CHALMERS | GÖTEBORGS UNIVERSITET

# Ramanujans mästarsats: Riesz kriterium och andra tillämpningar

*Examensarbete för kandidatexamen i matematik vid Göteborgs universitet*

Felix Rydell
Niklas Nordgren

Institutionen för Matematiska vetenskaper
CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
GÖTEBORGS UNIVERSITET
Göteborg, Sverige 2019

# Ramanujans mästarsats: Riesz kriterium och andra tillämpningar

*Examensarbete för kandidatexamen i matematik inom Matematikprogrammet vid Göteborgs universitet*

Felix Rydell

*Examensarbete för kandidatexamen i matematik inom Matematikprogrammet vid Göteborgs universitet*

Niklas Nordgren

Handledare: Per Salberger
Examinator: Maria Roginskaya

Institutionen för Matematiska vetenskaper
CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
GÖTEBORGS UNIVERSITET
Göteborg, Sverige 2019

# Populärvetenskaplig presentation

Vem var egentligen Ramanujan, och varför skriver vi om honom? Jo, han var ett matematiskt underbarn med en enorm idérikedom som inspirerat matematiker i snart ett hundra år men som trots detta inte lyckades bli godkänd på högskolan. Han är intressant för oss på grund av hans resultat inom matematiska beräkningar.

Innan sin tidiga död vid 32 års ålder blev hans talang som tur var upptäckt. Han fick då möjlighet att resa till England där han kunde sprida sina idéer till den matematiska gemenskapen. En av hans insikter är motiveringen för vår uppsats och den är ett av hans mest centrala resultat. Den kallas för Ramanujans mästarsats och säger att för vissa komplexa tal $s$ och funktioner $\varphi$ gäller

$$\int_0^\infty x^{s-1}\Big(\varphi(0) - \varphi(1)x + \varphi(2)x^2 - \cdots\Big)dx = \frac{\pi}{\sin \pi s}\varphi(-s).$$

Grunden för denna formel och vårt arbete är det som kallas för komplext deriverbara funktioner. En sådan funktion är definierad på en del av det komplexa planet som ges av

$$\mathbb{C} = \{u + iv : u, v \in \mathbb{R} \text{ och } i = \sqrt{-1}\}.$$

$\mathbb{R}$ betecknar den reella linjen som innehåller alla tal som består av ett heltal och en decimalföljd, till exempel $\pi = 3.14159\ldots$ eller talet 0.25. Med andra ord är de komplexa talen de tal som kan skrivas på formen $u + iv$ där $u$ och $v$ är reella tal och $i$ är en lösning till ekvationen $x^2 = -1$. Notera att $\mathbb{C}$ är ett “plan”, eftersom de komplexa talen har två dimensioner. Från namnet framgår dessutom att en komplext deriverbar funktion går att derivera. De flesta minns från gymnasiet att en funktions derivata i vanliga fall ges av

$$f'(x) := \lim_{\mathbb{R}\ni h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Beteckningen $\lim_{\mathbb{R}\ni h\to 0}$ betyder att vi låter det reella talet $h$ går mot 0 både från den negativa och positiva sidan av nollan. Derivatan är ett grundläggande koncept för stora delar av matematiken och fysiken. Typiskt beräknas $f'$ för att ta reda på lutningen av en kurva i en graf. Fascinerande nog är den komplexa motsvarigheten till derivatan mycket djupare än så. Definitionen är i princip samma som ovan, med enda skillnaden att vi nu skriver

$$f'(x) := \lim_{\mathbb{C}\ni h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Vi låter alltså nu $h$ gå mot noll i alla riktningar i det komplexa planet istället. Det visar sig att komplext deriverbara funktioner har en slags entydighetsegenskap. Om två sådana funktioner är lika på ett litet område med vissa egenskaper, så måste de vara lika överallt. Detta ger upphov till unika utvidgningar, eller fortsättningar som vi också säger, av funktionen i fråga.

En viktig del av vårt arbete behandlar Riemannhypotesen som är matematikens viktigaste olösta förmodan. Den formulerades för över 150 år sedan och är en förmodan som matematiker efter tusentals försök inte kunnat avgöra om den stämmer eller inte. Hypotesen säger att den analytiska fortsättningen till funktionen

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots$$

har en specifik fördelning av sina nollställen, vilket har en betydande roll för till exempel primtalens fördelning. I vårt arbete använder vi mästarsatsens formel för att visa ett tillräckligt och nödvändigt villkor, Riesz kriterium, för denna fundamentala hypotes.

### Sammanfattning

I detta arbete ger vi en rigorös framställning av teorin bakom Ramanujans mästarsats. Vårt syfte är att skriva ut de detaljer i både formuleringar och bevis som utelämnas i litteraturen, samt relatera mästarsatsen till Riesz kriterium. Vi undersöker även ett flertal andra tillämpningar. Vi inleder med en genomgång av några resultat angående Mellintransformen och gammafunktionen. Efter att vi sedan genomfört ett bevis av Ramanujans resultat visar vi på fem tillhörande följdsatser, bland annat Eulers reflektionsformel, som vi tillämpar flitigt under resterande delar av rapporten. Vi bevisar Riesz kriterium genom att tillämpa mästarsatsen, vilket skiljer sig något från Riesz ursprungliga metod. Mot slutet av rapporten presenterar vi en flerdimensionell version av mästarsatsen och ger exempel på vad för integraler vi kan lösa med hjälp av den.

### Abstract

In this paper, we give a rigorous representation of the theory behind Ramanujan's master theorem. Our purpose is to write out the details in the proof that are omitted in the literature, and relate the master theorem to the Riesz criterion. We also investigate several other applications. We begin with a review of some results regarding the Mellin transformation and the gamma function. After we have shown a proof of Ramanujan's result, we show five associated corrollaries including Euler's reflection formula, which we apply many times in the remaining parts of the report. We prove Riesz's criterion by applying the master theorem, which differs somewhat from Riesz original method. Towards the end of the paper we write about applications of the master theorem. We consider a multidimensional version and examples of integrals we can solve with it.

# Förord

Vi har fört en loggbok över de enskilda medverkandes prestationer under arbetet.

Vi har samarbetat om alla delar, men den huvudsakliga ansvarsfördelningen ser ut på följande vis,

- Felix: Avsnitt 2.3, 3, 4 och 5.
- Niklas: Avsnitt 1, 2.1, 2.2 och 6.

Vi vill tacka Per Salberger för tillgänglighet vid frågor och för många funna stavfel.

# Innehåll

# 1 Inledning

## 1.1 Planering

I detta arbete skall vi inleda med en genomgång av Mellintransformen, vilken är grundläggande för mästarsatsen. Efter att vi sedan genomfört ett bevis av Ramanujans resultat planerar vi att visa fem tillhörande följdsatser som vi kommer tillämpa flitigt under resterande delar av rapporten. Vidare vill vi undersöka om Riesz kriterium enklare kan bevisas med hjälp av mästarsatsen. Mot slutet av rapporten skall vi skriva om några av Ramanujans mästarsats tillämpningar. Däribland ingår en flerdimensionell version av mästarsatsen och exempel på vad för integraler vi nu kan lösa med hjälp av den.

## 1.2 Bakgrund

Ramanujans mästarsats skrevs ned av den välkända matematikern Ramanujan, men bevisades först av Hardy. Den beräknar Mellintransformen av vissa potensserier. Detta har många användningsområden, främst att beräkna integraler, men den ser också viss tillämpning i bevis. Den kan generaliseras till flerdimensionella integraler, och på denna form ser den tillämpning på Feynmandiagram och närliggande kvantfysik. De båda versionerna av mästarsatsen är ett aktiva forskningsområden än idag, till exempel finns nutida artiklar angående Fourieranalys och icke-kompakta symmetriska rum.

Ramanujans matematiska arbeten behandlar främst oändliga summor och integraler, men han är också känd för sina resultat inom talteorin. Han skrev inte ut något bevis för flertalet av sina satser och många av dem är endast kända från de anteckningsblock han lämnade kvar efter sin tidiga död vid 32 års ålder. Många av satserna var redan bevisade när han skrev dem, andra har sedan dess bevisats av andra matematiker och några har till och med motbevisats. Han betraktas allmänt som en av de mest begåvade matematikerna någonsin. [1][8]

En av mästarsatsens intressanta egenskaper är att ännu idag finns ingen precist kriterium för när mästarsatsens likhet gäller. Den formulering vi använder i denna rapport ger tillräckliga villkor, men Ramanujans egna exempel uppfyller ofta inte dem. Trots det har flera av de satser han kom fram till på detta sätt senare visat sig vara korrekta.

Mästarsatsen är central inom ett antal områden. Trots det är den relativt okänd. Den vedertagna källan är Hardys bok [1], men där är satsen bevisad i korta drag som egentligen bara går igenom bevisets idéer. Även i den flerdimensionella formuleringen och dess bevis utlämnas detaljer, och dessutom antaganden.

Riemannhypotesen är en av de djupaste obevisade påståendena inom matematiken. Det är både ett av Clay-institutets sju millenieproblem från 2000, och ett av de tjugotre Hilbertproblemen från 1900. Trots så många år som matematikens största olösta förmodan har ingen lyckats bevisa, eller motbevisa, den hittills. Däremot har många ekvivalenta påståenden till hypotesen funnits, däribland Riesz kriterium, som överför problemet på ett annat. Riesz bevisade sitt kriterium 1915, och med det visade han att det finns en koppling mellan Riemannhypotesens sanning eller osanning, och $\zeta$-funktionens beteende på de jämna positiva heltalen.

Beviset av Riesz kriterium har vissa likheter med Ramanujans mästarsats. De bevisades ungefär samtida med varandra, och båda bygger på att Mellintransformera en oändlig summa. Dessa likheter tyder på att det finns en intressant koppling mellan dem.

## 1.3 Syfte

I detta arbete avser vi att ge en rigorös framställning av teorin bakom Ramanujans mästarsats och några av dess tillämpningar. Vi skall speciellt undersöka om det går att visa Riesz kriterium med mästarsatsen, och i så fall jämföra det med Riesz ursprungliga bevis. Ett övergripande syfte är att skriva ut de detaljer i bevis och antaganden som utelämnas i den litteratur vi har hittat.

# 2 Mellintransformen

## 2.1 Transformen och dess invers

Innan vi tar oss an Ramanujans mästarsats, behöver vi kännedom om Mellintransformen. Den är starkt relaterad till Laplace- och Fouriertransformen. Mellintransformen av $f$ ges av

$$\mathcal{M}(f)(s) = \int_0^\infty x^s f(x) \frac{dx}{x}.$$

Den studerades systematiskt av den finske matematikern Hjalmar Mellin. Transformen är flitigt använd inom talteorin och tillhörande komplex analys, men också inom matematisk statistik. För att utnyttja Mellintransformen effektivt behöver vi en sats som ger oss dess invers.

**Sats 2.1** (Mellins inversionssats, [2, s. 7])**.** *För alla styckvis kontinuerliga funktioner $\Phi$, så att integralen $\int_0^\infty x^s \Phi(x) \frac{dx}{x}$ absolutkonvergerar för alla $s$ med $\mathrm{Re}(s) \in (a,b)$, gäller det för alla $\lambda \in (a,b)$ att*

$$\Upsilon(s) = \int_0^\infty x^s \Phi(x) \frac{dx}{x} \quad \textit{medför} \quad \Phi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\lambda - i\infty}^{\lambda + i\infty} \Upsilon(s) x^{-s} ds$$

*nästan överallt, och att $\Upsilon$ är en analytisk funktion i $\mathrm{Re}(s) \in (a,b)$.*

*Omvänt, för alla funktioner $\Upsilon$ som är analytiska i remsan $\mathrm{Re}(s) \in (a,b)$ så att $\int_{\lambda - i\infty}^{\lambda + i\infty} \Upsilon(s) x^{-s} ds$ absolutkonvergerar för alla $\lambda \in (a,b)$, gäller det att*

$$\Phi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\lambda - i\infty}^{\lambda + i\infty} \Upsilon(s) x^{-s} ds \quad \textit{medför} \quad \Upsilon(s) = \int_0^\infty x^s \Phi(x) \frac{dx}{x}$$

*och $\Phi$ är en styckvis kontinuerlig funktion på $\mathbb{R}_+$ med $\Phi(x) = \frac{1}{2}\big(\lim_{w \to x^+} \Phi(w) + \lim_{w \to x^-} \Phi(w)\big)$ för alla $x \in \mathbb{R}_+$.*

*Bevis.* Skriv $s = \lambda + it$, och sätt $y = -\log(x)$. Med hjälp av satsen om inversa Fouriertransformen (se sats A.1) och variabelbytet ovan får vi att

$$\begin{aligned}
& \Upsilon(s) = \int_0^\infty x^s \Phi(x) \frac{dx}{x} && \iff \\
\iff \quad & \Upsilon(s) = \int_0^\infty \Phi(e^{\log(x)}) e^{\log(x) s} \frac{dx}{x} && \iff \\
\iff \quad & \Upsilon(\lambda + it) = \int_{-\infty}^\infty \big(\Phi(e^{-y}) e^{-y\lambda}\big) e^{-iyt} dy && \iff \\
\iff \quad & \int_{-\infty}^\infty \Upsilon(\lambda + it) e^{yit} dt = 2\pi i \big(\Phi(e^{-y}) e^{-y\lambda}\big) && \iff \\
\iff \quad & \int_{-\infty}^\infty \Upsilon(\lambda + it) e^{-y(-\lambda - it)} dt = 2\pi i \Phi(e^{-y}) && \iff \\
\iff \quad & \int_{\lambda - i\infty}^{\lambda + i\infty} \Upsilon(s) x^{-s} ds = 2\pi i \Phi(x).
\end{aligned}$$

Det som återstår att visa är de påstådda egenskaperna för $\Phi$ och $\Upsilon$. Vi visar att $\Upsilon$ är analytisk genom att visa att $\Upsilon'$ existerar. Eftersom integralen i uttrycket $\Upsilon'(s) = \frac{d}{ds} \int_0^\infty x^s \Phi(x) \frac{dx}{x}$ är absolutkonvergent kan vi integrera och differentiera i omvänd ordning. Vi ser först följande,

$$\int_0^\infty \Big|\frac{d}{ds} \Phi(x) x^{s-1}\Big| dx = \int_0^\infty |\Phi(x) \log(x) x^{s-1}| dx.$$

För varje tillräckligt litet $\epsilon > 0$ finns ett $\delta > 0$ så att $|\log(x)| < x^{-\epsilon}$ för $0 < x < \delta$ och $\log(x) < x^\epsilon$ för $x > \frac{1}{\delta}$. Välj en omgivning $[s - \epsilon, s + \epsilon]$ till $s$ i intervallet $(a,b)$. Vi får
$\int_0^\infty |\Phi(x) \log(x) x^{s-1}| dx \leq \int_0^\delta |x^{s-\epsilon-1} \Phi(x)| dx + \int_\delta^{1/\delta} |\log(x) x^{s-1} \Phi(x)| dx + \int_{1/\delta}^\infty |x^{s+\epsilon-1} \Phi(x)| dx$. Den

första och den sista termen i högerledet konvergerar då $s-\epsilon, s+\epsilon \in (a,b)$, och den mittersta termen är ändlig. Alltså absolutkonvergerar $\Upsilon'$.

För att visa påståendet om $\Phi$ använder vi sats A.1. $\widetilde{\Phi}(y) = \Phi(e^{-y})e^{-y\lambda}$ uppfyller villkoret $\widetilde{\Phi}(y) = \frac{1}{2}\big(\lim_{w\to y^+}\widetilde{\Phi}(w) + \lim_{w\to y^-}\widetilde{\Phi}(w)\big)$. Eftersom $\Phi(x) = x^\lambda\widetilde{\Phi}(-\log x)$ och $x^\lambda$ är kontinuerlig och $-\log x$ är monoton, så uppfyller $\Phi$ samma villkor.

$\square$

*Anmärkning* 2.1. Antag att integralen

$$\int_0^\infty x^s\Phi(x)\frac{dx}{x}$$

absolutkonvergerar för alla $s$ med $\mathrm{Re}(s) \in (a,b)$. Då är integralen en analytisk funktion med avseende på $s$ i samma område enligt beviset av satsen ovan.

## 2.2 Egenskaper

Vi skall nu diskutera några viktiga egenskaper hos Mellintransformen som vi kommer ha nytta i rapporten. Först får vi följande direkt ur definitionen av Mellintransformen,

$$\begin{aligned} f(x) = x^z g(x) \quad &\Rightarrow \quad \mathcal{M}(f)(s) = \mathcal{M}(g)(s+z),\\ f(x) = g(zx) \quad &\Rightarrow \quad \mathcal{M}(f)(s) = z^{-s}\mathcal{M}(g)(s),\\ f(x) = e^{-x} \quad &\Rightarrow \quad \mathcal{M}(f)(s) = \Gamma(s) \end{aligned} \tag{1}$$

där implikationerna endast betyder något när alla termer konvergerar. Vi ger också ett naturligt korollarium till Mellininversionen.

**Följdsats 2.1** (Entydighet för Mellintransformen)**.** *Om Mellintransformerna för de kontinuerliga funktionerna $f$ och $g$ absolutkonvergerar och antar samma värden på ett öppet område i $\mathbb{C}$, så gäller $f(x) = g(x)$ då $x \geq 0$.*

*Bevis.* Om Mellintransformen av någon funktion $h$ absolutkonvergerar för något $s_1$, så absolutkonvergerar det för alla $s$ med samma realdel. Detta ger att Mellintransformerna av $f$ och $g$ sammanfaller på en öppen remsa. Nu kan vi kan enligt sats 2.1 Mellininvertera båda sidor av $\mathcal{M}(f)(s) = \mathcal{M}(g)(s)$. Detta ger att $f = g$ nästan överallt, och eftersom de båda är kontinuerliga räcker detta. $\square$

I proposition A.4 visar vi ett exempel på en viss Mellintransform som är lika med $\Gamma(s)\zeta(s)$. Detta är en välkänd funktion, och den är ett av många skäl att Mellintransformen studeras.

## 2.3 Gammafunktionen

Vi har ovan sett att gammafunktionen är en Mellintransform, eftersom att den uppfyller likheten

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty x^{z-1}e^{-x}dx$$

när $\mathrm{Re}(s) > 0$. Denna transform är speciellt intressant för detta arbete, eftersom den bland annat uppkommer i en av mästarsatsen formuleringar. För gammafunktionen gäller $\Gamma(n) = (n-1)!$ på $\mathbb{Z}_+$ och den har en analytisk fortsättning till $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \cdots\}$, vilket för övrigt ges av följdsats 3.2. Dessutom är den nollskild på $\mathbb{C}$ och har för varje icke-positivt heltal $n$ en enkel pol med residyn $(-1)^n/n!$. Den reciproka gammafunktionen $1/\Gamma$ är en hel funktion. Ett välkänt resultat om gammafunktionen kallas Stirlings formel [5, s. 555]. Den gäller för alla $z$ med $|\arg(z)| < \pi$ och säger†

$$\begin{aligned} \Gamma(z) &= \sqrt{\frac{2\pi}{z}}\Big(\frac{z}{e}\Big)^z\bigg(1 + \mathcal{O}\big(\frac{1}{|z|}\big)\bigg)\\ &= \big(\sqrt{2\pi}e^{-\mathrm{Log}(z)/2 + z\mathrm{Log}(z) - z}\big)\bigg(1 + \mathcal{O}\big(\frac{1}{|z|}\big)\bigg). \end{aligned}$$

†Betydelsen av $\mathcal{O}$ ges av definition A.1 och med Log menar vi principiallogaritmen.

Vi presenterar nu två resultat som är grundläggande för vår uppsats. De följer direkt ur Stirlings formel och är anpassade efter våra syften.

**Proposition 2.1.** *Det finns ett* $C \geq 0$ *med*

$$\left|\frac{1}{\Gamma(z)}\right| \leq Ce^{\mathrm{Re}(z)+\frac{\pi}{2}|\mathrm{Im}(z)|}$$

*i området* $\mathrm{Re}(z) \geq 1/2$.

*Bevis.* Vi definierar först funktionen $\Delta(z) = \sqrt{2\pi}e^{-\mathrm{Log}(z)/2+z\mathrm{Log}(z)-z}$. Enligt Stirlings formel finns det ett $r$ så att $|\Delta(z)|/2 \leq |\Gamma(z)|$ för $|z| > r$. Vi ser vidare att

$$\begin{aligned}\log(|\Delta(z)|) &= \log(\sqrt{2\pi}) + \mathrm{Re}(-\mathrm{Log}(z)/2 + z\mathrm{Log}(z) - z)\\ &= \log(\sqrt{2\pi}) - \log(|z|)/2 + \mathrm{Re}(z)\log(|z|) - \arg(z)\mathrm{Im}(z) - \mathrm{Re}(z).\end{aligned}$$

Detta medför att $\log(|\Delta(z)|) \geq C_1 - \mathrm{Re}(z) - \pi/2|\mathrm{Im}(z)|$ för något $C_1$, eftersom $\log(|z|)(\mathrm{Re}(z)-1/2)$ antar ett minimum i $\mathrm{Re}(z) \geq 1/2$ . Slutligen ser vi att $|\Gamma|$ antar ett minimum på det kompakta området $\{z : \mathrm{Re}(z) \geq 1/2, |z| \leq r\}$. Därför finns ett $C_2 > 0$ med
$C_2e^{-\mathrm{Re}(z)-\frac{\pi}{2}|\mathrm{Im}(z)|} \leq |\Gamma(z)|$ i vårt område. □

**Proposition 2.2.** *För varje fixt* $x \in \mathbb{R}$ *får vi*

$$|\Gamma(x+iy)| = \sqrt{2\pi}|y|^{x-1/2}e^{-x-\frac{\pi}{2}|y|}[1 + \mathcal{O}(\frac{1}{|y|})].$$

*Vidare gäller*:

*i) Tag* $a, b \in \mathbb{R}$. *För något* $B \geq 0$ *och för tillräckligt stora* $|y|$, *får vi för alla* $x \in [a, b]$

$$|\Gamma(x+iy)| \leq B|y|^{b-1/2}e^{-\frac{\pi}{2}|y|}.$$

*ii) Låt* $Q < \pi/2$ *och* $\lambda > 0$. *Då gäller*

$$\int_{\lambda-i\infty}^{\lambda+i\infty} |\Gamma(s)|e^{Q|\mathrm{Im}(s)|}ds < \infty.$$

*Bevis.* Se proposition A.5. □

# 3 Ramanujans mästarsats

## 3.1 Hardys bevis

I detta avsnitt formulerar vi den sats som Ramanujan kallade "Master theorem". Det var ett av hans viktigaste verktyg för att beräkna integraler och oändliga summor. Han skrev själv aldrig ned under vilka hypoteser satsen gällde, men Hardy publicerade ett bevis en tid efter Ramanujans död år 1920.

**Sats 3.1** (Ramanujans mästarsats för $\varphi$, [1, s. 189])**.** *Låt* $0 < \delta < 1$. *Antag att* $\varphi$ *är analytisk på halvplanet* $\mathrm{Re}(z) \geq -\delta$ *och att vi där har* $|\varphi(u+iv)| \leq Ce^{Pu+Q|v|}$ *för något* $C \geq 0$, $P \in \mathbb{R}$ *och* $Q < \pi$. *Då gäller*

$$\int_0^\infty x^{s-1}\sum_{n=0}^\infty \varphi(n)(-x)^n dx = \frac{\pi}{\sin \pi s}\varphi(-s)$$

*för alla* $s$ *med* $0 < \mathrm{Re}(s) < \delta$.

En alternativ formulering ges av följdsats 3.5 och vi kallar även den för mästarsatsen. Vi observerar att med vår begränsning av $\varphi$ kan vi endast vara säkra på att summan i vänsterledet absolutkonvergerar då $0 \leq x < e^{-P}$ och när summan ej konvergerar betraktar vi istället dess analytiska fortsättning. Vi förklarar detta mer utförligt i anmärkning 3.1 och exempel 3.1.

Den observante läsaren ställer sig också frågan hur det är möjligt att bestämma värdena av $\varphi$ på remsan $-\delta < \mathrm{Re}(s) < 0$ endast utifrån dess värden på $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \cdots\}$. Detta behandlas i följdsats 3.1 och svaret är begränsningen av $\varphi$. Om $\varphi$ uppfyller villkoren i satsen, kommer till exempel $\varphi(z) + \sin(\pi z)$ inte att göra det trots att de antar samma värden på $\mathbb{N}_0$.

I beviset nedan utgår vi ifrån idéerna som Hardy presenterar, men vi fyller i en rad detaljer som han utelämnar.

*Bevis.* Vi definierar först

$$\Phi_N(x) = \sum_{n=0}^{N} \varphi(n)(-x)^n \text{ och } \Psi(s) = \frac{\pi}{\sin \pi s}\varphi(-s)x^{-s}.$$

Vi observerar att $\Phi_N(x) = \sum_{n=0}^{N} \mathrm{Res}\{\Psi, -n\}$, eftersom $\varphi(-s)x^{-s}$ är analytisk för fixt $x > 0$ och $\pi/\sin \pi s$ har residyn $(-1)^n$ i punkten $n \in \mathbb{Z}$. Tag nu $0 < \lambda < \delta$ och $N \in \mathbb{Z}_+$. Betrakta den rektangeln i det komplexa planet som består av de raka linjesegmenten

$$\begin{aligned}
&\gamma_1 : \lambda + iy && y : -N \to N,\\
&\gamma_2 : y + iN && y : \lambda \to -N - 1/2,\\
&\gamma_3 : -N - 1/2 + iy && y : N \to -N,\\
&\gamma_4 : y - iN && y : -N - 1/2 \to \lambda.
\end{aligned}$$

Cauchys residysats† ger oss

$$2\pi i \Phi_N(x) = \int_{\gamma_1} \Psi(s)ds + \int_{\gamma_2} \Psi(s)ds + \int_{\gamma_3} \Psi(s)ds + \int_{\gamma_4} \Psi(s)ds$$

och vi vill veta vad som händer när $N \to \infty$. Tag $0 < x < e^{-P}$. Integralen över $\gamma_2$ uppskattar vi med hjälp av lemma A.1 *i)* och av att $-(P + \log x) > 0$ och får

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\lambda}^{-(N+1/2)} \Psi(y + iN)dy\right| &\leq \pi \int_{-(N+1/2)}^{\lambda} \frac{|\varphi(-y - iN)||x^{-y-iN}|}{|\sin(\pi(y + iN))|}dy\\
&< 2\pi C \int_{-(N+1/2)}^{\lambda} \frac{e^{-(P+\log x)y+QN}}{|e^{\pi N} - e^{-\pi N}|}dy\\
&\leq 2\pi C\Big(\frac{e^{(Q-\pi)N}}{|1 - e^{-2\pi N}|}\Big)e^{-(P+\log x)\lambda} \int_{-(N+1/2)}^{\lambda} 1dy,
\end{aligned}$$

där sista högerledet går mot 0 när $N \to \infty$. Integralen över $\gamma_4$ går analogt mot 0. Till slut betraktar vi $\gamma_3$. Vi observerar först att om $x < e^{-P}$, finns det alltid ett $\omega > 0$ så att $x < e^{-(P+\omega)}$. Vi får enligt lemma A.1 *ii)* följande uppskattningar,

$$\begin{aligned}
\left|\int_{N}^{-N} \Psi(-(N + 1/2) + iy)dy\right| &\leq \pi \int_{-N}^{N} \frac{|\varphi(N + 1/2 - iy)||x^{N+1/2-iy}|}{|\sin(\pi(N + 1/2 - iy))|}dy\\
&< 2\pi C \int_{-N}^{N} \frac{e^{Q|y|-\omega(N+1/2)}}{e^{|\pi y|}}dy\\
&\leq 2\pi C e^{-\omega(N+1/2)} \int_{-N}^{N} e^{(Q-\pi)|y|}dy.
\end{aligned}$$

Återigen går det sista högerledet mot 0 då $N \to \infty$. Vi definierar nu $\Phi(x) = \lim_N \Phi_N(x)$ och får således

$$\Phi(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} \Psi(s)ds = \frac{1}{2\pi i}\int_{\lambda-i\infty}^{\lambda+i\infty} \frac{\pi}{\sin \pi s}\varphi(-s)x^{-s}ds. \tag{2}$$

†Sats A.2 i appendix.

En liknande kalkyl som ovan ger att integralen är absolutkonvergent för alla $x > 0$. Vi utvidgar därför $\Phi$ från $0 < x < e^{-P}$ till alla $x > 0$ med hjälp av den. Dessutom är $\Upsilon(s) = \pi\varphi(-s)/\sin\pi s$ analytisk på remsan $0 < \mathrm{Re}(s) < \delta$ och därför får vi i detta område enligt Mellins inversionssats

$$\int_0^\infty x^{s-1}\Phi(x)dx = \frac{\pi}{\sin\pi s}\varphi(-s).$$

□

*Anmärkning* 3.1. Observera att vi för utvidgningen av $\Phi$ via (2), kan visa likformig konvergens på kompakta delmängder till $\{x \in \mathbb{C} : |\arg(x)| < c\}$ för något $c > 0$. Därför är $\Phi$ är analytisk på $\mathbb{R}_+$ [3, s. 409]. Antag nu att $f$ är en analytisk funktion längs hela positiva $x$-axeln och att vi kan skriva

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(n)(-x)^n$$

i någon omgivning kring 0. Om det är så att $\varphi$ uppfyller mästarsatsens antaganden, sammanfaller $f$ med utvidgningen av summan $\sum \varphi(n)(-x)^n$ på hela $\mathbb{R}_+$ enligt identitetssatsen†. Detta ger oss möjligheten att beräkna Mellintransformer för en stor klass av funktioner, vilket vi utnyttjar i exempel 3.1.

## 3.2 Följdsatser

Mästarsatsen är ett resultat med många konsekvenser. I denna del kommer vi presentera ett antal av dem och ge tillräckligt med teori för att kunna bevisa följdsats 3.5. Vi börjar med en direkt observation.

**Följdsats 3.1** (Entydighetssatsen). *Låt $0 < \delta < 1$. Antag att $\varphi$ är analytisk på halvplanet $\mathrm{Re}(z) \geq -\delta$ och att vi där har $|\varphi(u + iv)| \leq Ce^{Pu+Q|v|}$ för något $C > 0$, $P \in \mathbb{R}$ och $Q < \pi$. Då bestäms $\varphi$ entydigt utifrån sina värden på $\mathbb{N}_0$.*

*Bevis.* Om två funktioner uppfyller antagandena och antar samma värden på $\mathbb{N}_0$, måste deras motsvarande integraler i mästarsatsen vara lika. Mästarsatsens formel ger då att funktionerna sammanfaller på en öppen, sammanhängande mängd. Nu får vi påståendet av identitetssatsen. □

*Anmärkning* 3.2. Det finns ingen analytisk funktion $\varphi \neq 0$ som på ett halvplan $\mathrm{Re}(s) \geq -\delta$ kan uppskattas med $|\varphi(u + iv)| \leq Ce^{Pu+Q|v|}$ där $Q < 0$. För att se detta, observera först att $\tilde{\varphi}(z) = \sin(\pi z)\varphi(z)$ uppfyller mästarsatsens antaganden. Men $\tilde{\varphi}(n) = 0$ för $n \in \mathbb{N}_0$ och eftersom funktionen bestäms entydigt av detta måste $\tilde{\varphi} = 0$, vilket visar $\varphi = 0$. En annan tillämpning av denna sats ges av proposition 6.1.

Det finns liknande entydighetssatser oberoende av Ramanujan. Ett sådant resultat visades av svensken Fritz Carlson år 1914, och kan härledas ur den så kallade Praghmén-Lindelöf-principen.

Reflektionsformeln som vi nu framför är förstås känd sedan länge. De typiska bevisen använder Eulers eller Weierstrass framställning av gammafunktionen, men med hjälp av mästarsatsen får vi formeln direkt utifrån integralframställningen.

**Följdsats 3.2** (Eulers reflektionsformel). *För alla $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ gäller*

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin\pi z}.$$

*Bevis.* Låt $\varphi(z) = 1/\Gamma(z + 1)$. Funktionen är analytisk överallt och uppfyller mästarsatsens begränsningskrav enligt proposition 2.1 för $\delta = 1/2$. Vi gör nu följande härledning

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}dx = \int_0^\infty x^{s-1}\sum_{n=0}^{\infty}\varphi(n)(-x)^n dx = \Big(\frac{\pi}{\sin\pi s}\Big)\frac{1}{\Gamma(1-s)}$$

för alla $s$ med $0 < \mathrm{Re}(s) < 1/2$. Men både högerledet och vänsterledet är analytiska utanför de icke-positiva heltalen, och enligt identitetssatsen måste nu satsen gälla på $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$. □

†Sats A.3

Vid närmare analys av följdsats 3.2 ser vi att något intressant har inträffat. I hela området $\mathrm{Re}(s) > 0$ fick vi likheten

$$\int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}dx = \Big(\frac{\pi}{\sin \pi s}\Big)\frac{1}{\Gamma(1-s)},$$

trots att mästarsatsen endast säger något om $0 < \mathrm{Re}(s) < 1$. Anledningen är att gammafunktionens poler tar ut sinusfunktionens nollställen, vilket gör högerledet analytiskt. Även vänsterledet är analytiskt och därför får vi likhet i det större området enligt identitetssatsen. Alltså, för vissa $\varphi$ gäller likheten utanför remsan som ges av mästarsatsen och för dessa har vi $\varphi(n) = 0$ för de negativa heltalen i vårt utvidgade område.

Vi är intresserade av att låta $\delta \geq 1$. Av denna anledning kommer vi justera våra antaganden. Först introducerar vi beteckningen $\phi$. Likt $\varphi$ är det en notation för en funktion som uppfyller mästarsatsen antaganden, men med $Q < \pi/2$.

*Anmärkning* 3.3. Betrakta följande summa med $\phi$ som ovan,

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{\phi(n)}{n!}(-x)^n.$$

Observera att $\phi(z)/\Gamma(z+1)$ uppfyller mästarsatsens antagande enligt proposition 2.1 för något $0 < \delta < 1/2$. Summan är även absolutkonvergent för alla $x \in \mathbb{C}$, därför att vi har

$$\sum_{n=0}^\infty \Big|\frac{\phi(n)}{n!}(-x)^n\Big| \leq C\sum_{n=0}^\infty \frac{(e^P|x|)^n}{n!} = Ce^{e^P|x|}.$$

**Följdsats 3.3** (En uppskattning)**.** *Låt $\phi$ uppfylla antagandena i sats 3.1 för något $\delta > 0$, men med $Q < \pi/2$. Då finns för varje $0 < \lambda < \delta$ ett $B \geq 0$ med*

$$\Big|\sum_{n=0}^\infty \frac{\phi(n)}{n!}(-x)^n\Big| \leq Bx^{-\lambda}$$

*för alla $x > 0$.*

*Bevis.* Vi ser att $\varphi(z) = \phi(z)/\Gamma(z+1)$ uppfyller mästarsatsens krav för varje fixt $0 < \delta_0 < \min\{\delta, 1/2\}$ enligt proposition 2.1. Tag därför $\lambda_0 = \delta_0/2$. Nu får vi av (2) och reflektionsformeln

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{\phi(n)}{n!}(-x)^n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\delta_0/2-i\infty}^{\delta_0/2+i\infty} \Gamma(s)\phi(-s)x^{-s}ds.$$

Tag ett godtyckligt $0 < \lambda < \delta$. Vi vill först visa att

$$\int_{\delta_0/2-i\infty}^{\delta_0/2+i\infty} \Gamma(s)\phi(-s)x^{-s}ds = \int_{\lambda+i\infty}^{\lambda-i\infty} \Gamma(s)\phi(-s)x^{-s}ds \tag{3}$$

med hjälp av Cauchys sats†. Tag $N \in \mathbb{Z}_+$. Vi konstruerar därför rektangeln som består av följande linjesegment,

$$\begin{aligned} &\gamma_1 : \delta_0/2 + iy && y : -N \to N,\\ &\gamma_2 : y + iN && y : \delta_0/2 \to \lambda,\\ &\gamma_3 : \lambda + iy && y : N \to -N,\\ &\gamma_4 : y - iN && y : \lambda \to \delta_0. \end{aligned}$$

Funktionen $\Gamma(s)\phi(-s)$ är analytisk på $0 < \mathrm{Re}(s) < \delta$ enligt antagande. För att visa (3) räcker det därför om integralerna över $\gamma_2$ och $\gamma_4$ går mot 0. Dessa integraler ges av

$$F_\pm(N) = \pm\int_{\delta_0/2}^{\lambda} \Gamma(y \pm iN)\phi(-y \mp iN)x^{-y \mp iN}dy.$$

†Sats A.4 i appendix.

För att se $F_\pm(N) \to 0$ använder vi att $|\Gamma(\bar{z})| = |\Gamma(z)|$, vilket kommer direkt ur definitionen av $\Gamma$. Vi får

$$|F_\pm(N)| \leq C \sup_{y \in [\delta_0/2, \lambda]} |\Gamma(y+iN)| e^{QN} \Big| \int_{\delta_0/2}^{\lambda} e^{-Py} x^{-y} dy \Big|,$$

där integralen är begränsad och oberoende av $N$. Enligt proposition 2.2 *i)* gäller också $\sup |\Gamma(y+iN)| e^{QN} \to 0$ då $N \to \infty$, alltså $F_\pm(N) \to 0$. Vi får nu med hjälp av (3) för alla $x > 0$

$$\Big| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\phi(n)}{n!} (-x)^n \Big| \leq \frac{Ce^{P\lambda}}{2\pi} x^{-\lambda} \int_{\lambda - i\infty}^{\lambda + i\infty} |\Gamma(s)| e^{Q|\mathrm{Im}(s)|} ds.$$

Integralen konvergerar enligt proposition 2.2 *ii)* och därmed är vi klara.

□

**Följdsats 3.4** (Kriterium för analyticitet)**.** *Låt $\phi$ uppfylla antagandena i sats 3.1 för något $\delta > 0$, men med $Q < \pi/2$. Då gäller att*

$$\int_0^\infty x^{s-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\phi(n)}{n!} (-x)^n dx$$

*absolutkonvergerar och är analytisk med avseende på $s$ i området $0 < \mathrm{Re}(s) < \delta$.*

*Bevis.* Enligt anmärkning 2.1 räcker det att visa att integralen absolutkonvergerar. Låt $\Phi(x)$ beteckna summan i integranden. Enligt anmärkning 3.3 är $\Phi$ uppåt begränsad i området $0 \leq x \leq 1$, säg av $B'$. Tag $0 < \lambda < \delta$. Nu får vi enligt följdsats 3.3,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \big| x^{s-1} \Phi(x) \big| dx &= \int_0^1 \big| x^{s-1} \Phi(x) \big| dx + \int_1^\infty \big| x^{s-1} \Phi(x) \big| dx \\ &\leq B' \int_0^1 x^{\mathrm{Re}(s)-1} dx + B \int_1^\infty x^{\mathrm{Re}(s)-\lambda-1} dx. \end{aligned}$$

Den första integralen konvergerar för $\mathrm{Re}(s) > 0$ och den andra precis då $\mathrm{Re}(s) - \lambda < 0$. Vi har därför absolutkonvergens då $0 < \mathrm{Re}(s) < \delta$. □

Motsvarigheter till följdsats 3.3 och 3.4 för summan i sats 3.1 presenterar vi i sats A.6. Mot bakgrund av följdsats 3.4 ger vi nu en ny, men välkänd, formulering av mästarsatsen[††].

**Följdsats 3.5** (Ramanujans mästarsats för $\phi$)**.** *Låt $\delta > 0$. Antag att $\phi$ är analytisk på halvplanet $\mathrm{Re}(z) \geq -\delta$ och att vi där har $|\phi(u+iv)| \leq Ce^{Pu+Q|v|}$ för något $C \geq 0$, $P \in \mathbb{R}$ och $Q < \pi/2$. Då gäller*

$$\int_0^\infty x^{s-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\phi(n)}{n!} (-x)^n dx = \Gamma(s)\phi(-s)$$

*för alla $s$ med $0 < \mathrm{Re}(s) < \delta$. Speciellt, om $\delta$ kan väljas godtyckligt stort, gäller formeln i hela halvplanet $\mathrm{Re}(s) > 0$.*

*Bevis.* Låt $\varphi(z) = \phi(z)/\Gamma(z+1)$. Likheten för $0 < \mathrm{Re}(s) < \min\{\delta, 1/2\}$ fås via direkt tillämpning av proposition 2.1, sats 3.1 och reflektionsformeln.

Eftersom $\Gamma(s)\phi(-s)$ är analytisk när $0 < \mathrm{Re}(s) < \delta$, räcker det enligt identitetssatsen att visa att integralen är en analytisk funktion med avseende på $s$ i samma område. Men det följer direkt av följdsats 3.4.

□

När vi framöver skriver att en funktion uppfyller mästarsatsens antaganden, kommer vi hänvisa till antingen sats 3.1 eller följdsats 3.5, beroende på om vi betecknar funktionen i fråga med $\varphi$ eller $\phi$.

[††]Formuleringen ger ett specialfall och är en inskränkning av sats 3.1.

*Anmärkning* 3.4. Vi har nu utvidgat området där mästarsatsen gäller till hela halvplanet $\mathrm{Re}(s) > 0$ för vissa $\varphi$, men går det att utvidga området ytterligare? Nej, åtminstone inte på något meningsfullt sätt. Om $k$ är det minsta talet i $\mathbb{N}_0$ med $\varphi(k) \neq 0$, så divergerar integralen alltid för $\mathrm{Re}(s) \leq -k$. Detta ser vi eftersom integralen över $0 < x < e^{-P}$, där summan alltid absolutkonvergerar, divergerar under dessa förutsättningar.

Enligt anmärkning 3.1 är mästarsatsen ett verktyg som beräknar integraler på formen

$$\int_0^\infty x^{\beta-1} f(x)dx,$$

där $f$ är en analytisk funktion vars koefficienter till dess Maclaurinutveckling växer tillräckligt snällt i det komplexa planet. Vi ger nu ett konkreta exempel på hur vi kan använda mästarsatsen för sådana beräkningar.

*Exempel* 3.1. Antag att vi vill bestämma följande integral,

$$\Lambda = \int_0^\infty \frac{\log(1+x)}{x^{3/2-i}} dx.$$

Funktionen $\log(1+x)$ är analytisk på $\mathbb{R}_+$, men dess Mauclarinutvecklingen $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{n+1}/(n+1)$ absolutkonvergerar endast för $|x| < 1$. Vi sätter $\varphi(z) = 1/(z+1)$ och ser att denna funktion är analytisk och begränsad av en konstant då till exempel $\mathrm{Re}(s) \geq -3/4$. Vi kan därför låta $\delta = 3/4$, och sätta $s = 1/2 + i$. $\varphi$ uppfyller mästarsatsens antaganden så enligt anmärkning 3.1 får vi

$$\Lambda = \int_0^\infty x^{(1/2+i)-1} \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(n)(-x)^n dx = \frac{\pi}{\sin \pi s}\varphi(-s) = \left(\frac{4\pi}{5}\right)\frac{1+2i}{e^\pi + e^{-\pi}}.$$

## 3.3 En utvidgning

Vi kan bli frestade att som ovan beräkna Mellintransformen för sinus eller cosinus istället för log, men deras utvecklingar uppfyller ej vårt tillväxtkrav eftersom de båda har motsvarande $Q = \pi$. Vi ska nu presentera en sats där vi visar att i vissa fall kan vi ändå tillämpa mästarsatsen.

**Sats 3.2** (En utvidgning för $\varphi$)**.** *Låt $\varphi$ uppfylla mästarsatsens antaganden för något $0 < \delta < 1$, men med $Q = \pi$. Säg också att $\varphi_m$ är en följd av funktioner som uppfyller mästarsatsens krav för samma $\delta$. Antag att alla $\varphi_m$ och $\varphi$ har samma värde på sina motsvarande $C$ och $P$. Antag vidare:*

*i) För varje $0 < \lambda < \delta$ finns det ett $B \geq 0$ med*

$$\Big|\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_m(n)(-x)^n\Big| \leq Bx^{-\lambda}$$

*för alla $m$ och alla $x > 0$.*

*ii) Vi har $\varphi_m \to \varphi$ punktvis i området $0 < \mathrm{Re}(s) < \delta$ och*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_m(n)(-x)^n \to \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(n)(-x)^n$$

*punktvis på $\mathbb{R}_+$.*

*Då gäller mästarsatsens formel för $\varphi$ i området $0 < \mathrm{Re}(s) < \delta$.*

*Bevis.* Enligt mästarsatsen och antagande *ii*) får vi för alla $m$ i området $0 < \mathrm{Re}(s) < \delta$

$$\int_0^\infty x^{s-1} \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_m(n)(-x)^n dx = \frac{\pi}{\sin \pi s}\varphi_m(-s) \to \frac{\pi}{\sin \pi s}\varphi(-s).$$

Vi använder nu dominerad konvergens på integralen i vänsterledet ovan. I området $0 \leq x \leq e^{-P}/2$ väljer vi $g(x) = 2Cx^{s-1}$, och för $x > e^{-P}/2$ väljer vi $g(x) = Bx^{s-\lambda-1}$, där $C, P, \lambda$ och $B$ är som i våra antaganden. Det kan enkelt kontrolleras att detta är en integrerbar funktion över $\mathbb{R}_+$

i området $0 < \mathrm{Re}(s) < \delta$. Vi får nu enligt antagande om punktvis konvergens för summan och dominerad konvergens, i samma område,

$$\int_0^\infty x^{s-1} \sum_{n=0}^\infty \varphi_m(n)(-x)^n dx \to \int_0^\infty x^{s-1} \sum_{n=0}^\infty \varphi(n)(-x)^n dx.$$

Sammanlagt ger detta för $s$ med $0 < \mathrm{Re}(s) < \delta$

$$\int_0^\infty x^{s-1} \sum_{n=0}^\infty \varphi(n)(-x)^n dx = \frac{\pi}{\sin \pi s}\varphi(-s).$$

□

En alternativ version för $\phi$ ges av sats A.9 och råkar kräva färre antaganden. Vi använder den satsen för att beräkna Mellintransformen av sinus.

*Exempel* 3.2. Låt oss bestämma $\mathcal{M}\sin(s)$. Vi gör först observationen

$$\frac{\sin x}{x} = \sum_{n=0}^\infty \frac{\cos(\pi n/2)}{\Gamma(n+2)}(-x)^n.$$

Vi vill låta $\phi(z) = \cos(\pi z/2)/(z+1)$, men $\phi$ har motsvarande $Q = \pi/2$. För att tillämpa en utvidgning av mästarsatsen sätter vi $\phi^*(z) = \cos(\pi z/2)$ och $f(z) = 1/(z+1)$. Det är enkelt att se att alla krav i sats A.9 uppfylls för dessa funktioner för varje $0 < \delta < 1/2$. Nu får vi

$$\mathcal{M}\sin(s) = \int_0^\infty x^{(s+1)-1}\frac{\sin x}{x}dx = \Gamma(s+1)\frac{\cos(\pi(s+1)/2)}{1-(s+1)} = \Gamma(s)\sin(\pi s/2)$$

i området $0 < \mathrm{Re}(s+1) < 1/2$, men med identitetsatsen kan detta enkelt utökas till $-1 < \mathrm{Re}(s) < 0$, eftersom som integralen absolutkonvergerar där.

Likheten vi gett för Mellintransformen av sinus gäller egentligen då $-1 < \mathrm{Re}(s) < 1$, men detta kan vi ej visa med vår utvidgning, eftersom att tranformen inte absolutkonvergerar då $\mathrm{Re}(s) \geq 0$.

# 4 Riesz kriterium

Vi skall i detta avsnitt diskutera det nödvändiga och tillräckliga villkor för Riemannhypotesen som den ungerske matematikern Marcel Riesz gav år 1915 [6]. Riemanns hypotes från 1859 rörande primtalens fördelning är ännu obevisad och betraktas allmänt som det kanske viktigaste olösta matematiska problemet. Det är också ett av de sju millenieproblemen för vilka Clay-institutet utlovat en stor prissumma för en lösning. Vi börjar med en kort sammanfattning av den förkunskap vi behöver.

Riemanns zetafunktion för Re(s) > 1 ges av följande summa som endast är absolutkonvergent i det området,

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s}.$$

Summans entydiga utvidgning till hela $\mathbb{C}$ har endast en pol i $s = 1^\dagger$. Riemannhypotesen säger att denna fortsättning endast har nollställen vid de jämna, negativa heltalen som vi kallar de triviala nollställena och på den kritiska linjen $\mathrm{Re}(s) = 1/2$.

Det är välkänt att $\zeta$ är nollskild utanför $0 < \mathrm{Re}(s) < 1$ bortsett från de triviala nollställena [4, s. 30] och sats A.8 ger oss en symmetri kring den kritiska linjen som säger att vi bara behöver undersöka om det finns nollställen i $\mathrm{Re}(s) > 1/2$. Med detta är vi redo att angripa villkoret för denna hypotes.

$^\dagger$Sats A.7 och A.8 ger tillsammans denna utvidgning.

Vi skall nu ge ett något annorlunda bevis för Riesz kriterium med hjälp av Ramanujans mästarsats. Vi kommer dock använda samma grundläggande idéer som Riesz använde. Vi börjar med att definiera funktionerna

$$F(x) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} x^k}{\zeta(2k)\Gamma(k)} \text{ och } f(s) := \int_0^{\infty} x^{-s/2-1} F(x) dx.$$

Låt $\phi(z) = 1/\zeta(2z+2)$. Vi vet att $\phi$ är analytisk på området $\mathrm{Re}(z) \geq -1/2 + c$ för varje $c > 0$ och enligt proposition A.1 uppfyller den mästarsatsens antaganden i varje sådant område. Vi anpassar nu $F$ och $f$ till mästarsatsens formuleringar genom att göra en omskrivning enligt

$$F(x)/x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\phi(k)}{\Gamma(k+1)} (-x)^k \text{ och } f(s) = \int_0^{\infty} x^{1-s/2-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\phi(k)}{\Gamma(k+1)} (-x)^k dx. \tag{4}$$

För att se att $F(x)/x$ absolutkonvergerar överallt, hänvisar vi till anmärkning 3.3. Observera även att $f$ är en variant av en Mellintransform av $F$. I detta avsnitt kommer vi med $F$,$f$ och $\phi$ alltid att hänvisa till funktionerna ovan. Följande lemma, som var känt av Ramanujan [1, s. 193], utgör grunden för Riesz kriterium.

**Lemma 4.1.** *Vi har identiteten*

$$f(s) = \frac{\Gamma(1-s/2)}{\zeta(s)}$$

*för alla $s$ med* $1 < \mathrm{Re}(s) < 2$.

*Bevis.* (Tillämpning av mästarsatsen). Vi sätter $t = 1 - s/2$ och får enligt (4)

$$f(s) = \int_0^{\infty} x^{t-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\phi(k)}{\Gamma(k+1)} (-x)^k dx.$$

Tag ett litet $\epsilon > 0$ och låt $\delta = 1/2 - \epsilon/2$. Enligt diskussionen ovan är mästarsatsen tillämpbar och vi får

$$f(s) = \Gamma(t)\phi(-t) = \frac{\Gamma(1-s/2)}{\zeta(s)}$$

för alla $t$ med $0 < \mathrm{Re}(t) < \delta = 1/2 - \epsilon/2$ där $\epsilon > 0$ är godtyckligt litet. Lemmat följer nu direkt. □

Riesz utnyttjade också residykalkyler och Mellintransformer, men inte Mellininversion som vi gör. Vi ger nu något modifierade versioner av de bevis som Riesz formulerade för lemma 4.1, sats 4.1 och 4.2. Speciellt skriver ut detaljer som han utelämnar.

*Bevis.* (Lemma 4.1, [6]). Tag ett litet $\epsilon > 0$ och $\delta = 1/2 - \epsilon/2$. Enligt (4) och följdsats 3.4 absolutkonvergerar $f$ i området $0 < \mathrm{Re}(1 - s/2) < \delta$, alltså då $1 < \mathrm{Re}(s) < 2$. Efter upprepad användning av egenskap (1) för Mellintransformer får vi vidare

$$\zeta(s) f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} x^{-s/2-1} F(x/n^2) dx.$$

Vi vill nu byta ordning på summa och integral, vilket vi kan göra om vi har absolutkonvergens. För att kontrollera detta gör vi variabelbytet $y = x/n^2$ för varje $n$ och får

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} |x^{-s/2-1} F(x/n^2)| dx = \Big( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\mathrm{Re}(s)}} \Big) \int_0^{\infty} |y^{-s/2-1} F(y)| dy.$$

Integralen i högerledet konvergerar eftersom $f$ absolutkonvergerar, och summan konvergerar då $\mathrm{Re}(s) > 1$. En enkel kontroll ger dessutom att $\sum F(x/n^2) = xe^{-x}$ och därför får vi i $1 < \mathrm{Re}(s) < 2$ likheten

$$\zeta(s) f(s) = \int_0^{\infty} x^{-s/2-1} \big( xe^{-x} \big) dx = \Gamma(1 - s/2).$$

□

Inför Riesz kriterium, som är de följande två satserna, noterar vi att detta resultat relaterar zetafunktionens tillväxt på de jämna, positiva heltalen till Riemannhypotesen. $F$ är till synes en ganska enkel funktion, trots det har ingen lyckats bevisa att antagandet i sats 4.1 gäller. Riesz skrev själv i sitt arbete, "I cannot decide yet if this condition will facilitate the checking of the assumption". Vi noterar också att det finns många liknande kriterium. Cislo och Wolf relaterar t.ex. Riesz kriterium med de så kallade Baez-Duarte och Hardy-Littlewood kriterierna [11].

**Sats 4.1** (Riesz kriterium del 1, [6]). *Om vi för varje $\epsilon > 0$ har begränsningen*

$$F(x) = \mathcal{O}(x^{1/4+\epsilon}),$$

*gäller Riemannhypotesen.*

*Bevis.* Det räcker att visa att $f$ är analytisk i området $1/2 < \mathrm{Re}(s) < 2$, på grund av att det då är en analytisk utvidgning av $\Gamma(1-s/2)/\zeta(s)$ enligt lemma 4.1. Eftersom gammafunktionen inte har några nollställen skulle detta medföra att zetafunktionen är nollskild då $\mathrm{Re}(s) > 1/2$.

Enligt anmärkning 2.1 behöver vi därför visa att $f$ absolutkonvergerar i området $1/2 < \mathrm{Re}(s) < 2$. $F$ absolutkonvergerar, så den är uppåt begränsad i $[0,1]$ av, säg $B'$. $F$ har heller inga poler och enligt våra antagande finns det därför ett $B > 0$ med $|F(x)| \leq Bx^{1/4+\epsilon}$. Alltså får vi

$$\begin{aligned}\int_0^\infty |x^{-s/2-1}F(x)|dx &= \int_0^1 |x^{-s/2-1}F(x)|dx + \int_1^\infty |x^{-s/2-1}F(x)|dx \\ &\leq B'\int_0^1 x^{-\mathrm{Re}(s/2)}dx + B\int_1^\infty x^{1/4+\epsilon-\mathrm{Re}(s/2)-1}dx.\end{aligned}$$

Den första integralen konvergerar för $\mathrm{Re}(s/2) < 1$ och den andra precis då $1/4+\epsilon-\mathrm{Re}(s/2) > 0$ för varje $\epsilon > 0$. Således har vi absolutkonvergens i området $1/2 < \mathrm{Re}(s) < 2$, vilket avslutar beviset. □

Ett naturligt försök för att bevisa omvändningen är att använda följdsats 3.3. Innan vi kan göra det behöver vi dock följande hjälpsats av Landau.

**Lemma 4.2.** *Om Riemannhypotesen gäller så har vi för varje $\epsilon > 0$*

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \mathcal{O}(|s|^r) \text{ då } \mathrm{Re}(s) \geq 1/2+\epsilon,$$

*där $r > 0$ endast beror av $\epsilon$.*

*Bevis.* Se lemma A.2 i appendix. □

**Sats 4.2** (Riesz kriterium del 2, [6]). *Om Riemannhypotesen gäller så får vi*

$$F(x) = \mathcal{O}(x^{1/4+\epsilon})$$

*för varje $\epsilon > 0$.*

*Bevis.* Tag ett litet $\epsilon > 0$ och $\delta = 3/4 - \epsilon/2$. Enligt antagande om Riemannhypotesen är $\phi(z)$ analytisk i området $\mathrm{Re}(z) \geq -\delta$. Vi behöver alltså uppskatta $1/\zeta(z)$ för $\mathrm{Re}(z) \geq 1/2+\epsilon$. Med hjälp av lemma 4.2 får vi för något $C \geq 0$, $r > 0$ och tillräckligt stora $|z|$ följande uppskattning,

$$|1/\zeta(z)| \leq Ce^{r\log|z|} \leq Ce^{|z|} \leq Ce^{\mathrm{Re}(z)+|\mathrm{Im}(z)|}$$

då $\mathrm{Re}(z) \geq 1/2+\epsilon$. För mindre $|z|$ är funktionen begränsad i området, och därmed uppfyller $\phi$ mästarsatsens antaganden med $Q = 1$. Vi betraktar (4) och låter $\lambda = 3/4 - \epsilon$. Enligt följdsats 3.3 finns det ett $B \geq 0$ med $|F(x)/x| \leq Bx^{\epsilon-3/4}$. □

Vi lämnar nu Riesz kriterium för att fokusera på beräkningstillämpningar av mästarsatsen. Nästa avsnitt hjälper oss med detta, det kommer nämligen att ge oss en ny klass av integraler som vi kan beräkna.

# 5 En flerdimensionell mästarsats

Inom kvantfysiken har det hittats tillämpningar av en generalisering av Ramanujans sats som kallas för "method of brackets" och som togs fram vid studier av Feynmandiagram. Det är en heuristisk procedur för att bryta ned klasser av integraler till linjära system och presenterades först år 2008 av Ivan Gonzalez och Victor H. Moll [9]. Den har ännu inte någon fullständig framställning och är ett ämne för forskning än idag. I detta avsnitt kommer vi presentera den bakomliggande matematiken till metoden.

Vårt mål är att lösa integraler på formen

$$\int_0^\infty x_1^{\beta_1-1}\cdots\int_0^\infty x_r^{\beta_r-1} f\begin{pmatrix} x_1^{\alpha_{1,1}}x_2^{\alpha_{1,2}}\cdots x_r^{\alpha_{r,1}} \\ \vdots \\ x_1^{\alpha_{1,r}}x_2^{\alpha_{r,2}}\cdots x_r^{\alpha_{r,r}}\end{pmatrix} dx_r\cdots dx_1$$

där $f:\mathbb{R}^r\to\mathbb{R}$ är en analytisk funktion som antar en tillräckligt snäll Maclaurinutveckling, likt det endimensionella fallet. Med analytisk i flera variabler menar vi att om vi fixerar alla variabler förutom en, är den endimensionellt analytisk i den fria variabeln.

Inför sats 5.1 gör vi följande definitioner för att underlätta de kommande, långa uttrycken. De två första definitionerna används i någon form i nästan all relevant litteratur.

**Definition 5.1.** *Låt $f:U\to\mathbb{C}$ och $g:V\to\mathbb{C}$ vara funktioner, där $U\subset\mathbb{C}^r$ och $V\subset\mathbb{C}$. Antag även $n\in\mathbb{N}_0^r$. Då definierar vi*

$$i)\ \xi_n := \frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1)},$$

$$ii)\ \widetilde{g}(s_1,\cdots,s_r) := \prod_{i=1}^r g(s_i),$$

$$iii)\ n' := (n_1,\cdots,n_{r-1}),$$

$$iv)\ \sum_{\{n\}} f(n) := \sum_{n_1=0}^\infty\cdots\sum_{n_r=0}^\infty f(n_1,\cdots,n_r).$$

## 5.1 Formulering och bevis

Vi presenterar nu den flerdimensionella formuleringen av mästarsatsen. Likt de två versionerna av den endimensionella satsen, ger vi även två framställningar av denna sats. Vi har inte kunnat hitta den första formuleringen i litteraturen, eller de specifika kraven på $\varphi$ och $\phi$ som vi använder.

**Sats 5.1** (En flerdimensionell mästarssats)**.** *Antag att $A\in\mathbb{R}^{r\times r}$ är en inverterbar matris†. För $\Delta\in\mathbb{R}_+^r$ definierar vi $H(\Delta)=\{z\in\mathbb{C}^r:\mathrm{Re}(z_i)\geq-\Delta_i\}$ och får följande:*

*i) Låt $\delta\in(0,1)^r$. Antag att $\varphi:H(\delta)\to\mathbb{C}$ är analytisk och att vi har begränsningen $|\varphi(z)|\leq Ce^{P\sum\mathrm{Re}(z_i)+Q\sum|\mathrm{Im}(z_i)|}$ för något $C,P\in\mathbb{R}$ och $Q<\pi$. Då gäller*

$$\int_0^\infty x_1^{\beta_1}\cdots\int_0^\infty x_r^{\beta_r}\sum_{\{n\}}\varphi(n)\prod_{i=1}^r(-1)^{n_i}x_i^{n\cdot A_i}\frac{dx_i}{x_i} = \frac{\pi^r}{|\det A|\,\widetilde{\sin}(\pi A^{-1}\beta)}\varphi(-A^{-1}\beta)$$

*för alla $\beta$ med $0<\mathrm{Re}(A^{-1}\beta)_i<\delta_i$.*

*ii) Låt $\delta\in(0,\infty)^r$. Antag att $\phi:H(\delta)\to\mathbb{C}$ är analytisk och att vi har begränsningen $|\phi(z)|\leq Ce^{P\sum\mathrm{Re}(z_i)+Q\sum|\mathrm{Im}(z_i)|}$ för något $C,P\in\mathbb{R}$ och $Q<\pi/2$. Då gäller*

$$\int_0^\infty x_1^{\beta_1}\cdots\int_0^\infty x_r^{\beta_r}\sum_{\{n\}}\phi(n)\prod_{i=1}^r\xi_{n_i}x_i^{n\cdot A_i}\frac{dx_i}{x_i} = \frac{1}{|\det A|}\widetilde{\Gamma}(A^{-1}\beta)\phi(-A^{-1}\beta)$$

*för alla $\beta$ med $0<\mathrm{Re}(A^{-1}\beta)_i<\delta_i$.*

†Vi betecknar den i:te raden av $A$ med $A_i$.

*Anmärkning* 5.1. Likt anmärkning 3.2 ser vi att summan i integralen ovan,

$$\sum_{\{n\}} \xi_{n_1} \cdots \xi_{n_r} \phi(n) x_1^{n \cdot A_1} \cdots x_r^{n \cdot A_r}$$

absolutkonvergerar när $x_i \geq 0$ och att det är en kontinuerlig funktion med avseende på $x$.

Vi visar endast den andra delen av sats 5.1. Som vi tidigare nämnt är det den framställningen som används i litteraturen, och bevisen är i princip identiska. För att genomföra beviset behöver vi följande två resultat i form av hjälpsatser. Idén om att använda variabelbytet enligt lemma 5.1 har vi fått från [10, s. 17], och sedan har vi fyllt i detaljerna.

**Lemma 5.1.** *Låt $A \in \mathbb{R}^{r \times r}$ vara inverterbar. Om vi gör variabelbytet*

$$\begin{cases} u_1 = x_1^{A_{1,1}} \cdots x_r^{A_{r,1}} \\ \quad \vdots \\ u_r = x_r^{A_{1,r}} \cdots x_r^{A_{r,r}} \end{cases}$$

*får vi*

$$\frac{d(x_1, \cdots, x_r)}{d(u_1, \cdots, u_r)} = \frac{1}{\det A} \frac{x_1 \cdots x_r}{u_1 \cdots u_r}.$$

*Bevis.* Vi ser först att $\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = A_{i,j}^T \frac{u_i}{x_j}$. Kedjeregeln och räkneregler för determinanter ger nu

$$\frac{d(x_1, \cdots, x_r)}{d(u_1, \cdots, u_r)} = \left( \frac{d(u_1, \cdots, u_r)}{d(x_1, \cdots, x_r)} \right)^{-1} = \left( \det(A^T) \frac{u_1 \cdots u_r}{x_1 \cdots x_r} \right)^{-1}.$$

□

**Lemma 5.2.** *Låt $\phi$ uppfylla alla antaganden i sats 5.1 ii) för något $\delta \in \mathbb{R}_+^r$. Låt också $u_i > 0$ för $0 < i < r - 1$. Då gäller*

$$\int_0^\infty u_r^{s-1} \sum_{\{n\}} \xi_{n_1} \cdots \xi_{n_r} \phi(n) u_1^{n_1} \cdots u_r^{n_r} du_r$$

$$=$$

$$\sum_{\{n'\}} \xi_{n_1} \cdots \xi_{n_{r-1}} u_1^{n_1} \cdots u_r^{n_{r-1}} \int_0^\infty u_r^{s-1} \sum_{n_r=0}^\infty \xi_{n_r} \phi(n', n_r) u_r^{n_r} du_r$$

*för alla $s$ med $0 < \mathrm{Re}(s) < \delta_r$.*

*Bevis.* Vi visar den absolutkonvergens som krävs för att kunna byta ordning. Tag $0 < \lambda < \delta_r$. Vi får först enligt en modifikation av följdsats 3.3 att för något $B \geq 0$

$$|\sum_{n_r=0}^\infty \xi_{n_r} \phi(n', n_r) u_r^{n_r}| \leq B e^{\sum P_i n_i} u_r^{-\lambda}$$

för alla $x \geq 0$, där summan i exponenten är från $i = 1$ till $r$. Vi ser nu

$$\int_1^\infty |u_r^{s-1}| \sum_{\{n'\}} |\xi_{n_1} \cdots \xi_{n_{r-1}} u_1^{n_1} \cdots u_{r-1}^{n_{r-1}}| \left| \sum_{n_r=0}^\infty \xi_{n_r} \phi(n', n_r) u_r^{n_r} \right| du_r \leq$$

$$\leq B \int_1^\infty u_r^{\mathrm{Re}(s)-1-\lambda} \Big( \sum_{\{n'\}} \frac{(u_1 e^{P_1})^{n_1} \cdots (u_{r-1} e^{P_{r-1}})^{n_{r-1}}}{n_1! \cdots n_{r-1}!} \Big) du_r.$$

Summan i den sista integralen är lika med $e^{\sum u_i P_i}$ och är oberoende av $u_r$, därför får vi absolutkonvergens då $\mathrm{Re}(s) < \delta_r$. Integralen över $[0, 1]$ absolutkonvergerar enligt anmärkning 5.1 då $\mathrm{Re}(s) > 0$. □

*Bevis.* (Sats 5.1, [10, s. 17]). *ii*) Variabelbytet från lemma 5.1 ger efter viss beräkning

$$\frac{1}{|\det A|}\int_0^\infty u_1^{(A^{-1}\beta)_1-1}\cdots\int_0^\infty u_r^{(A^{-1}\beta)_r-1}\sum_{\{n\}}\phi(n)\prod_{i=1}^r \xi_{n_i}u_i^{n_i}du_i.$$

Lemma 5.2 låter oss byta ordning på summa och integral så att vi kan tillämpa mästarsatsen i variabeln $u_r$ för $0 < \mathrm{Re}(A^{-1}\beta)_r < \delta_r$ enligt

$$\frac{1}{|\det A|}\Gamma((A^{-1}\beta)_r)\int_0^\infty u_1^{(A^{-1}\beta)_1-1}\cdots\int_0^\infty \times$$

$$\times\, u_{r-1}^{(A^{-1}\beta)_{r-1}-1}\sum_{\{n'\}}\phi(n',-(A^{-1}\beta)_r)\prod_{i=1}^{r-1}\xi_{n_i}u_i^{n_i}du_i.$$

Upprepad tillämpning ger, i det eftersökta området,

$$\frac{1}{|\det A|}\widetilde{\Gamma}(A^{-1}\beta)\phi(-A^{-1}\beta).$$

□

## 5.2 Observationer

*Anmärkning* 5.2. Det verkar inte finnas några komplexa matriser $A$ så att formeln i sats 5.1 gäller. Med hjälp av ett beräkningsprogram har vi sett att

$$\int_0^\infty x^{\beta-1}e^{-x^{1+i}}dx = \int_0^\infty x^{\beta-1}\sum_{n=0}^\infty \xi_n x^{(1+i)n}dx$$

divergerar för flera värden på $0 < \mathrm{Re}(\beta) < 1$. Vi har även kommit fram till vi inte kan få något resultat liknande följdsats 3.3 för komplexa $A$.

Vi ställer nu frågan vad som händer då $\det A = 0$ i sats 5.1. Istället för att formulera en teknisk proposition, ger vi ett konkret exempel på denna situation.

*Exempel* 5.1. Låt $\phi$ uppfylla alla antaganden i sats 5.1 *ii*). Visa att

$$\int_0^\infty\int_0^\infty x^{\beta_1-1}y^{\beta_2-1}\sum_{n_1,n_2=0}^\infty \xi_{n_1}\xi_{n_2}\phi(n_1,n_2)x^{n_1+n_2}y^{n_1+n_2}dxdy$$

absolutkonvergerar om och endast om $\phi$ uppfyller

$$\sum_{l=0}^k\binom{k}{l}\phi(l,k-l) = 0$$

för alla $k \in \mathbb{N}_0$.

För att visa detta gör vi först variabelbytet $\{u = xy,\ v = y,\ dxdy = \frac{1}{v}dudv\}$ och får att integralen kan skrivas

$$\int_0^\infty\int_0^\infty u^{\beta_1-1}v^{\beta_2-\beta_1-1}\sum_{n_1,n_2=0}^\infty \xi_{n_1}\xi_{n_2}\phi(n_1,n_2)u^{n_1+n_2}dudv.$$

Summan i integralen är en analytisk funktion med avseende på $u$ och är oberoende av $v$. För absolutkonvergens av integralen kräver vi därför att summan ska vara lika med 0 överallt, eftersom integralen över $v$ annars divergerar för alla val av $\beta_1$ och $\beta_2$. Efter omordning av summan får vi

$$\sum_{k=0}^\infty\Big(\xi_0\xi_n\phi(0,n)+\cdots+\xi_n\xi_0\phi(n,0)\Big)u^k = 0$$

för alla $u > 0$. Eftersom detta är en Taylorutveckling ser vi att varje koefficient måste vara lika med 0, vilket precis ger det efterfrågade villkoret och vi är klara. Observera att det finns icke-triviala lösningar, tag till exempel $\phi(z_1,z_2) = z_1 - z_2$.

Det finns naturligtvis motsvarigheter till följdsatserna 3.1, 3.3 och 3.4 även i det flerdimensionella fallet, men vi väljer att inte formulera dem.

## 5.3 Terminologi

I litteraturen kallas ofta sats 5.1 för regel [9][10], och ett antal fler regler brukar användas. Följande beteckning tillämpas också,

$$\langle a \rangle := \int_0^\infty x^{a-1}$$

där integralen naturligtvis är divergent. Nedanstående association görs även för att förenkla notationer,

$$\sum_{n\in\Lambda} f(n)\langle a+n\rangle \doteq \int_0^\infty x^{a-1} \sum_{n\in\Lambda} f(n)x^n dx.$$

I praktiken är detta ett kraftfullt system av definitioner, men det kan vara svårt att arbeta med divergenta uttryck. Ett exempel på detta är användningen av det resultat som brukar kallas regel 1. Det används för alla $\beta \in \mathbb{C}$, trots att integralen ej alltid konvergerar.

**Proposition 5.1** (Regel 1, [10, s. 17])**.** *Låt* $\mathrm{Re}(\beta) > 0$. *Då gäller*

$$(\alpha_1 + \cdots + \alpha_r)^{-\beta} = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^\infty x^{\beta-1} e^{-(\alpha_1+\cdots+\alpha_r)x} dx.$$

*Bevis.* Detta får vi direkt av egenskaper från (1) för Mellintransformer. □

# 6 Tillämpningar

Vi kommer nu att föra ett djupare resonemang angående tillämpningar av mästarsatsen. Vi kommer på ett strukturerat sätt framföra tre viktiga områden för detta. I det första tar vi upp viktiga begrepp och naturliga tillämpningar. I det andra behandlar vi en tillämpning som var kär till Ramanujan, nämligen integraler av hypergeometriska funktioner. Till slut kommer vi visa några resultat som tar användning av den generalisering av mästarsatsen vi beskriver i kapitel 5.

## 6.1 Genererande funktioner

Låt $a_n$ och $b_n$ vara två följder av komplexa tal. Vi definierar då följande funktioner,

$$f(x) = \sum_{n=0}^\infty a_n x^n \text{ och } e(x) = \sum_{n=0}^\infty b_n \frac{x^n}{n!}.$$

Funktionen $f$ kallas den genererande funktionen för $a_n$ och $e$ den exponentiellt generande funktionen av $b_n$. Dessa två är särskilt intressanta för våra syften, då de passar till våra två formuleringar av mästarsatsen.

*Exempel* 6.1. Låt oss bestämma värdet av integralen

$$\Lambda(s,t) = \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{1+x^t} dx$$

för $0 < \mathrm{Re}(s) < \mathrm{Re}(t)$. Betrakta först $t \in \mathbb{R}_+$. Vi vill utnyttja att Mauclarinutvecklingen $1/(1+y) = \sum_{n=0}^\infty (-y)^n$ absolutkonvergerar då $|y| < 1$. Eftersom funktionen $1/(1+y)$ är analytisk när $\mathrm{Re}(y) > -1$, sammanfaller den med utvidgningen av utvecklingen. Därför gör vi variabelbytet $x = y^{1/t}$, sätter $\varphi = 1$ och får

$$\Lambda(s,t) = \frac{1}{t}\int_0^\infty \frac{y^{s/t-1}}{1+y} dy = \frac{1}{t}\int_0^\infty y^{s/t-1} \sum_{n=0}^\infty (-y)^n dy = \frac{\pi}{t\sin(\pi s/t)} \tag{5}$$

för alla $s$ med $0 <\mathrm{Re}(s)/t < 1$ då $t \in \mathbb{R}_+$. Vi utvidgar detta till $0 < \mathrm{Re}(s) < \mathrm{Re}(t)$ i beräkning A.1 i appendix.

Mer generellt kan vi omformulera ovanstående till en proposition:

**Proposition 6.1.** *Antag att* $\mathrm{Re}(t) > 0$ *och* $b/a \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. *Vi får då likheten*

$$\int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{(a+bx)^t} dx = a^{s-t} b^{-s} \frac{\Gamma(s)\Gamma(t-s)}{\Gamma(t)}$$

*för alla* $s$ *med* $0 < \mathrm{Re}(s) < \mathrm{Re}(t)$.

*Bevis.* För $t = k \in \mathbb{Z}_+$ kommer följande likhet direkt ur formeln för följden till den genererande funktionen $(a+bx)^{-k}$,

$$\frac{1}{(a+bx)^k} = \frac{1}{a^k (k-1)!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k-1)!}{n!} (-(b/a)x)^n.$$

Låt därför $\varphi(z) = (b/a)^z \Gamma(z+k)/\Gamma(z+1)$ och observera att denna funktion uppfyller mästarsatsens krav eftersom $\Gamma(z+k)/\Gamma(z+1)$ växer polynomiellt och $(b/a)^z$ växer tillräckligt långsamt i imaginär riktning om och endast om $b/a \notin (-\infty, 0]^\dagger$. Mästarsatsen ger nu likhet för $0 < \mathrm{Re}(s) < k$ för varje $t = k \in \mathbb{Z}_+$.

Tag ett fixt $s$ med $0 < \mathrm{Re}(s) < 1$. Vi generaliserar nu likheten i propositionen till alla $t$ med $\mathrm{Re}(t) > \mathrm{Re}(s)$ via entydighetssatsen följdsats 3.1. Vi har att likheten i propositionen gäller för $t \in \mathbb{Z}_+$, och $t > s$. Högerledet uppfyller kraven i mästarsatsen, när $t$ inte är nära $s$. Vänsterledet är begränsat under samma kriterium. Vi kan nu translatera båda sidor i $s$-led med $-\lceil \mathrm{Re}(s) \rceil$, använda följdsats 3.1, och få att de två leden är lika på ett halvplan $\mathrm{Re}(t) > \lceil \mathrm{Re}(s) \rceil$. Ur båda sidors analyticitet har vi av identitetssatsen att de är lika i hela området i propositionen.

□

*Anmärkning* 6.1. Antag att $q$ är en rationell funktion som går mot 0 när $x \to \infty$ och som inte har några poler då $x \geq 0$. Då kan vi reducera beräkningen av en godtycklig integral på formen

$$\int_0^\infty x^{s-1} q(x) dx,$$

till en explicit formel på området $0 < \mathrm{Re}(s) < 1$ med hjälp av ovanstående proposition. Detta kommer direkt ur partialbråksuppdelning av $q$, och applikation av proposition 6.1. Att denna metod inte kan användas för de $q$ som har poler på integrationslinjen är ingen stor förlust, då sådana integraler inte konvergerar.

*Exempel* 6.2. Säg att vi vill beräkna

$$\int_0^\infty \frac{x^{-1/3}}{x^3 + x^2 - 4x + 6} dx.$$

Med partialbråksuppdelning får vi likhet med

$$\frac{-1}{34} \int_0^\infty x^{2/3-1} \Big( \frac{1-4i}{x-1+i} + \frac{1+4i}{x-1-i} - \frac{2}{x+3} \Big) dx.$$

Proposition 6.1 och förenkling ger oss nu

$$\int_0^\infty \frac{x^{-1/3}}{x^3 + x^2 - 4x + 6} dx = \frac{3\pi \sqrt[3]{2} + \frac{2\pi}{\sqrt[3]{3}}}{17\sqrt{3}}$$

*Exempel* 6.3. En klassisk genererande funktion är

$$\log^2(1+x) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \Big( \frac{H_{k-1}}{k} \Big) (-x)^k,$$

där $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. Den kan härledas genom att kvadrera den genererande funktionen $\log(1+x) = -\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k}(-x)^k$ som formell potensserie. Det är värt att notera att summan inte konvergerar för stora $x$, men det hindrar oss inte från att använda mästarsatsen.

$^\dagger$Notera att vi här ej kan använda formuleringen av mästarsatsen för $\phi$, eftersom $\Gamma(z+k)$ växer för snabbt.

Vi kan därför beräkna integralen

$$\int_0^\infty x^{s-1}\log^2(x+1)dx.$$

Vi gör detta i beräkning A.2 i appendix, och får

$$\int_0^\infty x^{s-1}\log^2(x+1)dx = \frac{2\pi}{\sin(\pi s)}\Big(\frac{\Gamma'(-s)}{\Gamma(-s+1)} - \frac{\gamma}{s}\Big)$$

närhelst integralen konvergerar, det vill säga då $-2 < \mathrm{Re}(s) < 0$.

Som den uppmärksamma läsaren noterar, är högerledet här inte definierat då $s = -1$, trots att integralen konvergerar då. Om vi ser detta uttryck som en funktion av $s$ är detta dock också en borttagbar pol, och vi beräknar dess värde med l'Hopitals regel. För $s = -1$ har vi alltså

$$\int_0^\infty \Big(\frac{\log(x+1)}{x}\Big)^2 dx = \frac{1}{s}\frac{2\pi(\frac{\Gamma'(-s)}{\Gamma(-s)} - \gamma)}{\sin(\pi s)} = \frac{2\pi\frac{\pi^2}{6}}{\pi\cos(\pi s)} = \frac{\pi^2}{3}$$

där att $(\log(\Gamma(t)))'' = \frac{\pi^2}{6}$ för $t = 1$ är känt.

*Exempel* 6.4. Bernoullitalen betecknas $B(k)$, för $k \in \mathbb{N}_0$, och definierades på 1600-talet för att beräkna polynomsummor. Vi vill nu hitta en analytisk utvidgning av dem. Det är känt att $B(k)$ är följden till den exponentiellt genererande funktionen $x/(e^x - 1)$. Vi betraktar likheten i proposition A.4, det vill säga

$$\Gamma(s)\zeta(s) = \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1}dx$$

Detta ger

$$\Gamma(s)s\zeta(1+s) = \Gamma(1+s)\zeta(1+s) = \int_0^\infty x^{s-1}\frac{x}{e^x-1}dx = \int_0^\infty x^{s-1}\sum_{n=0}^\infty \frac{B(n)x^n}{n!}dx$$

för $\mathrm{Re}(s) > 0$. Mästarsatsen för $\varphi(z) = -\frac{z\zeta(1-z)}{\Gamma(z+1)}$ † och Eulers reflektionsformel ger oss alltså

$$\Gamma(s)s\zeta(1+s) = \frac{s\zeta(1+s)\pi}{\Gamma(1-s)\sin(\pi s)} = \int_0^\infty x^{s-1}\sum_{n=0}^\infty \frac{-n\zeta(1-n)(-x)^n}{n!}dx.$$

På grund av Mellintransformens entydighet (följdsats 2.1) har vi nu att $\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^{n+1}n\zeta(1-n)}{n!}x^n = \sum_{n=0}^\infty \frac{B(n)}{n!}x^n$. Taylorutvecklingens entydighet ger sedan $(-1)^{n+1}n\zeta(1-n) = B(n)$ för alla $n \in \mathbb{N}_0$, vilket ger oss en naturlig analytisk fortsättning av Bernoullitalen till hela $\mathbb{C}$.

## 6.2 Hypergeometriska funktioner

Hypergeometriska funktioner betecknas ofta med ${}_pF_q$ och är funktioner på formen

$${}_pF_q(\{a\}_1^p;\{b\}_1^q;z) = \sum_{n=0}^\infty \Big(\prod_{k=0}^n \frac{\prod_{i=1}^p(a_i+k)}{\prod_{j=1}^q(b_j+k)}\Big)\frac{z^n}{n!},$$

där $a_i, b_j \in \mathbb{R}$. Dessa funktioner är vanliga inom matematiken, och många viktiga funktioner kan ses som hypergeometriska funktioner. Till exempel Hermitepolynom, Tjebysjevpolynom och den undre ofullständiga gammafunktionen $\gamma(a,s) = \int_0^a x^{s-1}e^{-x}dx$ kan alla skrivas som hypergeometriska funktioner, för att inte nämna exponentialfunktionen och $(1-x)^a$.

Eftersom dessa är definierade som en oändlig summa och annars är svåra att arbeta med på denna form, så är integraler innehållande sådana funktioner ofta bäst hanterade med Ramanujans mästarsats. Ramanujan själv studerade hypergeometriska funktioner ivrigt.

†Denna funktion uppfyller mästarsatsens krav enligt proposition A.3.

**Proposition 6.2.**

$$\int_0^\infty x^{s-1}\,{}_pF_q(\{a_i\}_{i=1}^p;\{b_j\}_{j=1}^q;-x)dx=\Gamma(s)\prod_{i=1}^p\frac{\Gamma(a_i-s)}{\Gamma(a_i)}\prod_{j=1}^q\frac{\Gamma(b_j)}{\Gamma(b_j-s)}$$

*för alla $s$ med $0<\mathrm{Re}(s)<\min\{\{a_i\}_{i=1}^p,\{b_j\}_{j=1}^q\}$, och $q\le p\le q+1$.*

*Bevis.* Detta är en direkt användning av mästarsatsen. Först noterar vi att $\prod_{k=0}^n(a+k)=\frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}$, vilket både ger

$$\varphi(n)=\prod_{k=0}^n\frac{\prod_{i=1}^p(a_i+k)}{n!\prod_{j=1}^q(b_j+k)}=\frac{1}{\Gamma(n+1)}\prod_{i=1}^p\frac{\Gamma(a_i+n)}{\Gamma(a_i)}\prod_{j=1}^q\frac{\Gamma(b_j)}{\Gamma(b_j+n)}.$$

Högerledet ger en analytisk fortsättning av $\varphi$ till $\mathrm{Re}(z)>-\min\{\{a_i\}_{i=1}^p,\{b_j\}_{j=1}^q\}$. Vi har också att för $p=q$ och $p=q+1$ så uppfyller $\varphi$ alltid tillväxtkraven. Detta kan härledas genom att först inse att $\Gamma(a+z)/\Gamma(b+z)$ växer polynomiellt, och sedan betrakta halvplanet $\mathrm{Re}(z)\ge-\min\{\{a_i\}_{i=1}^p,\{b_j\}_{j=1}^q\}$, och se att i detta halvplan tar alla $\Gamma$-funktioner ut varandra, förutom möjligtvis en, som ovan. Vi har kvar något som antingen växer långsammare än ett polynom i fallet $p=q+1$, eller som $1/\Gamma$ i fallet $p=q$. □

## 6.3 Flerdimensionella problem

I kapitel 5 har vi förklarat hur vi kan använda Ramanujans mästarsats för att beräkna flerdimensionella integraler, om en Maclaurinutveckling är känd. Vi visar här några exempel på specifika funktioner vi kan göra det för.

*Exempel* 6.5. Dubbelintegralen

$$\int_0^\infty\int_0^\infty x^{-1/2+i}y^{-1/3+3i}\Big(\frac{y^2-y-3xy-x}{(x+1)^2(y+1)^3}\Big)dydx$$

går att lösa med mästarsatsen. Maclaurinutveckling av bråket i integranden ger likhet med

$$\sum_{n=0}^\infty\sum_{m=0}^\infty(n+m^2)(-x)^n(-y)^m.$$

Nu kan vi direkt tillämpa sats 5.1 *i*), genom att sätta $A$ till identitetsmatrisen, och $\varphi(z_1,z_2)=z_1+z_2^2$. Vårt $\beta$ väljer vi till $(1/2+i,2/3+3i)$. Enligt formeln är ovanstående dubbelintegral alltså lika med

$$\frac{\pi^2}{\sin(\pi/2)\sin(2\pi/3)}((-\frac{1}{2}-i)+(-\frac{2}{3}-3i)^2)=\frac{2\pi^2}{\sqrt{3}}(-\frac{163}{18}+3i)=-\frac{163\sqrt{3}\pi^2}{27}+\frac{\sqrt{3}\pi^2}{2}i$$

*Exempel* 6.6. Antag att vi skall beräkna

$$\int_0^\infty\int_0^\infty x^{s-1}y^{t-1}e^{-(x^2y+y^3/x)}dxdy.$$

Maclaurinutveckling av exponentialtermen ger oss

$$e^{-(x^2y+y^3/x)}=\sum_{\{n\}}\xi_{n_1}\xi_{n_2}x^{2n_1-n_2}y^{n_1+3n_2}.$$

Nu kan vi tillämpa sats 5.1 *ii*) med $\phi(n)=1$ och $A=\begin{pmatrix}2&-1\\1&3\end{pmatrix}$. Detta ger oss svaret $\frac{1}{7}\Gamma(\frac{1}{7}(3s+t))\Gamma(\frac{1}{7}(-s+2t))$, för alla $\mathrm{Re}(s)>0$, och $-\frac{1}{3}\mathrm{Re}(s)<\mathrm{Re}(t)<2\mathrm{Re}(s)$, vilket också kan ses med ett variabelbyte.

En av mästarsatsens mest intressanta egenskaper är att de villkor vi har lagt fram för att kunna applicera mästarsatsen, är tillräckliga, men inte nödvändiga. Många av Ramanujans egna exempel uppfyller inte tillväxtkraven, och flera av dem stämmer ändå. Följande exempel har också den tråkiga egenskapen att vårt $\phi$ inte uppfyller tillväxtkraven, men den ger rätt svar ändå.

*Exempel* 6.7. Låt oss beräkna trippelintegralen

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x_1 x_2 x_3}} e^{-\sqrt{x_1+x_2+x_3}} dx_3 dx_2 dx_1.$$

Vi utvecklar exponentialtermen med $e^{-\sqrt{x_1+x_2+x_3}} = \sum_{k=0}^\infty \xi_k (x_1+x_2+x_3)^{k/2}$och sedan kan vi använda multinomialsatsen för att få

$$(x_1+x_2+x_3)^{k/2} = \sum_{n=0}^\infty \sum_{m=0}^n \frac{\Gamma(k/2+1)}{\Gamma(n-m+1)\Gamma(m+1)\Gamma(k/2-n+1)} x_1^{k/2-n} x_2^{n-m} x_3^m.$$

Genom att byta ordning på summorna och variabelbytet $b = n - m$ kan vi få

$$\sum_{m=0}^\infty \sum_{b=0}^\infty \frac{\Gamma(k/2+1)}{\Gamma(b+1)\Gamma(m+1)\Gamma(k/2-b-m+1)} x_1^{k/2-b-m} x_2^b x_3^m,$$

vilket ger oss att den ursprungliga trippelintegralen är lika med

$$\int_0^\infty x_1^{\frac{1}{2}} \int_0^\infty x_2^{\frac{1}{2}} \int_0^\infty x_3^{\frac{1}{2}} \sum_{m=0}^\infty \sum_{b=0}^\infty \xi_k \xi_b \xi_m \frac{\Gamma(k/2+1)(-1)^{b+m}}{\Gamma(k/2-b-m+1)} x_1^{k/2-b-m} x_2^b x_3^m \frac{dx_3}{x_3}\frac{dx_2}{x_2}\frac{dx_1}{x_1}.$$

Sätt nu $\phi(n) = \frac{\Gamma(n_1/2+1)(-1)^{n_2+n_3}}{\Gamma(n_1/2-n_2-n_3+1)}$, $\beta = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, och

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nu kan vi tillämpa sats 5.1 *ii*) för att få att svaret är $-\frac{1}{\det A}\Gamma(3)\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})\frac{\Gamma(-\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})} = 8\pi$

# 7 Slutsats

Som vi genomgående sett i rapporten har Ramanujans mästarsats ett stort antal användningsområden. Eulers reflektionsformel och Riesz kriterium är exempel på de satser vars bevis kan förkortas via hänvisning till den. Samt har vi påpekat den flerdimensionella formuleringens betydelse inom kvantfysik och dess relevans för forskning idag.

Vi har uppnått våra huvudsakliga syften med denna rapport, men vi har inte kunnat besvara alla frågeställningar som dykt upp längs vägen. Till exempel har vi inte avgjort om den entydighetssats vi visar faktiskt är helt ekvivalent med Carlsons sats, eller om vår är svagare. Vi har heller inte till fullo förstått den heuristiska metoden som ges i litteraturen för att beräkna flerdimensionella integraler. Problemet är att den innefattar divergenta uttryck.

Framtida forskning tycker vi bör fokusera på att avgöra när de olika reglerna för "method of brackets" gäller, vilket inte är helt avgjort än. Mästarsatsens likhet gäller vidare för vissa funktioner som inte uppfyller tillväxtkraven, och att bestämma ett nödvändigt och tillräckligt villkor för när likheten kan utökas vore önskvärt, vilket vi delvis löst med hjälp av sats 3.3. Det bör också vidare undersökas om det finns fler viktiga tillämpningar.

# A Appendix

**Definition A.1.** *Låt $f$ vara en komplexvärd funktion och $g$ en reellvärd funktion. Antag att de båda är definierade på en obegränsad delmängd till $\mathbb{R}$, och att $g(x)$ är strikt positiv för alla stora värden av $x$. Vi skriver*

$$f(x) = \mathcal{O}(g(x))$$

*om det finns ett $M > 0$ och ett $r \in \mathbb{R}$ så att vi för alla $x > r$ har*

$$|f(x)| \leq Mg(x).$$

**Sats A.1.** *Fouriertransformen av $f$ existerar för alla $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, och alla $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$. Fouriertransformen av $f(x)$ ges av*

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ix\xi}dx,$$

*och vi kan invertera denna transform med*

$$f_{\mathcal{F}}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(f)(\xi)e^{ix\xi}d\xi.$$

*Detta $f_{\mathcal{F}}$ är lika med $f$ nästan överallt.*

*Om $f$ är styckvis kontinuerlig har vi att $\mathcal{F}(f)$ är styckvis kontinuerlig och har $\mathcal{F}(f)(\xi) = \frac{1}{2}(\lim_{\eta\to\xi^-}\mathcal{F}(f)(\eta) + \lim_{\eta\to\xi^+}\mathcal{F}(f)(\eta))$.*

*Bevis.* Se [2]. □

**Lemma A.1.** *I det komplexa planet uppskattas sinus av*

$$i)\ |\sin(a+ib)| \geq \frac{1}{2}|e^b - e^{-b}|$$
$$ii)\ |\sin(a+ib)| \geq \frac{1}{2}|\sin a|e^{|b|}$$

*Bevis.* *i)* Detta fås direkt av $\sin z = (e^{iz} - e^{-iz})/2i$ och omvända triangelolikheten. *ii)* Detta följer av att $\mathrm{Im}\big(\sin(a+ib)\big) = \frac{1}{2}(e^b + e^{-b})\sin a$.

□

**Sats A.2** (Cauchys residysats)**.** *Låt $f$ vara holomorf inuti och på en positivt orienterad, sluten och enkel kurva $\gamma$, förutom för ett ändligt antal poler $a_1, \cdots, a_N$ inuti $\gamma$. Då gäller*

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{N}\mathrm{Res}\{f; a_k\}.$$

*Bevis.* Se [3, s. 173]

□

**Sats A.3** (Identitetssatsen)**.** *Antag $f$ och $g$ är analytiska och definierade på ett öppen, sammanhängande område $D$. Låt $S \subset D$ vara en delmängd med en hopningspunkt. Då gäller att om $f = g$ på $S$ så får vi $f = g$ på $D$.*

*Bevis.* Se [3, s. 90].

□

**Proposition A.1.** *Tag $\delta > 0$. Det finns ett $C \geq 0$ med*

$$\left|\frac{1}{\zeta(z)}\right| \leq C$$

*i området $\mathrm{Re}(z) \geq 1 + \delta$.*

*Bevis.* Detta fås av härledningen

$$\Big|\frac{1}{\zeta(z)}\Big| = \Big|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^z}\Big| \leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\mathrm{Re}(z)}} \leq 1 + \int_1^{\infty}\frac{1}{t^{\mathrm{Re}(z)}}dt = 1 + \frac{1}{\mathrm{Re}(z)-1} \leq 1 + \frac{1}{\delta}$$

där $\mu$ är Möbiusfunktionen.

$\square$

**Sats A.4** (Cauchys sats)**.** *Låt $U$ vara en öppen, enkelt sammanhängande delmängd till $\mathbb{C}$. Låt $f : U \to \mathbb{C}$ vara holomorf. Om $\gamma$ är en sluten kurva med ändligt längd i $U$ får vi*

$$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$

*Bevis.* Se [3, s. 109].

$\square$

**Sats A.5.** *Låt $\varphi$ uppfylla mästarsatsens antaganden för något $0 < \delta < 1$. Då finns för varje $0 < \lambda < \delta$ ett $D \geq 0$ med*

$$\Big|\sum_{n=0}^{\infty}\varphi(n)(-x)^n\Big| \leq Dx^{-\lambda}$$

*för alla $x > 0$. Vidare gäller att*

$$\int_0^{\infty} x^{s-1}\sum_{n=0}^{\infty}\varphi(n)(-x)^n dx$$

*är analytisk med avseende på $s$ i området $0 < \mathrm{Re}(s) < \delta$.*

*Bevis.* Vi använder likheten (2) från sats 3.1 och lemma A.1 *ii)* och får direkt att

$$\Big|\sum_{n=0}^{\infty}\varphi(n)(-x)^n\Big| \leq \frac{Ce^{P\lambda}}{2|\sin\pi\lambda|}x^{-\lambda}\int_{\lambda-i\infty}^{\lambda+i\infty} e^{(Q-\pi)|\mathrm{Im}(s)|}ds.$$

Observera att den sista integralen konvergerar eftersom $Q - \pi < 0$ och därför har vi hittat ett sådant $D \geq 0$ som vi behövde.

Det andra påståendet följer direkt av mästarsatsen eftersom $\pi\varphi(-s)/\sin\pi s$ är analytisk i området.

$\square$

**Lemma A.2.** *Om Riemannhypotesen gäller så har vi för varje $\epsilon > 0$*

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \mathcal{O}(|s|^r) \text{ då } \mathrm{Re}(s) \geq 1/2 + \epsilon,$$

*där $r > 0$ endast beror av $\epsilon$.*

*Bevis.* Välj något $0 < \epsilon < \frac{3}{2}$. För $|t| > 1$ sätt $D_t = D(s_1, 1-\epsilon/2)$ där $s_1 = 2+it$. Observera att $A_t = \sup_{D_t}\log|\zeta(s)| = \sup_{\partial D_t}\log|\zeta(s)|$ enligt maximumprincipen samt att $A_t = \sup_{D_t}\mathrm{Re}(\log\zeta(s))$. Vi får att

$$(\frac{3}{2} - \frac{\epsilon}{2})\frac{\log(\zeta(s) - \log(\zeta(s_1))}{\log(\zeta(s)) - \log(\zeta(s_1)) - 2A_t}$$

är en funktion av $s$ som tar disken $D_t$ till $D(0, \frac{3}{2} - \epsilon/2)$, och $s_1$ till 0. Enligt antagandet av Riemannhypotesen är $\zeta(s)$ är nollskild på det kompakta området $D_t$, vilket ger att $\log\zeta$ är analytisk och således är även funktionen ovan det.† Av Schwarz lemma (sats A.7) får vi för $s$ i den nya disken $D(s_1, \frac{3}{2} - \epsilon)$

$$|(\frac{3}{2} - \frac{\epsilon}{2})\frac{\log(\zeta(s)) - \log(\zeta(s_1))}{\log(\zeta(s)) - \log(\zeta(s_1)) - 2A_t}| < |s - s_1| \leq \frac{3}{2} - \epsilon \qquad \Rightarrow$$

†Vi noterar att $\log(\zeta(s)) - \log(\zeta(s_1)) - 2A_t \neq 0$. Detta kommer av att $A_t > |\log(\zeta(s_1))|$ och $A_t > \log(\zeta(s))$ om $\zeta$ inte är konstant, vilket i sin tur kommer ur maximumprincipen

$$\Rightarrow |\log(\zeta(s)) - \log(\zeta(s_1))| \quad \le \frac{|\frac{3}{2}-\epsilon|}{|\frac{3}{2}-\frac{\epsilon}{2}|}(|\log(\zeta(s) - \log(\zeta(s_1))| + 2A_t) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\log(\zeta(s)) - \log(\zeta(s_1))| \quad < \frac{2A_t\frac{\frac{3}{2}-\epsilon}{\frac{3}{2}-\frac{\epsilon}{2}}}{1-\frac{\frac{3}{2}-\epsilon}{\frac{3}{2}-\frac{\epsilon}{2}}} = \frac{2A_t(\frac{3}{2}-\epsilon)}{(\frac{3}{2}-\frac{\epsilon}{2})-(\frac{3}{2}-\epsilon)} < \frac{6A_t}{\epsilon}$$

Enligt anmärkning A.1 växer $|\zeta(s)|$ långsammare än $|s|$ när $|s|$ går mot oändligheten. Därför har vi att $A_t = \mathcal{O}(\log|\zeta(\mathrm{Re}(s) + it)|) = \mathcal{O}(\log(t))$. Nu finns det en konstant $C$ så att för tillräckligt stora $t$ har vi $|\log(\zeta(s)) - \log(\zeta(s_1))| < \frac{6C}{\epsilon}\log(t)$, vilket ger $|\log(\zeta(s))| < \frac{6C}{\epsilon}\log(t) + |\log(\zeta(s_1))|$. Funktionen $\log(\zeta(s_1))$ är begränsad när $s_1 = 2 + it$. Detta eftersom realdelen är begränsad av $\log(\zeta(2))$, och att $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k^2} < 1$ ger att imaginärdelen inte överstiger $\pi$. Därför är $|\log(\zeta(s))| < \frac{6C}{\epsilon}\log(t)$ för tillräckligt stora $t$, och därför har vi också

$$|1/\zeta(s)| = |e^{-\log(\zeta(s))}| < |e^{|\log(\zeta(s))|}| < t^{6C/\epsilon}$$

. Det enda vi antagit är att $s \in D(s_1, 1-\epsilon)$, och eftersom vi kan välja godtycklig $t$ är denna begränsning $\frac{1}{2} + \epsilon \le \mathrm{Re}(s) \le \frac{7}{2} - \epsilon$. Men för $\mathrm{Re}(s) > \frac{7}{2} - \epsilon > 2$ så är $1/\zeta(s)$ begränsad av proposition A.1. Alltså kan vi skriva $1/\zeta(s) = \mathcal{O}(|t|^{\frac{6C}{\epsilon}}) = \mathcal{O}(|s|^{\frac{6C}{\epsilon}})$ och välja $r = 6\frac{C}{\epsilon}$, vilket avslutar beviset. □

**Sats A.6** (Schwarz lemma)**.** *Varje analytisk funktion* $f : D(z_1, r) \to D(z_2, r)$ *med* $f(z_1) = z_2$ *uppfyller* $|f(s) - z_2| \le |s - z_1|$

*Bevis.* Betrakta funktionen $g(s) = \frac{f(s)-z_2}{s-z_1}$. Den kan göras analytisk genom att ta bort den borttagbara singulariteten i 0. För $s \in \partial D(z_1, r)$ har vi $|g(s)| \le 1$, eftersom $|f(s) - z_2|$ är mindre eller lika med $r$, och $|s - z_1|$ är lika med $r$. Maximumprincipen ger nu att $|g(s)| \le 1$ gäller för alla $s \in D(z_1, r)$, det vill säga $|f(s) - z_2| \le |s - z_1|$ □

**Sats A.7** (En meromorf fortsättning av $\zeta$-funktionen)**.** *för* $\mathrm{Re}(s) > 0$ *har vi att*

$$\zeta(s) = \frac{s}{s-1} - s\int_1^{\infty}\frac{t - \lfloor t\rfloor}{t^{s+1}}dt$$

*Bevis.* Av Eulers summationsformel har vi för $\mathrm{Re}(s) > 1$ att $\zeta(s) = 1 + \int_1^{\infty}\frac{1}{t^s}dt - s\int_1^{\infty}\frac{t-\lfloor t\rfloor}{t^{s+1}}dt$. Den sista termen är som vi vill ha den, och beräkning av integralen ger

$$1 + \int_1^{\infty}\frac{1}{t^s}dt = 1 + \frac{1}{s-1} = \frac{s}{s-1}.$$

Det vi har kvar att visa är att denna integral är analytisk för $\mathrm{Re}(s) > 0$. Den är dock lika med $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{s}\left(\frac{1}{k^{s+1}} - \frac{1}{(k+1)^{s+1}}\right)$ vilket absolutkonvergerar likformigt på varje kompakt mängd i halvplan $\mathrm{Re}(s) > \epsilon$, och är därför analytisk där. □

*Anmärkning* A.1. Denna sats innebär att $|\zeta(s)| = \mathcal{O}_\epsilon(|s|)$ begränsat bort från $s = 1$, där $\epsilon$ är ett tal med $\mathrm{Re}(s) > \epsilon$. Detta kommer ur att integralens absolutvärde är begränsat av $\int_1^{\infty}\frac{t-\lfloor t\rfloor}{t^{\epsilon+1}}dt$ i varje sådant halvplan

**Sats A.8.** *Riemanns $\zeta$-funktion uppfyller funktionalekvationen*

$$\zeta(s) = 2^s\pi^{s-1}\sin(\frac{\pi s}{2})\Gamma(1-s)\zeta(1-s)$$

*Bevisskiss.* Det går att visa att

$$\frac{\Gamma(s)}{\pi^s}\zeta(2s) = \int_1^{\infty}(t^s + t^{1/2-s})\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\pi n^2 t}\frac{dt}{t} - \frac{1}{2s} + \frac{1}{2s-1},$$

vilket direkt ger

$$\frac{\Gamma(s)}{\pi^s}\zeta(2s) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2}-s)}{\pi^{\frac{1}{2}-s}}\zeta(1-2s).$$

Ekvationen $\frac{\Gamma(\frac{1}{2}-\frac{s}{2})\pi^{s/2}}{\Gamma(\frac{s}{2})\pi^{1/2-s/2}} = 2^s\pi^{s-1}\sin(\frac{\pi s}{2})\Gamma(1-s)$ ger sedan direkt vad ville visa. Denna ekvationen kan visas med Eulers reflektionsformel och multiplikationsformeln för $\Gamma$-funktionen [12, s. 45].

Formeln som återstår att visa är baserad på

$$\int_0^\infty t^s e^{-\pi n^2 t}\frac{dt}{t} = \frac{\Gamma(s)}{\pi^s n^{2s}}$$

vilket kan visas med variabelbytet $u = \pi n^2 t$. Summering över alla $n \in \mathbb{N}_0$ ger oss $\frac{\Gamma(s)}{\pi^s}\zeta(2s) = \sum_{n=0}^\infty \int_0^\infty t^s e^{-\pi n^2 t}\frac{dt}{t}$ som är absolutkonvergent för de $s$ där $\zeta$ konvergerar. Därför kan vi byta plats på summering och integrering. Poissonsummering ger oss till slut

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^\infty t^s e^{-\pi n^2 t}\frac{dt}{t} = \int_1^\infty \sum_{n=1}^\infty t^{1/2-s} e^{-\pi n^2 t}\frac{dt}{t} - \frac{1}{2s} + \frac{1}{2s-1}.$$

Detta adderas till integralen över resterande område för att ge oss vår likhet.

För ett fullständigt bevis, se [4, s. 13]. □

*Anmärkning* A.2. Sats A.7 och A.8 tillsammans kan användas för att definiera hela $\zeta$-funktionen, då alla värden för $\mathrm{Re}(s) \le 0$ kan definieras utifrån ett värde av funktionen med $\mathrm{Re}(s) \ge 1$.

**Proposition A.2.** *I sats 5.1, om* det $A = 0$ *så antar integralen värdet* 0 *eller så absolutkonvergerar den inte.*

*Bevisskiss.* Detta resultat fås genom att använda samma metod som i exempel 5.1, vilket kan genomföras på alla liknande situationer. □

**Proposition A.3.** *Funktionen* $\varphi(s) = -\frac{s\zeta(1-s)}{\Gamma(1+s)}$ *uppfyller mästarsatsens krav.*

*Bevis.* Med Eulers reflektionsformel och funktionalekvationen för $\zeta$-funktionen ser vi att

$$\varphi(s) = \frac{s2^{-s}\pi^{-s}\sin(\pi s)\Gamma(-s)\zeta(s)}{\sin(\frac{\pi}{2}s)\Gamma(1-s)} = -\frac{\cos(\frac{\pi}{2}s)\zeta(s)}{2(2\pi)^s}.$$

Att $\zeta$-funktionen växer långsammare än $e^{Q|\mathrm{Im}(s)|}$ för något $Q < \frac{\pi}{2}$ är allmänt känt, se [4, s. 95]. Notera också att vi inte kan använda mästarsatsen för $\phi$ här, då $\phi(s) = -s\zeta(1-s)$ växer superexponentiellt i reell riktning. □

**Proposition A.4.** *Låt* $f(x) = 1/(e^x - 1)$. *Då gäller att* $\mathcal{M}(f)(s) = \zeta(s)\Gamma(s)$ *för* $\mathrm{Re}(s) > 1$. *Med andra ord får vi i samma område*

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1}.$$

*Bevis.* Vi gör följande härledning,

$$\int_0^\infty x^{s-1}\frac{1}{e^x-1}dx = \int_0^\infty x^{s-1}\sum_{n=1}^\infty e^{-nx}dx = \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty x^{s-1}e^{-nx}dx = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s}\int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}dx.$$

Ordningsbytet av integrering och summation är motiverat då uttrycken absolutkonvergerar. □

*Beräkning* A.1. (Exempel 6.2) Betrakta nu ett fixt $s \in \mathbb{C}$ med positiv realdel. Observera att $\pi/(t\sin(\pi s/t))$ är en analytisk funktion med avseende på $t \in \mathbb{C}$ när $0 < \mathrm{Re}(s) < \mathrm{Re}(t)$. För att se att detta även gäller för integralen $\int_0^\infty x^{s-1}/(1+x^t)dx$ visar vi först absolutkonvergens. Det gäller att

$$\int_0^\infty \Big|\frac{x^{s-1}}{1+x^t}\Big|dx \le \int_0^2 \frac{x^{\mathrm{Re}(s)-1}}{|1+x^t|}dx + \int_2^\infty \frac{x^{\mathrm{Re}(s)-1}}{x^{\mathrm{Re}(t)}-1}dx < \infty$$

eftersom $|1+x^t|$ antar ett nollskilt minimum på $[0,2]$. Nu kan vi derivera inuti integraltecknet och enligt samma metod som i sats 2.1 få att funktionen är analytisk. Då $\Lambda(s,t)$ och $\pi/t\sin(\pi s/t)$ överensstämmer på en mängd med hopningspunkter, ger identitetssatsen att de är lika överallt. Vi kan därför utvidga likheten som ges av (5) till $0 < \mathrm{Re}(s) < \mathrm{Re}(t)$.

*Beräkning* A.2. (Exempel 6.4)

För att kunna använda mästarsatsen måste vi utöka $\frac{2H_{k-1}}{k}$ till en analytisk funktion. $H_s$ är entydigt definierad av två ekvationer, $H_0 = 0$, och $H_{s+1} = H_s + \frac{1}{s+1}$. Alltså, om kan vi hitta en analytisk funktion som uppfyller dessa två ekvationer så har vi hittat en fortsättning.

Vi har att $\frac{\Gamma'(s+1)}{\Gamma(s+1)} + \gamma = (\log \Gamma(s+1)))' + \gamma$ uppfyller det första kravet, då $\frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} = -\gamma^{\dagger}$, och

$$\big(\log(\Gamma(s+1))\big)' + \frac{1}{s+1} = \big(\log(\Gamma(s+1)) + \log(s+1)\big)' = \big(\log((s+1)\Gamma(s+1))\big)' = \big(\log(\Gamma(s+2))\big)'$$

där konstanttermen naturligtvis inte förändrar ovanstående. Alltså kan vi utan problem sätta $H_n$ till $\frac{\Gamma'(n+1)}{\Gamma(n+1)} + \gamma$. Observera att $\frac{H_{s-1}}{s}$ har en borttagbar pol i 0 med värde 0, så vi kan summera från $k = 0$ utan att detta förändrar summans värde.

Nu behöver vi visa att $\frac{2H_{s-1}}{s} = \frac{\Gamma'(s)}{s\Gamma(s)} + \frac{\gamma}{s}$ uppfyller mästarsatsens krav. Vi har en känd approximation av $\frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)}$ som $\mathcal{O}(\log(|s|))$, vilket självklart uppfyller tillväxtkraven. Nu ger en direkt användning av mästarsatsen det vi ville visa.

**Sats A.9** (En utdvidgning för $\phi$)**.** *Låt $\phi^*$ uppfylla mästarsatsens antaganden för något $\delta > 0$, men med $Q = \pi/2$. Säg också att $f(z)$ uppfyller mästarsatsens krav för samma $\delta$ med motsvarande $Q = 0$ och är en analytisk funktion så att*

$$\int_{(\lambda)} |\mathrm{Im}(s)|^{\lambda-1/2}|f(-s)|ds < \infty$$

*för $0 < \lambda < \delta$. Då gäller mästarsatsens formel för $\phi(z) = f(z)\phi^*(z)$ i området $0 < \mathrm{Re}(s) < \delta$.*

*Bevis.* Vi konstruerar $\phi_m(z) = f(z)\phi^*(z(1-1/m))$. $\phi_m$ går punktvis mot $\phi$ och speciellt erhålls samma $C$ och $P$ för alla $m$. Summans punktvisa konvergens gäller eftersom summan absolutkonvergerar enligt anmärkning 3.3. Vi får speciellt

$$\Big|\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\phi_m(n)}{\Gamma(n+1)}(-x)^n\Big| \leq \int_{(\lambda)} |\Gamma(s)\phi_m(-s)x^{-s}|ds \leq Bx^{-\lambda}\int_{(\lambda)} |\mathrm{Im}(s)|^{\lambda-1/2}|f(-s)|ds = B_0x^{-\lambda}$$

enligt antagande, för något $B_0$. Nu är vi klara eftersom alla krav i sats 3.2 uppfylls, med enda skillnad att vi nu tillåter $\delta \geq 1$, vilket enkelt kan lösas.

□

**Proposition A.5.** *För varje fixt $x \in \mathbb{R}$ får vi*

$$|\Gamma(x+iy)| = \sqrt{2\pi}|y|^{x-1/2}e^{-x-\frac{\pi}{2}|y|}[1 + \mathcal{O}(\frac{1}{|y|})].$$

*Vidare gäller:*

*i) Tag $a, b \in \mathbb{R}$. För något $B \geq 0$ och för tillräckligt stora $|y|$, får vi för alla $x \in [a, b]$*

$$|\Gamma(x+iy)| \leq B|y|^{b-1/2}e^{-\frac{\pi}{2}|y|}.$$

*ii) Låt $Q < \pi/2$ och $\lambda > 0$. Då gäller*

$$\int_{\lambda-i\infty}^{\lambda+i\infty} |\Gamma(s)|e^{Q|\mathrm{Im}(s)|}ds < \infty.$$

*Bevis.* (Proposition 2.2). Den första delen får vi av Stirlings formel och detaljerna genomförs i [7].

*i)* Definiera $\Delta(x+iy) = \sqrt{2\pi}|y|^{x-1/2}e^{-x-\frac{\pi}{2}|y|}$. Satsens första påstående ger för tillräckligt stora $|y|$ att $|\Gamma(x+iy)| \leq 2\Delta(x+iy)$. Till sist observerar vi att $\Delta(x+iy) \leq B_1|y|^{b-1/2}e^{-\frac{\pi}{2}|y|}$ för något $B_1$ i vårt område för stora $|y|$, vilket ger påståendet.

$^{\dagger}\gamma$ kallas för Euler-Mascheronikonstanten, och är lite större än 1/2.

*ii*) Låt $a = b = \Lambda$. Vi enligt *i*) får för tillräckligt stora $|y|$, säg $|y| > r$, att $|\Gamma(\lambda + iy)| \leq B|y|^{\lambda - 1/2} e^{-\frac{\pi}{2}|y|}$. Vi ser nu att

$$\int_{|y|>r} |\Gamma(\lambda + iy)| e^{Q|y|} dy \leq B \int_{|y|>r} |y|^{\lambda - 1/2} e^{(Q - \pi/2)|y|} dy < \infty,$$

eftersom $Q - \pi/2 < 0$. Innanför $[-r, r]$ konvergerar integralen självklart, på grund av att gammafunktionen är kontinuerlig, vilket bevisar påståendet.

$\square$

# Referenser

[1] G. H. Hardy. *Ramanujan, Twelwe lectures suggested by his life and work.* Cambridge University, 1940.

[2] E. C. Tichmarsch. *Introduction to the theory of Fourier Integrals.* Andra upplagan, Oxford University Press, 1948.

[3] S. Lang. *Complex analysis.* Fjärde upplagan, Springer, 1999.

[4] E. C. Tichmarsch. *The theory of the Riemann zeta-function.* Second edition, Clarendon Press, 1986.

[5] P. Flajolet och R. Sedgewick. *Analytic combinatorics.* Cambridge University Press, 2009.

[6] Marcel Riesz. *Sur l'Hypotese de Riemann.* Stockholm 1915.

[7] A. A. Kilbas och M. Saigo. *A Remark on Asymptotics of the Gamma Function at Infinity (Study on Applications for Fractional Calculus Operators in Univalent Function Theory).* Hämtad från https://www.researchgate.net/publication/32144141 den 2019-02-18.

[8] *Srinivasa Ramanujan.* Hämtad från www.indianmathsociety.org.in den 2019-03-04

[9] I. Gonzalez och V. H. Moll. *Definite integrals by the method of brackets.* Hämtad från https://arxiv.org/abs/0812.3356v1 den 2019-03-10.

[10] T. Amdeberhan, O. Espinosa, I. Gonzalez, M. Harrison, V. H. Moll och A. Straub. *Ramanujan's master theorem.* Hämtad från https://www.researchgate.net/publication/257643116 den 2018-11-20.

[11] J. Cislo och M. Wolf. *On the Riesz and Báez-Duerte criteria for the Riemann hypothesis.* Hämtad från https://arxiv.org/abs/0807.2971 den 2019-05-07.

[12] R. Remmert. *Classical topics in complex function theory.* Springer, 1997.