5.8.

$$
\Phi_{k+l,k}(z)=\sqrt{\frac{k!}{(k+l)!}}\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}|z|^2}\left(-i\sqrt{\pi}z\right)^l L_k^l\left(\pi|z|^2\right) \tag{5.7}
$$

Lemma 5.9. *För $\partial:=\partial_z=\frac{1}{2}\left(\partial_x-i\partial_y\right)$ har vi följande relation*

$$
\left(\overline{\partial}+\frac{\pi}{2}z\right)\Phi_{k,l}=-i\sqrt{\pi}z\sqrt{l}\Phi_{k,l-1}.
$$

Bevis av Sats 5.8. Antag att Lemma 5.9 är bevisad. Då har vi å ena sidan att

$$
\left(\overline{\partial}+\frac{\pi}{2}z\right)\Phi_{k+1,k+1}=-i\sqrt{\pi}\sqrt{k+1}\Phi_{k+1,k}.
$$

Å andra sidan får vi

$$
\begin{aligned}
\left(\overline{\partial}+\frac{\pi}{2}z\right)\Phi_{k+1,k+1} &= \left(\overline{\partial}+\frac{\pi}{2}z\right)\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}z\overline{z}}L_{k+1}(\pi z\overline{z}) \\
&= \left\{\overline{\partial}\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}z\overline{z}}L_{k+1}(\pi z\overline{z})\right. \\
&= \left.-\frac{\pi}{2}z\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}z\overline{z}}L_{k+1}(\pi z\overline{z})+\pi z\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}z\overline{z}}L'_{k+1}(\pi z\overline{z})\right\} \\
&= \pi z\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}|z|^2}L'_{k+1}(\pi|z|^2).
\end{aligned} \tag{5.8}
$$

Genom att derivera den genererande funktionen tillhörande Laguerrepolynomen ser vi att

$$
\frac{d}{dx}L_k^\alpha(x)=-L_{k-1}^{\alpha+1}(x),
$$

varför

$$
\Phi_{k+1,k}(z)=-\frac{i\sqrt{\pi}z}{\sqrt{k+1}}\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}|z|^2}L_k^1\left(\pi|z|^2\right).
$$

Mer generellt får vi av Lemma 5.9 att

$$
\left(\overline{\partial}+\frac{\pi}{2}z\right)\Phi_{k+l,k+l}=\left(-i\sqrt{\pi}z\right)\sqrt{(k+1)!}\Phi_{k+l,k}.
$$

Med induktionsantagandet

$$
\left(\overline{\partial}+\frac{\pi}{2}z\right)\Phi_{k+l,k+1}=\left(\overline{\partial}+\frac{\pi}{2}z\right)\left[\frac{(k+1)!}{(k+l-1)!}\left(-i\sqrt{\pi}z\right)^{l-1}\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}|z|^2}L_{k+l}^{l-1}\left(\pi|z|^2\right)\right]
$$

erhålls resultatet av en liknande kalkyl som i (5.8). ∎

Bevis av Lemma 5.9. Med samma räkning som i beviset av lemma 5.6 ser vi att Hermitepolynomen har följande genererande funktion

$$\sum_k \frac{H_k(x)}{k!} w^k = \mathrm{e}^{2xw-w^2},$$

för $x \in \mathbb{R}$, $|w| < 1$ och uppfyller följande relationer

$$H_k'(x) = 2kH_{k-1}(x)$$
$$H_k(x) = 2xH_{k-1}(x) - H_{k-1}'(x).$$

Detta implicerar att våra Hermitefunktioner

$$h_k(x) = c_k H_k(\sqrt{2\pi}x)\mathrm{e}^{-\pi x^2}, \quad \text{där } c_k = \frac{2^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{2^k k!}},$$

uppfyller motsvarande relationer

$$(\partial_x + 2\pi x)h_k(x) = (\partial_x + 2\pi x)\left[c_k H_k(\sqrt{2\pi}x)\mathrm{e}^{-\pi x^2}\right] = \sqrt{2\pi}\sqrt{2k}h_{k-1}(x) \tag{5.9}$$

$$(-\partial_x + 2\pi x)h_k(x) = \sqrt{2\pi}\sqrt{2(k+1)}h_{k+1}(x). \tag{5.10}$$

Med dessa i åtanke utför vi ett par kalkyler för att se hur ∂ och z verkar på $\Phi_{k,l}$. Genom att derivera under integraltecknet och skriva $2\xi = \left(\xi + \frac{y}{2}\right) + \left(\xi - \frac{y}{2}\right)$ får vi

$$\partial_x \Phi_{k,l} = -\pi i \left[\int \left(\xi - \frac{y}{2}\right) h_k\left(\xi - \frac{y}{2}\right) h_l\left(\xi + \frac{y}{2}\right)\mathrm{e}^{-2\pi i x\xi} d\xi + \int h_k\left(\xi - \frac{y}{2}\right)\left(\xi + \frac{y}{2}\right) h_l\left(\xi + \frac{y}{2}\right)\mathrm{e}^{-2\pi i x\xi} d\xi\right].$$

Genom att skriva $x\mathrm{e}^{-2\pi i x\xi} = \frac{i}{2\pi}\partial_x \mathrm{e}^{-2\pi i x\xi}$ och partialintegrera får man med produktregeln att

$$x\Phi_{k,l} = -\frac{i}{2\pi}\left[\int h_k'\left(\xi - \frac{y}{2}\right) h_l\left(\xi + \frac{y}{2}\right)\mathrm{e}^{-2\pi i x\xi} d\xi + \int h_k\left(\xi - \frac{y}{2}\right) h_l'\left(\xi + \frac{y}{2}\right)\mathrm{e}^{-2\pi i x\xi} d\xi\right].$$

På liknande sätt fås

$$i\partial_y \Phi_{k,l} = -\frac{i}{2}\left[\int h_k'\left(\xi - \frac{y}{2}\right) h_l\left(\xi + \frac{y}{2}\right)\mathrm{e}^{-2\pi i x\xi} d\xi - \int h_k\left(\xi - \frac{y}{2}\right) h_l'\left(\xi + \frac{y}{2}\right)\mathrm{e}^{-2\pi i x\xi} d\xi\right],$$
$$iy\Phi_{k,l} = -i\left[\int \left(\xi - \frac{y}{2}\right) h_k\left(\xi - \frac{y}{2}\right) h_l\left(\xi + \frac{y}{2}\right)\mathrm{e}^{-2\pi i x\xi} d\xi - \int h_k\left(\xi - \frac{y}{2}\right)\left(\xi + \frac{y}{2}\right) h_l\left(\xi + \frac{y}{2}\right)\mathrm{e}^{-2\pi i x\xi} d\xi\right].$$

Använder vi dessa uttryck och tillämpar 5.9, 5.10 får vi

$$\bar{\partial}\Phi_{k,l} = -\frac{i\sqrt{2\pi}}{4}\left(\sqrt{2(k+1)}\Phi_{k+1,l} + \sqrt{2l}\Phi_{k,l-1}\right)$$
$$\frac{\pi}{2}z\Phi_{k,l} = \frac{i\sqrt{2\pi}}{4}\left(\sqrt{2(k+1)}\Phi_{k+1,l} - \sqrt{2l}\Phi_{k,l-1}\right)$$

Slutligen fås alltså

$$\left(\bar{\partial} + \frac{\pi}{2}z\right)\Phi_{k,l} = -i\sqrt{\pi}\sqrt{l}\Phi_{k,l-1}.$$

■

5.4 En Fouriertransform på H_1

Sammanfattningsvis får man, likt sats 4.2, en ortogonal uppdelning

$$L^2(H_1) \cong V_0 \oplus \widehat{\bigoplus_{n\neq 0}} V_n \widehat{\otimes} V_n^*$$

där vi minns att $V_n = L^2(\mathbb{R})$ för $n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ och där $V_0 = L^2(\mathbb{C})$. Avbildningen ges explicit för $F \in V_n \widehat{\otimes} V_n^*$ av

$$F \longmapsto \Big((t,z) \mapsto \sqrt{|n|}\ \overline{\chi_n(t)}(\mathcal{V}_n F)(z)\Big), \quad \text{då } n \neq 0$$

$$F \longmapsto \Big((t,z) \mapsto \int_{\mathbb{C}} F(w)\chi_z(w)dw\Big), \quad \text{då } n = 0.$$

Speciellt så skickas $h_k \otimes h_l^*$ på den normaliserade matriskoefficienten $\psi_{kl}^n = \sqrt{|n|}\phi_{kl}^n = (\overline{\chi_1} \otimes \Phi_{kl}) \circ \theta_n$ och vi har visat huvudresultat B, nämligen,

5.10 Sats B. *Varje $f \in L^2(H_1)$ kan skrivas som*

$$f(t,z) = \int_{\mathbb{C}} \widehat{f}_0(w)\chi_z(w)dw + \sum_{n\neq 0}\sum_{k,l\geq 0} \langle f, \psi_{kl}^n\rangle \psi_{kl}^n(t,z), \quad \nu - n.ö.$$

med $f_0(z) = \int_{S^1} f(t,z)dt$ och $\psi_{kl}^n = (\overline{\chi_1} \otimes \Phi_{kl}) \circ \theta_n$, där Φ_{kl} uppfyller relationen given i Sats 5.8.

Om vi låter måttet η vara summan av Lebesguemåttet på $\mathbb{C}$ och det diskreta måttet på $\mathbb{Z}\backslash\{0\} \times \mathbb{N}_0^2$ kan vi definiera en Fouriertransform genom att skriva $f \in L^2(H_1)$ som $f = f_0 + f_1$ för $f_0 \in V_0$, $f_1 \in \widehat{\bigoplus}_{n\neq 0} V_n \widehat{\otimes} V_n^*$ och låta

$$\widehat{f}_0(z) = \int_{\mathbb{C}} f_0(w)\overline{\chi_z(w)}dw \ \text{ om } n = 0,$$

$$\widehat{f}_1(n,k,l) = \int_{S^1}\int_{\mathbb{C}} f(t,w)\overline{\psi_{kl}^n(t,w)}dwdt \ \text{ om } n \neq 0.$$

Vi skriver detta som $\widehat{f} = \widehat{f}_0 \cup \widehat{f}_1$, så en Plancherelformel för H_1 är således

$$\int_{\widehat{H}_1} |\widehat{f}|^2 d\eta = \int_{H_1} |f|^2 d\nu,$$

alltså

$$\int_{\mathbb{C}} |\widehat{f}_0(w)|^2 dw + \sum_{n\neq 0}\sum_{k,l\geq 0} |\widehat{f}_1(n,k,l)|^2 = \int_{S^1}\int_{\mathbb{C}} |f(t,z)|^2 dzdt.$$

På samma sätt som för sfären S^2 är Fouriertransformen unitär. Vi avslutar med en tillämpning av Fourier-Wignertransformen.

5.5 Radar

Den grundläggande idén med radar är att med hjälp av (radio)vågor bestämma t.ex. position och/eller hastighet hos ett objekt. En radar består främst av en avsändare som producerar radiovågor, en antenn som skickar och tar emot radiovågor samt någon form av processor som konverterar mottagna vågor till någon annan form av signaler. Vågorna väljs lämpligen så att en så stor del som möjligt av dem reflekteras av objektets material. Ett typiskt exempel kan vara att man vill bestämma position och färdriktning av ett flygplan på långt avstånd. Då radiovågor reflekteras speciellt bra av till exempel metaller och rör sig relativt ostört genom medium som luft och byggnader lämpar de sig för ett sådant problem. Vidare är den långa våglängden till fördel för att undvika multipla avståndsbedömningar i den returnerade signalen. Det är relevant även i sådana situationer att ta hänsyn till störningar i modellering av dessa typer av problem, men vi kommer här att hålla oss från det. Vi tar inspiration från [MM].

Den allmänna idén är att avsända en vågform i flera olika riktningar och samla in de vågor som reflekteras tillbaka till avsändaren. Vi antar här för enkelhets skull att vågor skickas ut i en fix riktning och vidare låter vi objekt vi vill detektera vara på så långt avstånd ifrån oss att vi kan betrakta dem som diskreta punkter (som exempelvis flygplan). Vi kan uttrycka objektens rörelse som en funktion av tid och hastighet relativt radarn, alltså

$$\mathrm{Ob}(t) = \sum_k a_k \delta_{(t-r_k, v(t)-v_k)}$$

där r_k är avstånden till radarn för varje objekt och v_k är varje objekts hastighet relativt radarn med enheter så att ljusets hastighet $c = 1$ är enhetslöst. Konstanterna $a_k \in \mathbb{C}$ beror på reflektiviteten hos objekten i fråga och vi väljer att jobba inom den komplexa domänen av anledningar som motiveras nedan. Radarn skickar iväg en komplexvärd vågform $w \in L^2(\mathbb{R})$ och när vågen reflekteras förskjuts frekvens, fas och amplitud på grund av objektets material samt av dopplereffekten (beroende av färdriktningen) på det sättet att den returnerade signalen ges av

$$\mathrm{Ret}_w(t) = \sum_k a_k w(t-2r_k)\mathrm{e}^{4\pi i v_k f_c t}.$$

Här är f_c bärvågsfrekvensen och vi multiplicerar r_k, v_k med 2 på grund av den dubbla sträckan som vågen färdas. Det är återigen viktigt att påpeka att vi här har försummat störningar. Det man bland annat är intresserad av inom radarteori är följande:

Problem: *Givet en vågform w och en returnerad signal Ret_w, kan vi finna konstanterna $\{(r_k, v_k)\}_k$? Om möjligt, kan vi då välja w på ett sätt som underlättar beräkning av konstanterna?*

Vårt problem ligger alltså i att finna ett mått på hur mycket den avsända signalen har ändrats i fas och frekvens, vilket kan sammanfattas i termer av autokorrelation mot $u = \mathrm{Ret}_w$, med andra ord

$$R_{u,v}(t) = (u * v^*)(t) = \sum_k a_k \int_{\mathbb{R}} w(\tau - 2r_k)\mathrm{e}^{4\pi i v_k f_c \tau}\overline{v(\tau - t)}d\tau \tag{5.11}$$

för vågformer $v \in L^2(\mathbb{R})$. Skriver vi v på samma form som u med konstanter r', v' och betraktar endast ett objekt får vi en korrelationsfunktion

$$R(r', v', t) = \int_{\mathbb{R}} w(\tau - 2r)\overline{w(\tau - t - 2r')}\mathrm{e}^{4\pi i(v-v')f_c\tau}d\tau$$

och vi ser att $||R||_\infty \leq R(r, v, 0) = ||w||_2^2$, så w är en optimal signal om $|R(r', v', t)| = \delta_{(r,v)}$. Detta är förstås ej möjligt, men vi vet att det finns approximativa identiteter i $L^2(\mathbb{R})$. Ekvation 5.11 motiverar oss till att betrakta Fourier-Wignertransformen, som i radarspråk kallas för *ambiguitetsfunktionen* av vågformer. Vi skriver

$$A_{u,v}(t, f) = \mathcal{V}(u,v)(f - it)$$

och vi är nu intresserade av att finna $\{w_\delta\} \subset L^2(\mathbb{R})$ så att $A_{w_\delta, w_\delta} \to \delta_0$, $\delta \to 0$ med inspiration från korrelationsproblemet ovan. Vi vet från tidigare att

$$\begin{aligned} A : L^2(\mathbb{R}) &\to \operatorname{span}\{\Phi_{kk} : k \in \mathbb{N}_0\} \\ w &\longmapsto A_{w,w} \end{aligned} \tag{5.12}$$

är en isometrisk isomorfi, så det finns $w_\delta \in \mathscr{S}(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R})$ så att

$$A_{w_\delta,w_\delta}(z) = \Phi_\delta(z) := \delta^{-2}\Phi_{00}(z/\delta),$$

vilket vi vet är (upp till normalisering) en approximativ identitet då Φ_{00} är en Gaussfunktion. Observera att

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{V}(u,v)(x+iy)dx &= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} u\left(\xi+\frac{y}{2}\right)\overline{v\left(\xi-\frac{y}{2}\right)}e^{2\pi ix\xi}dxd\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}} u\left(\xi+\frac{y}{2}\right)\overline{v\left(\xi-\frac{y}{2}\right)}d\delta_0(\xi) = u\left(\frac{y}{2}\right)\overline{v\left(-\frac{y}{2}\right)} \end{aligned} \tag{5.13}$$

i distributionsmening, så

$$\int_{\mathbb{R}} \Phi_\delta(f-it)df = w_\delta\left(-\frac{t}{2}\right)\overline{w_\delta\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

Då Φ_δ är en radiell reellvärd funktion är w_δ jämn och vi ser nu att vi kan återkonstruera $|w_\delta|$ genom

$$|w_\delta(t)| = \sqrt{\int_{\mathbb{R}} \Phi_\delta(f-2it)df} = \frac{2^{1/4}}{\sqrt{\delta}}e^{-\pi(t/\delta)^2}.$$

Notera att detta också liknar en approximativ identitet i $L^1(\mathbb{R})$. Det går alltså inte att ta emot en 'bra' signal med hög intensitet utan att avsända en signal med hög intensitet. Denna relation kan tolkas som en osäkerhetsprincip för radar i den meningen att

$$||A_{w,w}||_2 = ||w||_2^2.$$

Avslutande anmärkningar

Vi har i denna rapport lagt en grund för den harmoniska analysen på H_1 och sfären. Vi har bestämt matriskoefficienterna explicit och sett att dessa bildar ortonormala familjer i L^2. Vi har dock inte hunnit visa varför dessa funktioner är intressanta ur ett bredare perspektiv, bland annat för att de beter sig väl under gruppteoretiska operationer som faltning. [Fol89] undersöker dessa aspekter och visar en del andra intressanta egenskaper. [Tha93] gör en djupare studie av kopplingen mellan generaliserade Hermitefunktionerna och Laguerrepolynomen. Utöver dessa två källor ger [Dei05] och [DE09] en bredare introduktion till den harmoniska analysen. Vi tackar för vår läsares engagemang.

Referenser

[DE09] Anton Deitmar och Siegfried Echterhoff. *Principles of Harmonic Analysis*. Springer, New York, NY, 2009. ISBN: 978-0-387-85468-7. DOI: 10.1007/978-0-387-85469-4.

[Dei05] Anton Deitmar. *A First Course in Harmonic Analysis*. Springer-Verlag New York, NY, 2005. DOI: 10.1007/0-387-27561-4.

[EW17] Manfred Einsiedler och Thomas Ward. *Functional Analysis, Spectral Theory, and Applications*. Springer International Publishing, 2017. DOI: 10.1007/978-3-319-58540-6.

[Fol89] Gerald B. Folland. *Harmonic Analysis on Phase Space*. Princeton University Press, 1989.

[Kir94] Alexandr Alexandrovich Kirillov. *Representation Theory and Noncommutative Harmonic Analysis I*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1994. ISBN: 978-3-662-03002-8. DOI: 10.1007/978-3-662-03002-8.

[MM] William Moran och Jonathan H. Manton. *Group Theory in Radar and Signal Processing*. URL: https://people.eng.unimelb.edu.au/jmanton/pdf/Manton_Group_Radar.pdf.

[RT08] Michael Ruzhansky och Ville Turunen. *Representation theory of compact groups*. 2008.

[Tha93] Sundaram Thangavelu. *Lectures on Hermite and Laguerre Expansions*. Princeton University Press, 1993.

[Wei] Eric W. Weisstein. *Fourier Transform–Gaussian*. URL: http://mathworld.wolfram.com/FourierTransformGaussian.html.