Logaritm, från koncept till klassrum

En studie om hur lärare introducerar logaritmer i svenska klassrum

Linus Törnkvist

Ämneslärarprogrammet med
inriktning mot arbete i
gymnasieskolan

Uppsats/Examensarbete:	**15 hp**
Kurs:	**LGMA2A**
Nivå:	**Avancerad nivå**
Termin/år:	**VT/2019**
Handledare:	**Magnus Goffeng**
Examinator:	**Johan Wästlund**
Kod:	**VT19-3001-010-LGMA2A**

Nyckelord: logaritm, undervisning, matematik, gymnasium, svårigheter, logarithm, education, mathematics, upper secondary school, difficulties

Abstract

Logarithms may be one of the most confusing and hard to grasp subjects for students in their upper secondary mathematics education. There have been relatively few studies reviewing how teachers introduce this subject to their students, especially in Sweden. Therefore, this study aims to highlight how a few Swedish upper secondary school teachers introduce logarithms to their students, pros and cons of their methods and potential student difficulties that come up along the way. This is done in a qualitative manner, by interviewing four different teachers about their methods and thoughts. Their answers are then analysed and discussed with different literature and theoretical frameworks in mind, for example the constructivist view of assimilation and accommodation. The results show that teachers who introduce logarithms with an algebraic and pragmatic method focusing on solving exponential equations find less student difficulties. But focusing on the understanding of logarithms and their connection to other subjects seem to raise more confusion about the subject among the students. This may be because of the teacher's different views of what logarithms are to be used for. If they are solely for equation solving, then the procedure can be learned with relative ease through solving a lot of similar problems. But understanding deeper meaning and using logarithms dynamically in mathematics seem to require more than just solving a lot of problems.

Förord

Jag vill inleda med att tacka de fyra respondenter som tog sig tid till att bli intervjuade för studien, er anonymitet förblir men ni vet vilka ni är. Jag vill också tacka min handledare Magnus Goffeng för det stöd som givits under studiens gång. Ännu ett tack går ut till Johanna Pejlare som agerade bollplank för idéer innan arbetet startade. Slutligen vill jag tacka vänner, familj och särskilt min kära fästmö, ni har varit stadiga pelare under arbetets gång där jag alltid kunnat luta mig tillbaka för att andas ut och ta nya tag.

Linus

Innehållsförteckning

1. Inledning 1
2. Syfte och frågeställningar 2
3. Bakgrund 3
3.1 Historia 3
3.2 Undervisningsupplägg 5
3.2.1 Via logaritmens historia 5
3.2.2 Via potenslagar 7
3.2.3 Notationsbyte 8
3.2.4 Upprepad division 8
3.3 Elevers svårigheter 9
3.3.1 Övergeneraliseringar och felskrivningar 9
3.3.2 Invers funktion 10
3.3.3 Notation 11
3.4 Flipped classroom 12
3.5 Styrdokument 12
4. Teoretisk ram 14
4.1 Konstruktivism 14
4.1.1 Assimilation och ackommodation 14
4.1.2 Zone of Proximal development 15
4.2 Konnektivism 15
5. Metod 17
5.1 Urval 17
5.2 Genomförande 17
5.3 Forskningsetik 17
5.4 Trovärdighet 18
5.5 Analys 18
6. Resultat 19
6.1 Bakgrund 19
6.1.1 Respondent 1 19
6.1.2 Respondent 2 19
6.1.3 Respondent 3 20
6.1.4 Respondent 4 20
6.2 Logaritmintroduktion 20
6.2.1 Respondent 1 21
6.2.2 Respondent 2 21
6.2.3 Respondent 3 22

6.2.4 Respondent 4 ___ 23

6.3 Elevers svårigheter ___ 23

6.3.1 Respondent 1 ___ 23

6.3.2 Respondent 2 ___ 24

6.3.3 Respondent 3 ___ 24

6.3.4 Respondent 4 ___ 24

7. Diskussion och slutsats ___ 26

7.1 Resultatdiskussion ___ 26

7.1.1 Logaritmintroduktioner ___ 26

7.1.2 Elevers svårigheter ___ 28

7.2 Metoddiskussion ___ 29

7.3 Slutsatser ___ 30

7.4 Didaktiska konsekvenser ___ 30

7.5 Framtida forskning ___ 31

Referenslista ___ 32

Bilaga 1 - Missivbrev ___ 35

Bilaga 2 - Intervjuguide ___ 36

Figurförteckning

Figur 1: Bit av en räknesticka (Toepfer, u.å.) 5
Figur 2: Förklaringsmodell för den proximala utvecklingszonen 15

1. Inledning

Denna studie har sin grund i mitt tidigare examensarbete (Törnkvist & Hansson, 2017). Det arbetet var en litteraturstudie om logaritmens historia, logaritmens didaktiska svårigheter i skolan och olika tillvägagångssätt för att introducera begreppet för elever i ett klassrum. Denna uppsats bygger främst på det sistnämnda, alltså hur logaritmer kan introduceras för elever i olika klassrum. Enligt Ganesan och Dindyal (2014) är logaritmer ett område som elever generellt brukar ha svårt för då det finns många sätt att missförstå hur logaritmer används och hur logaritmlagarna fungerar.

Logaritmer tar relativt lite plats i det centrala innehållet i matematiken på gymnasiet. Begreppet logaritm nämns i kurserna matematik 2b, 2c och matematik 4 (Skolverket, 2019). Men det återkommer då och då till exempel när elever behöver derivera vissa uttryck eller lösa exponentialekvationer. Förståelsen för begreppet kan då vara viktigt för att eleverna ska få en uppfattning av vad de faktiskt gör. Förutom det som explicit står i läroplanen är det upp till varje lärare att göra en avvägning för hur mycket deras elever behöver veta om logaritmer och deras egenskaper för att de ska kunna navigera sig genom alla möjliga uppgifter som kan uppstå i skolan och i deras vardag.

Därför är det intressant att studera hur lärare tacklar ämnet i skolan, hur kan vi ge eleverna bästa möjliga förutsättningar för att förstå ett ämne som många anser vara abstrakt och svårt att förstå? Vad är viktigt att eleverna förstår om logaritmer? Bör vi fokusera på att eleverna ska få en konceptuell förståelse för vad logaritmer är? Eller räcker det med att fokus ligger på procedurförmåga, alltså främst att kunna använda lagar och regler för att lösa exponentialekvationer? Dessa frågor utgör basen till studien.

2. Syfte och frågeställningar

Syftet med studien är att studera hur olika lärare på svenska gymnasieskolor hanterar området logaritmer. Hur de introducerar avsnittet i skolan, varför de gör på det viset samt vilka för- och nackdelar de upplever som följd av de valda strategierna. Detta studeras med hjälp av följande frågeställningar:

- Hur introducerar lärare logaritmer i den svenska skolan?
- Vilka svårigheter anser lärare att elever uppvisar kring logaritmer och hur hanteras dessa?
- Vilka för- och nackdelar ser lärare angående att introducera logaritmer på olika sätt?

3. Bakgrund

Detta kapitel är ämnat att ge läsaren användbar information för att göra studien begriplig och för att sätta den i en större kontext. Därmed redovisas relevanta aspekter med hjälp av tidigare forskning som berör området. Bland annat sammanfattas logaritmens historia, ett antal olika undervisningsupplägg som hittats i litteratursökningen, vad gymnasieskolans styrdokument säger om logaritmer samt olika svårigheter som kan uppstå när elever ska lära sig om logaritmer.

3.1 Historia

Det händer ibland att någon uppfinner något för att uppfylla ett specifikt syfte och att det först senare inses hur användbart konceptet är för andra ändamål, logaritmer är en av dessa uppfinningar. Logaritmens fader, som anses vara John Napier (1550–1617), jobbade på sitt verk *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* i ungefär 20 år tills han publicerade det år 1614, bara tre år innan hans död (Boyer, 1968). Där beskrev han den tidiga logaritmen vars funktion var att omvandla multiplikation av tal till addition och även division av tal till subtraktion för att förenkla beräkningar (Boyer, 1968). Logaritmens uppkomst var som en skänk från himlen till astronomer under tidigt 1600-tal eftersom de ägnade stor del av sin tid till att utföra astronomiska beräkningar där de ofta behövde multiplicera eller dividera stora tal. Det sägs att astronomers livslängd fördubblades i och med den minskade arbetsbördan som logaritmen gav dem (Cajori, 1909). Logaritmen var alltså endast utvecklad som en metod att utföra beräkningar och inget mer, det var först senare som den naturliga kopplingen mellan exponentialfunktioner och logaritmer belystes (Cajori, 1909).

Det är relativt komplicerat och tar lång tid att beskriva hur Napier gick till väga för att definiera logaritmen, för den nyfikne finns det en relativt utförlig förklaring i Törnkvist och Hansson (2017). Den algebra som fanns tillgänglig på Napiers tid var inte tillräckligt mogen för att beskriva hans tankar, istället använde han sig av en geometrisk grund baserat på samband mellan geometriska och aritmetiska talföljder (Cajori, 1913).

Följande är en förklaring av Napiers tankesätt, observera att detta inte var hans metod för att definiera logaritmen utan är endast en förenklad förklaringsmodell byggd med aritmetiska och geometriska talföljder. Låt oss studera två godtyckliga talföljder, en aritmetisk och en geometrisk exempelvis dessa:

5	10	15	20	25	30	35	40	45
2	4	8	16	32	64	128	256	512

Nu låter vi L vara logaritmen av ett tal och definierar talen i den aritmetiska talföljden som logaritmen av motsvarande position i den geometriska talföljden på följande sätt.

5	10	15	20	25	30	35	40	45
L(2)	L(4)	L(8)	L(16)	L(32)	L(64)	L(128)	L(256)	L(512)

Med detta kan vi multiplicera eller dividera vilket tal vi vill från den geometriska talföljden genom att addera eller subtrahera de motsvarande talen från den aritmetiska talföljden och se vilken logaritm det nya talet motsvarar. Om vi till exempel vill utföra multiplikationen $8 \cdot 32$ kan vi konstatera att $L(8) = 15$ och $L(32) = 25$, därefter utförs additionen $15 + 25 = 40$ och då syns det att $L(256) = 40$, alltså är $8 \cdot 32 = 256$ (Cajori, 1913).

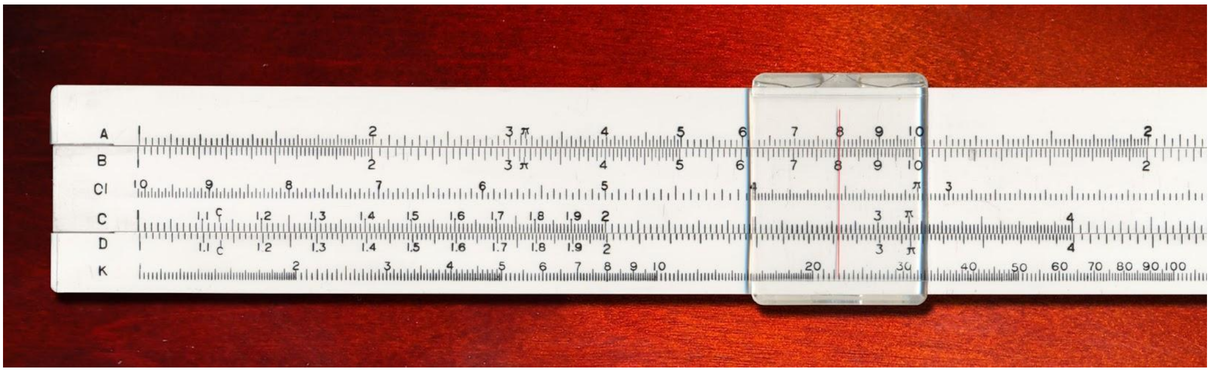
Division går att utföra på liknande sätt, exempelvis $\frac{512}{64}$ där $L(45) = 512$ och $L(64) = 30$. Subtraktion av de korresponderande ger $45 - 30 = 15$ och vi ser att $L(8) = 15$, alltså är $\frac{512}{64} = 8$. Multiplikation och division blir alltså reducerat till addition och subtraktion samt några tabelluppslagningar för att hitta korresponderande värden, vilket är avsevärt mindre tidskrävande när det gäller beräkningar för stora tal.

Det stora problemet med att definiera logaritmen som exemplet visar är att multiplikation och division endast kan ske med talen som existerar i den geometriska talföljden, i vårt fall talen som kan nås via 2^n där n är heltal. Detta går att åtgärda genom att välja en bas för den geometriska talföljden som gör att talen i talföljden ligger nära varandra, alltså en bas som ligger väldigt nära 1 (Pierce, 1977). De möjliga talen hamnar då så pass nära varandra att de flesta tal kan multipliceras med relativt lite felmarginal, och resten av talen kan interpoleras.

Med denna förklaringsmodell kommer logaritmens bas inte in i bilden. Men vi kan definiera en bas som beror på valet av talföljderna, basen i exemplet ovan skulle i så fall vara $\sqrt[5]{2}$. Historiskt blev inte logaritmens bas aktuellt förrän andra matematiker utvecklade sina egna logaritmtabeller som baserades på andra talföljder (Cajori, 1909).

Efter Napiers logaritm publicerades fortsatte begreppet utvecklas successivt av diverse andra matematiker till något som mer liknar det vi använder idag. Några milstenar var när Henry Briggs (1561–1630) utvecklade 10-bas logaritmen och publicerade sina första tabeller 1617 (O'Connor & Robertson, 1999). Även när Nicolaus Mercator (1620–1687) myntade begreppet naturlig logaritm, dock utan att nämna talet e, i en publicerad artikel 1668 (O'Connor & Robertson, 2001). Logaritmens utveckling kulminerade år 1748 när Leonhard Euler (1707–1783) utforskade logaritmens dåvarande definitions tvetydighet och utvecklade en ny definition som fortfarande används idag, $log_a(y) = x \Leftrightarrow y = a^x$ (Bradley & Sandifer, 2007). Denna definition används relativt ofta för att introducera logaritmer i läroböcker (Mulqueeny, 2012).

Logaritmen användes för att förenkla beräkningar under lång tid, först med hjälp av tabeller men det dröjde inte länge förrän det utvecklades ett smidigare alternativ för enklare beräkningar. År 1922, bara 8 år efter Napier publicerade sitt verk om logaritmer, skapades den första räknestickan gjord av William Oughtred (1574–1660). En räknesticka är i princip två stycken linjaler med logaritmiska skalor utritade som placeras ovanför varandra (se Figur 1), vilket ger möjligheten att rada upp tal som ska multipliceras och sedan läsa av vad resultatet är med hjälp av sambandet $log(a) + log(b) = log(ab)$ (Stoll, 2006). För den intresserade finns en mer ingående förklaring av hur räknestickan fungerar i Törnkvist och Hansson (2017).



Figur 1: Bit av en räknesticka (Toepfer, u.å.)

Räknestickan underlättade vid beräkningar där exakthet inte var av största vikt då det inte är helt enkelt att urskilja vilket tal den pekar på, logaritmtabeller fortsatte därför vara det mest exakta sättet för precisa beräkningar. Räknestickan utvecklades successivt, fler och fler funktioner lades till med åren såsom att räkna ut kub- och kvadratrötter. Men när den första miniräknaren som kunde få plats i fickan släpptes 1972 blev den snabbt obsolet då beräkningar kunde utföras ännu snabbare och med mindre möda (Stoll, 2006). Mulqueeny (2012) förklarar att när miniräknaren introducerades i klassrummet förändrades logaritmens roll, den primära användningen skiftade från att vara ett sätt att utföra och förenkla beräkningar till att vara exponentialfunktionens invers.

3.2 Undervisningsupplägg

Eftersom en av huvudpunkterna i studien handlar om hur lärare introducerar logaritmer i svenska klassrum är det intressant att studera möjliga ingångar som lärare kan använda för att lära ut logaritmer. Detta kapitel redovisar några sådana ingångar som alla har sina för- och nackdelar.

3.2.1 Via logaritmens historia

Enligt Panagiotou (2011) kan matematikhistoria vara gynnsamt i undervisningssyfte på många sätt. Bland annat ger det elever möjlighet att sätta matematiken i en större kontext när de beskådar hur koncepten uppkom och utvecklades. Det är också av vikt att eleverna förstår hur människan har utvecklat matematiken i en dynamisk process baserat på nödvändigheter under tiderna. Till exempel logaritmen som utvecklades för att det behövdes ett bättre sätt att multiplicera stora tal, men som sedan kunde användas på många olika fronter. Intresset och synen på matematik förbättras också när eleverna får information som gör ämnet mer levande och mer nyanserat. Skolverket (2019) har utsett förmågan att sätta matematiken i en historisk kontext som en av de sju förmågor elever ska få möjlighet att utveckla under sin gymnasieutbildning. Därför är det av intresse att hitta möjliga ingångspunkter till undervisningen som hanterar just matematikhistoria.

Toumasis (1993) beskriver ett sätt att introducera logaritmer med hjälp av dess historiska sammanhang. För att eleverna ska kunna delta och förstå innehållet är det viktigt att de känner igen och har viss förståelse för geometriska och aritmetiska talföljder. Toumasis undervisningsupplägg ser ut på följande vis.

Först ritar vi upp en aritmetisk och geometrisk talföljd på tavlan, den aritmetiska talföljden bör ha differensen 1 för att göra sambanden mellan talföljderna så tydlig som möjligt. Här visas en aritmetisk talföljd med differens 1 samt en geometrisk med kvot 3.

0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	3	9	27	81	243	729	2187	6561

Med detta kan eleverna testa att multiplicera tal från talföljden och sambandet mellan talföljderna kan påpekas. Det framkommer då att istället för att utföra tidskrävande multiplikationer, exempelvis $729 \cdot 9$ så kan vi istället addera de korresponderande talen, alltså $6 + 2 = 8$. Den summan korresponderar då mot 6561, och då är $729 \cdot 9 = 6561$ vilket är produkten vi sökte. För att göra kopplingen tydligare kan den geometriska talföljden skrivas om på följande vis.

0	1	2	3	4	5	6	7	8
3^0	3^1	3^2	3^3	3^4	3^5	3^6	3^7	3^8

Med denna omskrivning syns det tydligt att exponenterna i den geometriska talföljden är identiska med de korresponderande talen i den aritmetiska talföljden. Detta ger en naturlig ingång till potenslagarna, exempelvis $a^x a^y = a^{x+y}$ som enkelt visualiserar varför det fungerar att addera de korresponderande talen för att hitta produkten av två tal. Potenslagen för division $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ är också enkel att beskåda i sammanhanget eftersom division av två tal i den geometriska följden kan utföras genom att subtrahera de korresponderande talen i den aritmetiska följden, differensens korresponderande tal är då kvoten av den division vi ville utföra. Efter detta kan det vara värt för eleverna att testa andra talföljder, då kan de själva få skriva ned aritmetiska och geometriska talföljder och kontrollera att sambanden fungerar (Toumasis, 1993).

För att bygga vidare på detta kan talföljderna generaliseras på följande vis.

p	$2p$	$3p$	$4p$	$5p$	$6p$	$7p$	...	np
q	q^2	q^3	q^4	q^5	q^6	q^7	...	q^n

Detta leder till att vi kan definiera en funktion som binder samman de korresponderande talen i följderna, funktionen skulle då se ut så här; $f(q^n) = np$. Med denna funktion och från tidigare observationer kan vi rada upp ett antal likheter. Om a och b är tal från den geometriska talföljden så är;

$$f(ab) = f(a) + f(b)$$
$$f\left(\frac{a}{b}\right) = f(a) - f(b)$$
$$f(a^t) = tf(a).$$

Läraren kan därefter poängtera att John Napier använde sambanden vi sett för att utveckla logaritmbegreppet. Men funktionen vi ställde upp kallade han istället för logaritm, logaritmen av ett tal från den geometriska talföljden är lika med det korresponderande talet i den aritmetiska talföljden. Alltså skulle enligt våra talföljder $log(9) = 2$, men om vi valt en annan geometrisk talföljd, till exempel 4^n så skulle $log(16) = 2$. Där uppstår problem eftersom olika indata ger samma utdata, detta kan vi åtgärda genom att introducera begreppet bas till logaritmen. Då ser vi att $log_3(9) = 2$ och $log_4(16) = 2$, detta gör att tvetydigheter försvinner. Slutligen kan logaritmlagarna presenteras och förklaras (Toumasis, 1993). Det kan också vara värt att visa eleverna Eulers logaritmdefintion, $a^y = x \Leftrightarrow log_a(x) = y$, i efterhand så att de kan bekanta sig med den eftersom den oftast används i samband med logaritmer.

3.2.2 Via potenslagar

Gamble (2005) förespråkar ett annat sätt att introducera logaritmer, nämligen via potenser och potenslagar. Eftersom elever har en tendens att lägga logaritmlagarna på minnet utan att reflektera över lagarnas egentliga innebörd anser Gamble (2005) att det finns behov av en introduktion som ger eleverna mer förståelse för hur lagarna och reglerna fungerar så eleverna inte bara kommer ihåg, utan förstår istället.

Gamble (2005) låter eleverna studera grafer för olika exponentialfunktioner, till exempel $f(x) = 10^x$ och $g(x) = 5^x$. Genom funktionerna får de undersöka vilka regler och samband som är synliga när de studerar graferna. Med lite vägledning kanske eleverna hittar någon eller några av potenslagarna, alla lagarna kan sen presenteras i sin helhet på tavlan.

$$a^x a^y = a^{x+y}$$
$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$
$$(a^x)^y = a^{xy}$$
$$a^0 = 1$$

Gamble (2005) låter sedan eleverna fokusera på $f(x) = 10^x$ där de får göra sitt bästa för att hitta närmevärden för x till två olika värden på funktionen. Exempelvis kan de hitta närmevärden till $10^x = 489$ (där $x \approx 2.6893$) och $10^x = 73$ (där $x \approx 1.8633$), detta får de göra genom att testa olika värden på x successivt för att komma närmare och närmare. Något som uppkommer vid dessa försök är att x måste ligga mellan 1 och 2 när funktionsvärdet är mellan 10 och 100, samt att x måste ligga mellan 2 och 3 om funktionsvärdet är mellan 100 och 1000. Med den utgångspunkten kan eleverna testa fler och fler decimaler tills närmevärden är relativt nära. Med tillräckligt bra närmevärden kan potenslagarna användas för att multiplicera eller dividera talen vi valde. Multiplikation av talen kan då skrivas om och exponenterna kan adderas enligt potenslagarna på följande vis;

$$489 \cdot 73 = 10^{2.6893} \cdot 10^{1.8633} = 10^{2.6893+1.8633} = 10^{4.5526} \approx 35694.393.$$

Genom en kontroll får vi $489 \cdot 73 = 35697$ och det syns då att vi fått ett relativt bra närmevärde till multiplikationen. Alltså verkar det fungera, givet tillräckligt många decimaler, att använda potenslagarna för att utföra multiplikation av tal. Eleverna kan själva testa att dividera talen med hjälp av potenslagen för division. Med denna grund kan logaritmer förklaras som ett sätt att hitta exponenten till en viss bas för att det ska vara lika med något tal. Alltså $lg(489) \approx 2.6893$ och $lg(73) \approx 1.8633$. Därefter är den naturliga fortsättningen att framföra logaritmlagarna.

3.2.3 Notationsbyte

Hurwitz (1999) förespråkar en metod som baseras på att byta ut logaritmnotationen till något annorlunda från början för att eleverna ska se något som är mer likt andra begrepp de redan blivit introducerade till. Istället för $log_b(x)$ kan logaritmen introduceras via den vanliga funktionsnotationen $f(x)$, det blir i så fall ett mellansteg som gör att eleverna lättare kan ta till sig informationen eftersom de redan arbetat mycket med notationen $f(x)$.

Hurwitz (1999) förklarar att notationsbytet kan ske på följande sätt. Först låter vi eleverna utforska en exponentialfunktion, exempelvis $f(x) = 10^x$, vi kan då tillsammans konstatera att funktionen är injektiv vilket innebär att funktionen måste ha en invers. Då säger Hurwitz att vi kan se $f(x) = 10^x$ som en funktion som 'lyfter på' en exponent. I så fall kan vi kalla inversen för $g(x)$ som 'lyfter ned' en exponent. Med detta låter vi eleverna betrakta $g(x)$ och testa funktionen med olika väl valda potenser så de vänjer sig vid processen, exempelvis $g(2^9) = 9$ eller $g(5^3) = 3$. Det följer sedan relativt naturligt att välja argument som inte är skrivna som potenser, exempelvis $g(81) = x$. Men nu uppstår ett problem, vi kan skriva om 81 som potenser med olika exponenter och baser. Eleverna kanske märker att $g(3^4) = 4$ och att $g(9^2) = 2$, men eftersom en funktion inte kan peka på samma värde i dess värdemängd givet olika värden från dess definitionsmängd är detta inte en funktion. Det innebär att vi måste introducera något för att skilja $g(3^4)$ och $g(9^2)$ åt. Det är här basen kommer in i bilden, vi kan säga att $g(x)$ ger ett värde givet en potensbas, alltså kan funktionen skrivas om som $g_b(x)$ där b är basen för potensen, detta ger oss att $g_3(3^4) = 4$ och $g_9(9^2) = 2$. Nu kan läraren förklara att en matematiker vid namn John Napier skapade en sådan funktion som han döpte till logaritm och att den ser ut så här; $log_b(x) = y$. Detta bör enligt Hurwitz ge eleverna en utökad förståelse och en mindre tröskel för eleverna att förstå logaritmer när de introduceras.

3.2.4 Upprepad division

Vos och Espedal (2016) ger en förklaringsmodell för logaritmer som baseras på en central fråga: 'Hur många gånger behöver jag dividera talet med logaritmbasen för att nå 1?'. Logaritmen är då antalet gånger det vi dividerar med logaritmbasen, exempelvis kan vi se $log_2(32)$ som att vi delar 32 på 2 tills vi når 1. Genom ett snabbt test ser vi att om vi delar med 2 successivt krävs det 5 divisioner för att nå 1. Detta är en process eleverna lätt kan greppa och börja använda. Att förklara logaritmer via upprepad division går också hand i hand med hur exponenter ofta förklaras, nämligen som upprepad multiplikation.

Vos och Espedal (2016) ger ett exempel på ett undervisningsupplägg som nyttjar förklaringsmodellen de visat. De börjar med att förklara tankesättet för eleverna genom exempel, såsom att $lg(100\ 00) = 4$ eftersom $100\ 000 \div 10 \div 10 \div 10 \div 10 = 1$. Via detta kan eleverna själva räkna ut logaritmen av olika tal. Efteråt får eleverna tänka på exempelvis ekvationerna $lg(x) = 0$, $lg(x) = 1$ och $lg(x) = 9$. Frågan vänds något i dessa fall och eleverna får fundera på vilket tal som kräver 0, 1 eller 9 divisioner med 10 för att nå 1. Eleverna kan också få tänka på ekvationer såsom $lg(7x + 9) = 3$ med hjälp av insikten att uttrycket inuti logaritmen måste vara det tal som kräver 3 divisioner med 10 för att nå 1, vilket innebär att $7x + 9 = 1000$.

Efter detta introducerar Vos och Espedal (2016) logaritmer där divisionerna inte går jämnt ut och når exakt 1. Vid dessa tillfällen är det svårt att hitta exakta värdet av logaritmen genom upprepad division, men det går att göra en grov uppskattning om ett intervall där logaritmen befinner sig. Till exempel för $lg(900) = x$ där vi vid upprepad division med 10 ser att två divisioner ger 9 och tre divisioner ger 0.9, alltså är $2 < x < 3$. Vi kan också konstatera att x bör vara relativt nära 3 eftersom $lg(1000) = 3$ och $lg(100) = 2$ och talet 900 ligger mycket närmare 1000 än 100. Att evaluera dessa samband bör ge elever en bättre känsla för logaritmens funktion och hur den fungerar enligt Vos och Espedal (2016). Genom att studera sambanden mellan två logaritmer kan vissa logaritmlagar nås, exempelvis $lg(7000)$ och $lg(700)$. Eftersom $lg(7000) = lg(700 \cdot 10)$ borde $lg(7000)$ kräva en extra division med 10 för att nå 1 i jämförelse med $lg(700)$. Alltså borde $1 + lg(700) = lg(7000)$ vilket kan skrivas som $lg(10) + lg(700) = lg(7000)$, detta visar logaritmlagen för multiplikation (Vos & Espedal, 2016).

3.3 Elevers svårigheter

När logaritmer introduceras ger det upphov till flera olika missuppfattningar och svårigheter för elever. Ganesan och Dindyal (2014) påpekar att missförstånd och fel som elever gör kan vara användbart för läraren i utbildningssyfte då det ger en inblick i hur elever tänker om logaritmer och hur de lär sig. Om läraren utvecklar nya strategier baserat på elevernas misstolkningar kan hen anpassa undervisningen för att minimera misstolkningar i framtiden. Därför är det intressant att studera vilka svårigheter som kan uppstå i samband med logaritmer. Således kommer detta kapitel sammanfatta några, enligt litteraturen, vanliga svårigheter som uppstår för elever när de jobbar med logaritmer.

3.3.1 Övergeneraliseringar och felskrivningar

Aziz, Pramudiani och Purnomo (2017) skriver i sin artikel att elever generellt har svårt för att visualisera och konceptuellt förstå logaritmer, mycket på grund av feltolkningar och övergeneraliseringar. Vos och Espedal (2016) menar att vissa övergeneraliseringar och felskrivningar av logaritmlagar beror på likheterna till andra samband, exempelvis

$$(xy)^2 = x^2 \cdot y^2$$
$$0^2 = 0$$
$$1^2 = 1$$

$$\sqrt{xy} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{y}$$
$$\sqrt{0} = 0$$
$$\sqrt{1} = 1.$$

Dessa samband är korrekt definierade men kan leda till att elever gör den felaktiga induktiva slutledningen att en del av logaritmlagarna bör se ut på följande sätt;

$$log(x \cdot y) = log(x) \cdot log(y)$$
$$log(0) = 0$$
$$log(1) = 1.$$

Eftersom logaritmlagarna skiljer sig från de tidigare reglerna de lärt sig är det relativt enkelt för eleverna att missförstå eller komma ihåg fel lagar och regler. Vidare uppstår det en hel del andra felskrivningar av logaritmlagarna, nedan visas ett antal av dessa som beskrivs av Weber (2016);

$$log(x + y) = log(x) + log(y)$$
$$log(xy) = xlog(y)$$
$$log(x) - log(y) = \frac{log(x)}{log(y)}.$$

Dessa felskrivningar har gemensamt att de liknar riktiga logaritmlagar med små felaktigheter. Kenney och Kastberg (2013) beskriver andra övergeneraliseringar bland annat där elever noterar att det är skillnad mellan $log_5(8)$ och $log_4(8)$, på grund av den skillnaden drog eleverna den felaktiga slutsatsen att $log_5(1)$ och $log_4(1)$ också måste vara olika.

För att minska risken för felskrivningar och misstolkningar förespråkar Aziz, Pramudiani och Purnomo (2017) inlärningsmetoder som fokuserar på att ge mening till logaritmbegreppet, istället för inlärningsmetoder som fokuserar på ekvationslösningsprocedurer och memorering av logaritmlagarna. Detta bör enligt dem ge eleverna bättre förutsättningar att undvika feltolkningar och övergeneraliseringar då de har en stadigare grund att stå på och kan evaluera sina påståenden på ett mer korrekt vis. Mulqueeny (2012) påpekar att elever ibland endast fokuserar på procedurer och regler som gör att de kan lösa uppgifterna som ges. Men när dessa elever sedan ska jobba med en uppgift som inte kan lösas genom de regler och procedurer de memorerat stöter de på problem. Detta är också ett fenomen som kan minska om inlärningen fokuserar mer på logaritmens mening och relation till andra begrepp.

3.3.2 Invers funktion

Kenney och Kastberg (2013) menar att elever ofta inte ser logaritmer som en invers funktion till exponentialekvationer utan mer som en lösningsalgoritm som används utan eftertanke, likt hur PQ-formeln kan användas som lösningsalgoritm för att hitta rötterna till en andragradsekvation. Kenney och Kastberg (2013) kom fram till detta när de testade elever med uppgifter. Först gav de eleverna en ekvation likt $log_2(4x + 8) = 8$, vilket de löste genom $2^{HL} = 2^{VL}$ vilket resulterar i ekvationen $4x + 8 = 256 \Leftrightarrow x = 62$. Efter det fick eleverna försöka evaluera ett uttryck likt $log_2(-8)$. När eleverna skulle hitta värdet på logaritmen tänkte de inte på att inversen $2^x = -8$ är omöjlig då negativa tal inte finns i någon exponentialfunktions värdemängd. Istället försökte de hitta en exponent till basen 2 som ger −8 genom att testa sig fram med bråk och negativa exponenter. Eleverna hittade av förklarliga skäl inte en passande exponent men hävdade att de skulle hitta en till slut om de fortsatte leta.

Ännu mer svårigheter med logaritmer beskrivs av Berezovski (2004), hon hävdar att en del svårigheter uppstår för elever eftersom läroböcker lägger för lite fokus på att sätta logaritmer i en vardaglig kontext. Alltså att ge förklaringar för vad logaritmer faktiskt är och hur det används i vardagen. Några sådana exempel kan vara att det används för flertalet olika skalor såsom richterskalan, decibelskalan eller pH-värden. Logaritmer är också aktuellt när vi pratar om storleksordningar, som ofta pratas om när värden jämförs där den ena är 10 gånger större än den andra. Det går också att ge mening till logaritmer genom dess historia, vilket Berezovski (2004) förespråkar. Berezovski (2004) jämför detta med hur exponentialfunktioner förklaras genom flertalet verkliga exempel, så som populationstillväxt, sönderfallet av radioaktivt avfall eller avkastning för pengar på en bank. Om logaritmer inte förklaras med hjälp av verkliga exempel hävdar Berezovski (2004) att konceptet får en sekundär roll där logaritmer bara används för att lösa exponentialekvationer.

3.3.3 Notation

Hurwitz (1999) hävdar att notationen $log_b(x)$ utgör ett problem för elever när det gäller att lära sig om logaritmer och hur de används. Han menar att ett sådant uttryck är relativt obekant för många elever då det introduceras eftersom det är en bokstavsfunktion tillsammans med index och variabel. Hurwitz (1999) menar att elever är mer vana vid funktionsbegreppet när det är skrivet med notationen $f(x)$. Han skriver att elever ofta har svårt för att tänka på logaritmen som en funktion där en input ger en output, men om notationen var mer lik $f(x)$ borde elever lättare kunna relatera till logaritmen som en funktion. Enligt Mulqueeny (2012) behöver eleverna få en större förståelse för notationer och symboler för att utveckla en nyanserad bild av den bakomliggande algebran. Om eleverna inte förstår meningen bakom notationen $log_b(x)$ kommer de antagligen ha svårt att använda logaritmer algebraiskt korrekt. Utan bakgrundsförståelse blir hanteringen och lösningsmetoder med logaritmer inget mer än memorerade procedurer som görs utan reflektion.

Kenney och Kastberg (2013) reflekterar också över logaritmnotationens betydelse i elevers inlärning, men skriver att elever kan vara mer förberedda att ta till sig notationen $log_b(x)$ om de redan stött på andra bokstavsfunktioner såsom de trigonometriska funktionerna $cos(x)$, $sin(x)$ och $tan(x)$. Detta är intressant ut ett svenskt skolperspektiv då elever som läser b-spåret i matematik på gymnasiet i Sverige kommer i kontakt med logaritmer i matematik 2b men de möter aldrig trigonometri. Elever som läser c-spåret kommer dock i kontakt med trigonometri i matematik 1c och logaritmer i 2c, alltså har de lärt sig om trigonometri innan de börjar med logaritmbegreppet (Skolverket, 2019).

Vidare finns det en del tvetydigheter till hur logaritmuttryck förkortas, basen e brukar skrivas som $ln(x)$ och basen 10 brukar skrivas $lg(x)$. Men detta är inte en given regel, många miniräknare använder $log(x)$ som bas 10, men det är inte helt ovanligt att låta $log(x)$ vara synonymt med bas e också, detta görs bland annat i WolframAlpha (Wolfram|Alpha, 2019). Ganesan och Dindyal (2014) förespråkar att inte använda förkortningar med elever som lär sig om logaritmer, det bör enligt dem minska risken för förvirring eftersom alla logaritmer då skrivs på samma sätt.

3.4 Flipped classroom

Bishop och Verleger (2013) beskriver flipped classroom som ett sätt att invertera den traditionella undervisningen. Informationen som annars skulle blivit tilldelad under lektionstid ges istället till eleverna via någon form av media, oftast genom videor, som de får konsumera utanför skoltid. Lektionstiden blir då mer fokuserad på eget arbete där eleverna jobbar med uppgifter som de annars kanske skulle gjort som hemläxor. Konceptet sparar tid för läraren då hen kan hjälpa och vägleda eleverna i mer eget arbete under lektionstid eftersom tiden som behövs för att tillverka genomgångar och genomföra dem minskar.

Det är inte helt enkelt att säga vem som myntade begreppet men enligt Tucker (2012) kan två pionjärer anses vara Jonathan Bergmann och Aaron Sams, Bergmann och Sams började tillverka videor år 2008 för de elever som missade deras genomgångar. Det visade sig då att inte bara de som missat genomgångarna tyckte det var användbart, även många andra elever använde sig av materialet. Eftersom så många elever tyckte det var användbart utvecklades detta till praxis för deras klasser. Alltså fick elever titta på genomgångar i videoformat för att sedan i skolan arbeta med uppgifter. Tucker (2012) beskriver att undervisningsmetoden ändrade klassrumsklimatet, det blev en plats att jobba kollaborativt för att lösa problem och lära sig. Eftersom genomgångar inte behövdes på samma sätt längre skapade det också tid för läraren att hjälpa elever som har det svårt på ett mer effektivt vis.

Bishop och Verleger (2013) ser Khan Academy som en stor aktör inom flipped classroom. Företaget grundades 2006 av Salman Khan och har som mål att ge alla möjlighet till bra och gratis utbildning, oberoende av vilken plats personen befinner sig eller vem den är. Khan Academy laddar upp videor om många olika ämnen vilka kan brukas i flipped classroom syften.

3.5 Styrdokument

När vi studerar hur ett ämne introduceras och pratas om i skolan är det viktigt att ha den aktuella läroplanen för ämnet i åtanke eftersom det är lärarens skyldighet att följa Skolverkets styrdokument. Detta kapitel redovisar därför vad läroplanen för matematik i gymnasieskolan säger angående logaritmer.

Logaritmer utgör en relativt liten del av matematikinnehållet i gymnasieskolan. Det nämns vid namn i matematik 2b, 2c och matematik 4 men återkommer implicit i flera av kurserna när det kommer till derivator och integraler (Skolverket, 2019).

Det centrala innehållet i matematik 2b säger att logaritmer ska introduceras för att kunna lösa exponentialekvationer. Det står även att eleverna ska få information om både grafiska och algebraiska metoder för att lösa exponentialekvationer med och utan symbolhanterande verktyg (Skolverket, 2019).

Det centrala innehållet i matematik 2c nämner logaritmer på ungefär samma sätt som 2b men med mer fördjupade kunskaper. I matematik 2c skall eleven lära sig om logaritmer, kunna hantera logaritmlagarna, logaritmlagarna ska även motiveras med bevisföring. Förutom detta står det även här att grafiska och algebraiska metoder ska kunna användas för att lösa exponentialekvationer med och utan symbolhanterande verktyg (Skolverket, 2019).

Det centrala innehållet i matematik 4 ger logaritmer lite mindre utrymme. Där står det att eleverna ska få lära sig om egenskaper hos logaritmfunktioner och även härledning av deriveringsregler för logaritmer och exponentialfunktioner (Skolverket, 2019).

Utöver det centrala innehållet staplar läroplanen upp sju stycken förmågor som eleverna ska få möjlighet att utveckla under alla matematikkurser. Bland annat ska eleverna få möjlighet att öva på sin problemlösning där de får hitta och värdera strategier för att lösa uppgifter, tolka verkliga situationer med matematiska modeller och undersöka hur matematiken hänger ihop med andra ämnen historiskt och samhällsmässigt (Skolverket, 2019).

4. Teoretisk ram

För att kunna analysera och studera resultatet av studien behövs några teoretiska ramverk. Detta kapitel kommer framföra tre sådana ramar utvalda för att ge en nyanserad bild av resultatet. Två av teorierna är baserad på en konstruktivistisk syn på kunskap och den tredje är en lärandeteori formad utefter det moderna samhället som tar nya kunskapsnätverk såsom internetbaserad information i åtanke.

4.1 Konstruktivism

Konstruktivism är en övergripande lärandeteori som bygger på att kunskapsinhämtning påverkas av individens erfarenheter och tidigare information. Personens livsvärld ter sig som ett filter och gör inlärning subjektiv process där varje individ skapar mening till informationen baserat på deras egna upplevelser och erfarenheter (Ertmer & Newby, 1993). Inom konstruktivism finns det flera underkategorier med olika lärandeteorier, denna uppsats kommer fokusera på Vygotskijs teori om den proximala utvecklingszonen samt Piagets teori om assimilation och ackommodation.

4.1.1 Assimilation och ackommodation

Jean Piaget (1886–1980) är skaparen av en lärandeteori som hamnar inom konstruktivismens ramar där han myntade begreppen assimilation och ackommodation. Begreppen beskriver hur individer tar åt sig kunskap genom adaptation, en sorts kognitiv anpassning.

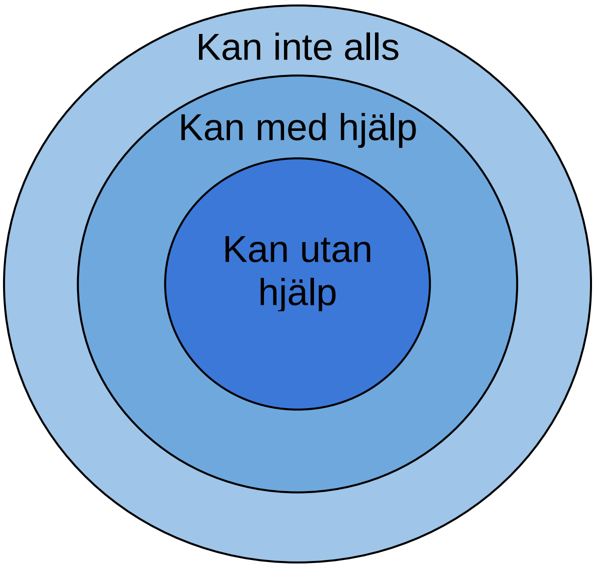
Assimilation uppstår när en person lär sig ny information som på något sätt bygger vidare på individens redan etablerade kunskaper. I praktiken innebär detta att individens befintliga tankar och idéer är relativt i linje med den nya informationen, alltså krävs ingen eller ytterst lite omstrukturering eller ändring av tankar. Den nya kunskapen är alltså en naturlig följd av de gamla erfarenheterna (Lundgren, Säljö & Liberg, 2014). Ett matematiskt exempel kan vara om eleven ska lära sig vad multiplikation är och det förklaras som upprepad addition. Eleven har då en bild av det nya begreppet i form av redan etablerad kunskap vilket hjälper hen förstå det nya konceptet.

Ackommodation är andra sidan av myntet, det innebär att individen tar till sig information som inte går i linje med föregående kunskaper och idéer. Personen måste då anpassa sig till den nya informationen genom att ändra delar av sin världsbild för att passa in den nya kunskapen. Detta beskrivs som en omvälvande process där personens kunskaper inte räcker till för att förstå fenomenet i fråga (Lundgren, Säljö & Liberg, 2014).

Piaget menar att assimilation av kunskap medför att individen lär sig lättare och smidigare än om personen ackommoderar informationen (Lundgren, Säljö & Liberg, 2014). När det gäller matematik och många andra ämnen i skolan beror upptaget av information på hur läraren introducerar ämnet, om konceptet introduceras med en grund i något som eleverna redan har information om är det enklare att assimilera kunskapen. Om konceptet introduceras utan att eleverna har någon information att bygga vidare på behöver de istället ackommodera kunskapen.

4.1.2 Zone of Proximal development

Lev Semenovich Vygotskij (1886–1934) utvecklade idén om zone of proximal development (ZPD), eller den närmaste proximala utvecklingszonen som det översätts till på svenska, en teori för hur lärande sker hos en individ. Det centrala i Vygotskijs teori kan förklaras med en modell där 3 olika zoner målas ut i koncentriska cirklar (se figur 2). Den inre cirkeln i figuren representerar den kunskap och de färdigheter eleven har i ett ämne. Cirkeln som placerats i mitten representerar elevens närmast proximala utvecklingszon, vilket då är den information som eleven kan nå med hjälp av en lärares hjälp. Den yttersta delen av cirkeln representerar kunskapen som eleven inte kan nå med hens nuvarande kunskaper (Lundgren, Säljö & Liberg, 2014).



Figur 2: Förklaringsmodell för den proximala utvecklingszonen

Vygotskij menar att lärande sker inuti den proximala utvecklingszonen, om informationen som ska läras ut är på för hög nivå hamnar det utanför den proximala utvecklingszonen vilket leder till att eleven inte kan ta till sig informationen. Om det är för mycket åt andra hållet, att innehållet som ska läras ut är för enkelt, så ligger det redan i zonen med elevens nuvarande färdigheter, alltså lär sig inte eleven något nytt. Men om innehållet är på rätt nivå kan eleven ta till sig ny information på ett effektivt sätt med en lärares stöd. Processen kallas då scaffolding, att läraren agerar som en byggnadsställning för att eleven ska kunna ta sig till en högre kunskapsnivå (Lundgren, Säljö & Liberg, 2014).

4.2 Konnektivism

George Siemens (2004) är grundaren för lärandeteorin konnektivism, teorin formulerades som en motreaktion till klassiska lärandeteorier såsom behaviorismen och konstruktivismen. Siemens hävdar att dessa äldre lärandeteorier är relativt utdaterade och att de inte längre reflekterar det samhälle vi lever i på grund av den teknologiska utvecklingen vi är med om idag. Numera finns det otaliga informationskällor via till exempel internet och informationen som finns uppdateras snabbare än någonsin, dessa informationskällor är således en grund till lärande som inte var möjlig tidigare.

Siemens (2004) lyfter fram att andra lärandeteorier sätter individen i centrum och att individens lärande är något som sker inombords. Detta vrider Siemens på i konnektivismen och säger att lärande är något som med fördel sker i kontakt med omvärlden via olika nätverk. Nätverk definierar han som kopplade enheter, det kan vara till exempel datanätverk, sociala nätverk eller organisatoriska nätverk. Poängen är att entiteterna har någon form av koppling som gör att när en del ändras påverkas andra delar. Om en individ är delaktig i ett nätverk kan hen tilldelas relevant och uppdaterad information på ett smidigt sätt genom de andra delaktiga entiteterna. Wikipedia är ett utmärkt exempel på ett nätverk som uppdateras med hjälp av delaktiga parter, till synes oändlig information finns inom räckhåll för den som är intresserad och vet hur informationen kan sökas upp.

Vidare kan individens kunskap i sig ses som ett nätverk då information om olika ting kan tolkas som enheter vars existens är beroende och ändras av andra enheter. När en elev lär sig något nytt om ett ämne fördjupas deras kunskap och andra redan etablerade kunskaper anpassas och förändras baserat på den nya informationen. Exempelvis om en elev lär sig om komplexa tal får de antagligen en mer nyanserad bild av matematiken. Delar som förr var obegripliga, såsom när en andragradsfunktion har komplexa rötter, blir plötsligt förståeligt eftersom personens kunskapsnätverk utökat. Flipped classroom modeller är ett ypperligt exempel på hur konnektivismen tar plats i klassrummet, många lärare kan ta del av varandras tillverkade material i form av videor och därmed skapa ett kunskapsnätverk som kan tilldelas elever vid behov.

Siemens (2004) hävdar att med så mycket information inom räckhåll är kapaciteten att söka upp och ta till sig relevant kunskap viktigare än kunskapen i sig. Alltså att kunna sålla i informationsflödet och ta till sig den viktiga informationen när den behövs är viktigare än informationen som tillhandahålls. Teorin i sin helhet handlar alltså om att lärande förstärks i kontakt med olika nätverk och att navigera kring dessa nätverk för att tillhandahålla relevant, uppdaterad information är en viktig färdighet för individens lärande.

5. Metod

Studien är byggd på en kvalitativ arbetsprocess där intervjuer använts för att samla in material. Detta kapitel redogör för hur studien genomförts i hopp om att öka transparens och möjlighet att återskapa materialet för andra studier. Bland annat beskrivs urvalsprocessen, hur intervjuerna genomfördes och bearbetades till användbart material. Det finns en del svagheter som uppkommer på grund av metodvalen, dessa poängteras och diskuteras i kapitel 7.2.

5.1 Urval

För att hitta personer att intervjua laddades ett missivbrev (se bilaga 1) upp i en Facebook grupp kallad Matematikundervisning med drygt 17 500 medlemmar. Av de som kontaktade mig genom missivbrevet intervjuades endast en person i slutändan. Tre andra respondenter hittades därefter via personliga kontakter vilket resulterade i fyra stycken intervjuer. För att öka spridningen bland de intervjuade lärarna valdes personer som arbetar på olika skolor och har olika lång yrkeserfarenhet.

5.2 Genomförande

De intervjuer som gjorts kan beskrivas som semistrukturerade. En intervjuguide tillverkades (se bilaga 2) för att ge en grund med frågor som bör ställas och för att styra samtalet i rätt riktning, beroende på respondenternas svar ställdes relevanta följdfrågor för att samla in så mycket information som möjligt. Den första intervjun var en telefonintervju eftersom avståndet till respondenten inte möjliggjorde ett fysiskt möte, de andra tre intervjuerna utfördes genom fysiska möten i olika lokaler där respondenterna kände sig bekväma. Samtliga intervjuer spelades in med respondenternas samtycke med villkoret att de raderas när arbetet är färdigställt. Respondenterna blev även försäkrade om deras fullständiga anonymitet i hela studien. Längden på intervjuerna var varierande, mellan 30 minuter till en timme beroende på hur pratglad respondenten i fråga var. De inspelade intervjuerna transkriberades sedan med hjälp av oTranscribe, vilket är en online open source tjänst med en textredigerare samt möjligheten att ladda upp ljudfiler som kan pausas och startas med en knapptryckning för enklare transkribering (oTranscribe, u.å.).

5.3 Forskningsetik

Enligt Vetenskapsrådet (2002) finns det fyra krav som bidrar till en etisk forskningsstudie, dessa är informationskravet, samtyckeskravet, konfidentialitetskravet och nyttjandekravet.

Informationskravet handlar i huvudsak om att respondenterna får information om studiens syfte. Respondenterna ska informeras om vilken roll de har i studien, viktiga aspekter som kan få dem att bryta sin medverkan och att deras deltagande när som helst kan avbrytas utan vidare skäl (Vetenskapsrådet, 2002). I enlighet med kravet informerades deltagarna om detta vid första upprättad kontakt samt vid intervjutillfället.

Samtyckeskravet säger att studiens respondenter själva bestämmer över om de vill medverka eller inte. Därmed måste deltagarnas medgivande försäkras, deltagarna får även bestämma själva hur länge de vill delta och vilka villkor som ska gälla. Deltagarna får återkalla sitt medgivande när de vill utan några negativa konsekvenser och påtryckningar (Vetenskapsrådet, 2002). Studiens deltagare gav sitt medgivande och blev informerade om detta när de kontaktades samt vid intervjutillfället.

Konfidentialitetskravet stadgar deltagarnas anonymitet, personuppgifter och andra uppgifter som kan påverka respondenternas konfidentialitet måste skyddas så inte obehöriga når dem. De uppgifter som samlas in ska lagras och beskrivas så deltagarna ej kan bli identifierade genom studien (Vetenskapsrådet, 2002). För att följa detta rådet har den information som möjligtvis kan leda till bakvägsidentifiering anonymiserats och information som inte är av yttersta vikt för studien har uteslutits från resultatet.

Nyttjandekravet innebär att studiens insamlade data bara används i forskningssyfte. Materialet och personuppgifter får ej säljas eller användas på ett sätt som påverkar individen om inte det givits direkt samtycke för det (Vetenskapsrådet, 2002). Respondenterna blev försäkrade om att deras medverkan börjar och slutar i anknytning till studien och att de inspelade intervjuerna raderas vid studiens avslut.

5.4 Trovärdighet

Studiens trovärdighet hänger på dess validitet och reliabilitet. Med validitet menas om undersökningen verkligen mäter det som den påstår mäta (Kvale & Brinkmann, 2014). För att öka validiteten har intervjuguiden en stor roll då den formats för att nå de frågeställningar som studien vill belysa. Intervjuprocessen är också en faktor för studiens validitet där jag var mån om att de följdfrågor och kommentarer som ställdes inte skulle påverka informanternas svar.

Reliabilitet används för att beskriva om en studies resultat kan återskapas genom samma metod (Kvale & Brinkmann, 2014). Studiens reliabilitet har jobbats med genom urvalet av informanter där hög spridning, i den bemärkelsen att informanterna skulle ha olika lång yrkeserfarenhet och jobba på olika gymnasieskolor, var en faktor.

5.5 Analys

Bearbetning och analys av det insamlade materialet gjordes i första hand genom programmet Nvivo där relevanta delar av de transkriberade intervjuerna kodades i olika grupperingar med gemensamma drag. Först gjordes en råkodning där övergripande grupper skapades och de delar av intervjuerna som passade in i dessa grupper placerades där, till exempel skapades en grupp vid namn ‘elevers svårigheter’ där all information som berörde elevers svårigheter från samtliga intervjuer samlades. Detta gav mer överskådlig information som sedan kunde grupperas ytterligare i mer specifika grupper, såsom specifika svårigheter för logaritmer. Det färdigkodade materialet utgjorde sedan grunden till resultatets sammanställning.

6. Resultat

Detta kapitel redovisar en sammanställning av studiens insamlade material. Resultatet är indelat i tre huvudsakliga kapitel. Den första delen ger en överblick över respondenternas bakgrund. Den andra delen presenterar hur respondenterna introducerar logaritmer i klassrummet för sina elever. Den tredje och sista delen beskriver respondenternas syn på elevers svårigheter med logaritmer.

6.1 Bakgrund

Nedan presenteras bakgrundsinformation om respondenterna för att ge en mer nyanserad bild av deras tankar. Det redovisas bland annat hur många år de varit verksamma som lärare, vilka ämnen de undervisar i och varför de tycker logaritmer är viktigt för elever.

6.1.1 Respondent 1

Respondent nummer ett är en legitimerad ämneslärare som undervisar i matematik och fysik, hen gick lärarutbildningen i Stockholm och har i skrivande stund undervisat i drygt 10 år. Under tiden detta arbetet skrivs undervisar hen elever på ekonomiprogrammet, naturprogrammet, språkintroduktion och på yrkesprogram. Naturprogrammet och ekonomiprogrammet är då aktuella när det gäller logaritmer eftersom de läser matematik 2c respektive 2b. Lärobokserierna som används är Matematik Origo på naturprogrammet och Matematik 5000 på ekonomiprogrammet.

Respondenten anser att logaritmer är viktigt för elever främst för att kunna lösa exponentialekvationer på annat vis än grafiskt. Hen finner även ett visst värde i att eleverna kan relatera till logaritmiska skalor såsom decibelskalan och richterskalan men anser detta vara sekundärt i jämförelse med nyttan att kunna lösa exponentialekvationer algebraiskt. Respondenten anser att logaritmer behandlas i tillräckligt stor utsträckning i skolan eftersom eleverna lär sig tillräckligt om det hen anser är det primära användningsområdet, algebraisk lösning av exponentialekvationer.

6.1.2 Respondent 2

Respondent nummer två är legitimerad ämneslärare i historia, fysik och matematik på gymnasienivå genom ämneslärarprogrammet på Göteborgs universitet. I skrivande stund har respondenten varit legitimerad lärare i ungefär fyra år, men hen har varit verksam som lärare tidigare än det. Respondenten undervisar på naturprogrammet och ekonomiprogrammet där båda programmen använder lärobokserien Matematik Origo.

Respondenten anser att logaritmer är viktigt för elever främst för att de ska förstå hur logaritmer används i vardagen, att logaritmer syns i skalor som decibel, richter och becherelskalan. Respondenten tycker till exempel det är viktigt för elever att förstå skillnaden mellan en jordbävning med magnitud 7 jämfört med magnitud 8 när de hör om händelsen på nyheterna. Respondenten tycker inte att logaritmer behandlas i tillräckligt stor utsträckning i skolan för att eleverna ska lära sig det tillräckligt bra. Samtidigt tycker hen att tiden är så pass dyrbar i matematikämnet att logaritmer tar för stor del i relation till vissa andra delar av matematiken eftersom hen anser att andra delar är viktigare.

6.1.3 Respondent 3

Respondent nummer 3 är en legitimerad ämneslärare som i år undervisar främst matematik men har tidigare även undervisat i bland annat teknik, ekonomi och naturkunskap. Hen har jobbat som lärare i drygt 22 år och i nuläget undervisar hen på naturprogrammet samt ekonomiprogrammet, i samtliga klasser används Matematik Origo serien som läroböcker. Respondenten är utbildad civilingenjör och kompletterade den utbildningen med ett pedagogiskt program för att bli legitimerad lärare.

Respondenten tycker att logaritmer är viktigt för eleverna för att de ska öva sitt abstrakta tänkande och för att lösa exponentialekvationer algebraiskt. Hen tror att nästan ingen elev kommer ha användning för logaritmer i vardagen utanför skolan men ser innehållet som ett steg till att lära sig bli en analytisk människa och lära sig svåra saker. Respondenten anser att logaritmer behandlas i tillräckligt stor utsträckning i skolan för att eleverna ska kunna använda konceptet matematiskt.

6.1.4 Respondent 4

Respondent nummer 4 har jobbat som lärare i ungefär ett halvår, hen är en verksam och legitimerad ämneslärare i matematik genom ämneslärarprogrammet på Göteborgs universitet. Respondenten undervisar på teknikprogrammet samt estetiska programmet där båda programmen använder Matematik 5000 serien som läroböcker.

Respondenten anser eleverna bör lära sig om logaritmer för att kunna lösa exponentialekvationer algebraiskt så de kan få ett exakt svar, istället för grafiska metoder som ofta ger mer ungefärliga svar på frågor. Förutom detta anser hen att logaritmer är ett steg för att fördjupa matematikkunskaper och få en djupare förståelse funktionsbegreppet i och med att logaritmering är invers funktion till exponentiering. Respondenten tycker att logaritmer behandlas tillräckligt mycket för att elever ska kunna använda det när det gäller att lösa uppgifter, men påpekar att elever riskerar att glömma bort delar av konceptet då det är en relativt liten del av gymnasiematematiken.

6.2 Logaritmintroduktion

Detta kapitel presenterar respondenternas metod för att introducera logaritmer. Vissa av respondenterna presenterade flera sätt som de testat för att introducera logaritmer, i de fall där dessa är givande och intressanta för studien presenteras även dem.

6.2.1 Respondent 1

Respondent nummer ett introducerar logaritmer med hjälp av flipped classroom metodiken. Hen låter sina elever kolla på en tio minuters video gjord av Daniel Barker där logaritmen introduceras. Eleverna tittar på filmen på valfri plats och tid, tiden som sparas på att inte behöva ha genomgång vid tavlan under lektionstid används istället för att prata om filmen och jobba med eget arbete där läraren har mer tid att guida varje elev med frågor som uppstår.

Barkers (2012) video introducerar logaritmen med hjälp av en central mening som beskriver vad logaritmen är. Han börjar videon med att jämföra potensekvationer och exponentialekvationer, först förklarar han att potensekvationer kan lösas med hjälp av potenslagar. Sedan visar han den enkla exponentialekvationen $10^x = 1000$ och förklarar att den kan lösas genom att skriva om högerledet på potensform, eftersom vi då har samma bas i båda leden måste också exponenterna vara identiska, alltså är $x = 3$. Efter det använder han ekvationen $10^x = 1000$ igen för att formulera meningen *"x är det tal som 10 ska upphöjas till för att få 1000"* (Barker, 2012, 3 minuter 10 sekunder). Barker (2012) säger sen att meningen innehåller nyckeln till logaritmens betydelse och pekar på att vi kan ge delen av meningen som säger 'det tal som 10 ska upphöjas till för att få' en förkortning som vi kallar lg. Detta ger oss den matematiska likheten $x = lg(1000)$, vilket är en matematisk översättning till citatet ovan.

Barker (2012) fortsätter med att ge exempel såsom att evaluera $lg(100)$ där meningen används för att ge förståelse för frågan. Han förklarar att eftersom $lg(100)$ betyder 'det tal som 10 ska upphöjas till för att få 100' kan vi tänka oss fram till att det måste vara 2, alltså måste $lg(100) = 2$. Videon avslutas med exempel för $lg(18)$ vilket visar att vi kan nå tal som inte är på formen 10^n där n är heltal och att logaritmen hittar den exponenten som behövs. Barker har ett antal fler filmer där han går igenom logaritmer för fler baser, logaritmlagarna och mer om hur vi löser exponentialekvationer. Respondenten använder sig av dessa filmer och hävdar att eleverna får en bra förståelse för logaritmer med hjälp av metoden, hen ser inga nackdelar med att introducera logaritmen på detta vis.

6.2.2 Respondent 2

Respondent nummer två introducerar logaritmen genom att först prata om hur logaritmer syns i verkligheten genom skalor såsom decibel- och richterskalan. Hen pratar om till exempel en jordbävning med magnitud 7 och en med magnitud 8 och frågar eleverna hur mycket större magnitud 8 är än magnitud 7. Respondenten förklarar att eleverna inte brukar ha någon aning om detta, så hen förklarar för dem att varje steg i skalan är 10 gånger större än det förra och att detta är på grund av den logaritmiska skalan. Respondenten fortsätter lektionen med skriva upp olika tal som kan skrivas som tiopotenser, exempelvis 100, 1 och 0.01 och frågar om vi kan skriva om dem på något annat sätt. Eleverna märker då att vi kan skriva dem som 10^2, 10^0 och 10^{-2}. Därefter visar respondenten att om vi logaritmerar en sådan potens får vi ut exponenten; $lg(10^2) = 2$, $lg(10^0) = 0$ och $lg(10^{-2}) = -2$. Detta kopplas tillbaka till logaritmskalorna då det syns att logaritmen av ett tal som är 10 gånger större än ett annat ger ett tal som är 1 större, exempelvis $\lg(100) = 2$ och $\lg(1000) = 3$. Respondenten använder grafer flitigt i sin genomgång för att eleverna ska få en visuell koppling till logaritmer, hen visar då exponentialfunktioner och logaritmfunktioner och hur olika värden kan läsas av ur graferna. Respondenten bygger sedan vidare på detta för att gå igenom logaritmer med andra baser där logaritmen blir till exempel 2 gånger större för varje steg istället. Respondenten förklarar att det är väldigt olika hur elever reagerar på introduktionen, vissa förstår direkt men många tycker logaritmer är märkligt.

Respondenten anser att en fördel med denna introduktion är att den startar med begrepp eleverna redan hört förut, vilket hjälper dem visualisera logaritmer och förstå att det inte bara är ett abstrakt koncept. Hen anser att tidsaspekten är en nackdel med introduktionen då den kan ta extra tid i jämförelse med introduktioner som fokuserar på rent algebraisk matematik.

Respondenten berättade även om en annan metod för att introducera logaritmer för elever. Den metoden gick ut på att läraren hade med sig en räknesticka och förklarade för eleverna att det var dåtidens miniräknare. Eleverna och läraren skulle sen se vem som kunde multiplicera stora tal snabbast, eleverna fick då lägga undan sina miniräknare samt andra digitala hjälpmedel och multiplicera för hand med endast penna och papper medan läraren fick använda sig av sin räknesticka. Det visade sig då att läraren lyckades multiplicera talen avsevärt snabbare med hjälp av räknestickan än vad eleverna kunde göra för hand, även om resultatet ofta hade avrundningsfel av olika storlekar. Lektionen fortsatte med att respondenten försökte ge en förklaring av hur och varför räknestickan fungerar, dock märkte hen att eleverna inte riktigt greppade konceptet och insåg att räknestickan var för komplex för att introducera på det viset. Istället gick respondenten över till att förklara logaritmen med en mer traditionell metod, hur logaritmer fungerar algebraiskt med räkneregler och dess relation till exponentialfunktioner.

6.2.3 Respondent 3

Respondent nummer tre hade en grafisk utgångspunkt för att förklara logaritmen. Läraren tar avstamp i funktionsbegreppet och hur det fungerar, hen förklarar att när vi stoppar in ett x-värde i en funktion så får vi ut ett y-värde. Men att det också måste finnas någonting som gör tvärtom, att vi har ett y-värde och får ut ett x-värde, alltså en invers funktion. Respondenten visar i grafen med en enkel linjär funktion hur vi istället för att gå in på x-axeln med ett värde och se vart vi hamnar på y-axeln kan gå in på ett önskat y-värde och se vart på x-axeln vi är. Därefter undersöker hen tillsammans med eleverna vilken funktion som skulle vara invers till en linjär funktion $f(x) = kx + m$ och tillsammans kommer de fram till att inversen måste vara $g(x) = \frac{x-m}{k}$. Respondenten visar sedan fler exempel såsom $f(x) = x^2$ och att inversen då är $g(x) = \pm\sqrt{x}$, samt $f(x) = x^3$ och dess invers $g(x) = \sqrt[3]{x}$, detta visar på att många funktioner har en invers som vi kan hitta. Därefter presenteras exponentialfunktionen $f(x) = 10^x$ och läraren berättar att den också måste ha en invers, som då kallas logaritm och kan skrivas på följande sätt; $g(x) = lg(x)$. Efter detta jobbar respondenten på att öka förståelsen för vad logaritmen är genom att förklara exempelvis $lg(500)$ med en mening liknande 'vad är det som exponenten till basen 10 ska vara för att det ska vara 500'. Detta bygger hen sen vidare på och visar detta för fler baser än 10 med hjälp av grafer för till exempel 2^x. Eleverna får då en förståelse för notationen $log_b(x)$ och varför det krävs ett index för att indikera vilken potensbas vi jobbar med.

Respondenten tycker att detta sätt att introducera logaritmer fungerar bra eftersom eleverna får en ingång genom inversa funktioner, vilket de lätt kan visualisera. Hen förklarar att det är extra viktigt för de svaga eleverna att få något konkret att fästa logaritmer vid, vilket kan ses som en fördel med metoden. Respondenten förklarade att hen inte hade observerat några nackdelar med metoden.

6.2.4 Respondent 4

Respondent nummer fyra introducerar logaritmen genom att först ställa frågor till eleverna där de får svara på vilken exponent till basen 10 som krävs för att få ett visst tal, exempelvis för att få 100 krävs exponenten 2 och för att få 1 krävs exponenten 0. Efter några frågor med heltalsexponenter frågar läraren efter ett tal som kräver ett decimaltal som exponent, exempelvis 26. Respondenten förklarar att eleverna brukar bli smått förvirrade eftersom exponenten 1 ger 10 och exponenten 2 ger 100, att det finns något däremellan tar då en stund att greppa. Men eftersom de pratat om kontinuerliga funktioner inser de till slut att det måste finnas något tal mellan 1 och 2 som ger 26. Läraren ritar då upp grafen till $f(x) = 10^x$ där de kan estimera vilket x som krävs för att nå 26. Eftersom detta ger en väldigt grov uppskattning av vilket x som krävs då det är svårt att hitta exakta värden genom grafen ställer läraren frågan 'vore det inte skönt om vi hade en funktion som hittar exponenten åt oss istället för att försöka uppskatta det genom grafen?'. Därefter är det naturligt att visa att det finns just en sådan funktion, att den kallas logaritm och skrivs $lg(x)$. Läraren beskriver sedan logaritmen som en fråga likt 'vad ska jag höja upp 10 med för att få talet som står i parentesen' för eleverna, respondenten förklarar att det var här det klickade för många elever. Därefter fortsätter respondenten genomgången och förklarar att logaritmen inte är vilken funktion som helst, den är exponentialfunktionens invers och har sina egna speciella lagar som gör att vi kan manipulera logaritmuttryck. Därefter kan logaritmlagarna introduceras och exempel på exponentialekvationer kan visas så eleverna lär sig metoden för att lösa dem.

Respondenten förklarar att upplägget försöker fånga intresset hos eleverna med frågor för att sedan bygga ett behov av logaritmen så eleverna känner att de vill veta vad logaritmer är. Om eleverna märker att logaritmen är användbar tror hen att de lättare kommer ihåg konceptet. Respondenten tycker att en nackdel med introduktionen är fokuset på katederundervisning och att det kanske inte engagerar vissa elever lika mycket som till exempel datorlaborationer eller andra mer interaktiva genomgångar.

6.3 Elevers svårigheter

Detta kapitel presenterar respondenternas syn på elevsvårigheter när det gäller logaritmer. Centrala frågor som presenteras här är till exempel om elever tycker logaritmer är svårare än många andra delar av matematiken och i så fall varför det ter sig svårare än andra koncept. Det presenteras även hur lärare hanterar svårigheterna som uppstår.

6.3.1 Respondent 1

Respondent nummer ett tror att mycket av elevers svårigheter uppstår eftersom de inte tränar tillräckligt på matematiken och pluggar inte hemma. Hen menar att om eleverna räknar mer uppgifter och lägger ner mer tid på matematiken försvinner många av svårigheterna. Respondenten förklarar att eleverna brukar ha svårt för det mesta som är abstrakt och att logaritmer inte är värre än till exempel kvadratkomplettering, konjugatregeln eller roten ur. Angående specifika svårigheter med just logaritmer pekar respondenten ut att elever ofta blandar ihop det med roten ur och att det uppstår förvirring för när de ska använda vilken metod i ekvationslösning. Respondenten hävdar på att mycket handlar om mängdträning och att eleverna då lättare kommer ihåg metoder och regler för att använda logaritmer för olika uppgifter.

6.3.2 Respondent 2

Respondent nummer två anser att elever behöver få många olika intryck och många olika associationer när de lär sig nya begrepp för att ge en nyanserad förståelse som inte glöms av. Hen menar att på grund av den pressade tidsramen finns det inte möjlighet att jobba med många olika representationer eller associationer för logaritmer, därmed är det svårt för eleverna att bruka logaritmer för ekvationslösning och memorera logaritmlagar. Respondenten tycker logaritmer är ett av de svåraste begreppen för elever att förstå i gymnasiematematiken, hen anser att inget enskilt begrepp är svårare förrän de når matematik 4 och stöter på partiell integrering eller differentialekvationer. Den största svårigheten respondenten stöter på hos eleverna är användning av logaritmer när de ska lösa exponentialekvationer eftersom det inte verkar vara ett naturligt steg för eleverna att använda logaritmer. Respondenten förklarar dock att hen tror elever hade haft lättare att lösa exponentialekvationer om logaritmen introducerades med en mer algebraisk och ekvationsinriktad genomgång, respondenten tror dock att det hämmar elevers förståelse för vad logaritmer är och gör det till ett mer abstrakt koncept. För att hantera svårigheterna som uppstår jobbar respondenten mycket med exempeluppgifter och försöker få eleverna att plugga mer, både hemma och i skolans räknestugor där de kan rådfråga lärare.

6.3.3 Respondent 3

Respondent nummer tre anser att många elever har svårt för logaritmer eftersom de aldrig kommit i kontakt med det innan och har ingenting att associera det till. Hen upplever att elever ofta har svårt för teoretiska och abstrakta koncept och att de behöver något som visualiserar begreppen. Respondenten berättar att eleverna brukar ha svårt för problemlösning med logaritmer och hur logaritmlagarna används. För att hantera svårigheterna som uppstår brukar respondenten uppmana eleverna att räkna mer uppgifter för att lättare komma ihåg procedurerna och lagarna. Eftersom elever verkar ha svårt att visualisera vad logaritmer är för något använder respondenten mycket grafer och bilder i sin undervisning i hopp om att öka elevernas förståelse.

6.3.4 Respondent 4

Respondent nummer fyra tror svårigheter bland annat uppstår eftersom elever ofta försöker ta genvägar istället för att bygga en komplett förståelse för nya begrepp, vilket underminerar deras utveckling. Sen kommer de till en punkt där genvägarna inte fungerar längre och då tar det stopp för dem. Många använder miniräknare eller mobiler för all beräkning vilket berövar dem träning i huvudräkning och kritiskt tänkande i form av att evaluera sina svar. Respondenten berättar också att många elever försöker hitta genvägar där de fäster koncept vid procedurkunskaper och struntar i vad begreppen faktiskt betyder men lär sig räkna med dem. Men att det hindrar dem att ta sig längre i matematiken och få en djupare förståelse för begreppen som introduceras. Detta gör att deras resonemangsförmåga inte utvecklas så djupt som den borde och påverkar elevers fortsatta lärande.

Respondenten anser att logaritmer är svårt att förstå för elever, men att det definitivt inte är det svåraste begreppet i gymnasiet. Bland annat klassar hen koncept såsom talbaser och komplexa tal som svårare. Respondenten tror att eftersom eleverna sedan tidigare jobbat med bokstavsfunktioner när de haft trigonometri under matematik 1c bidrar det till en mindre tröskel för att förstå sig på logaritmer. Respondenten menar att resonemang kring logaritmer är det svåraste för eleverna att greppa, räknereglerna går att öva in genom att utsätta eleverna för många exponentialekvationsproblem tills de kan det, men resonemanget kräver mer av dem. Respondenten ponerar att eftersom eleverna gärna fokuserar på procedurer riskerar de att se logaritmer som en knapp på miniräknaren som spottar ut ett tal, vilket ger en mindre nyanserad bild av begreppet. Ett annat problem som respondenten upplever är att logaritmer lätt glöms av eftersom det är ett så specifikt område av matematiken. Andra delar såsom prioriteringsreglerna övas på kontinuerligt, vilket gör dem lättare att komma ihåg. Men logaritmer uppkommer mer sällan i gymnasiematematiken och är glöms därmed lättare. För att motverka problemen som uppstår funderar respondenten på att ha någon form av redovisning istället för prov där elever får sätta sig in i ett större problem och sen förklara sitt resonemang för att lösa uppgiften. Detta bör ge eleverna mer anledning till att reflektera över begreppet vilket kan leda till att de också kommer ihåg vad logaritmer är och hur de används.

7. Diskussion och slutsats

Detta kapitel knyter ihop studiens delar. Resultatet ges mening i relation till de teoretiska ramverken och litteraturen från bakgrundskapitlet. Studiens syfte och frågeställningar besvaras i den mån som är möjligt av det insamlade materialet. Didaktiska konsekvenser av resultatet lyfts och idéer för framtida forskning presenteras.

7.1 Resultatdiskussion

Här diskuteras det redovisade resultatet, vilka följder olika undervisningsmetoder kan få och hur elevsvårigheter ter sig när logaritmer behandlas i skolan. Frågeställningen ‘hur introducerar lärare logaritmer i den svenska skolan?’ samt ‘vilka för- och nackdelar ser lärare angående att introducera logaritmer på olika sätt?’ diskuteras först. Därefter diskuteras frågeställningen ‘vilka svårigheter anser lärare att elever uppvisar kring logaritmer och hur hanteras dessa?’ i ett eget delkapitel.

7.1.1 Logaritmintroduktioner

Den logaritmintroduktion respondent 1 förespråkade går att relatera till det teoretiska ramverket konnektivism. Flipped classroom går ut på att använda sig av nätverk där kunskap samlas och kan hämtas ut när den behövs, vilket beskrevs i kapitel 3.4. Det främsta nätverket tar formen av en filmbas där läraren i fråga kan välja ut passande material som eleverna sedan får ta till sig utanför skoltid. Detta frigör lärarens tid som hen kan använda på andra håll, såsom att hjälpa elever med uppgifter på lektionstid då genomgångar får en mindre roll i undervisningen. Filmbasen kan ses som ett nätverk för både läraren och eleverna, läraren i den bemärkelsen som nämndes ovan och eleverna eftersom de kan ta del av informationen från filmerna när och var som helst för att fräscha upp minnet inför ett prov eller dylikt.

Flipped classroom metodiken kan ha både för- och nackdelar. En fördel kan ses vara den tid som läraren sparar in på att inte behöva tillverka genomgångar och utföra dem, tid som kan nyttjas för andra situationer såsom att hjälpa elever när de har det svårt, provrättning eller andra tidskrävande administrativa arbeten. En annan fördel är att eleverna kan ta in det presenterade materialet i sin egen takt. En film kan pausas och spolas fram eller tillbaka till delar som behövs ses igen, vilket inte är möjligt under en vanlig genomgång. Det kan leda till att eleverna lättare tar in informationen eftersom de får möjligheten att välja ett tempo som passar just dem. Det finns såklart nackdelar också, en av dem är att inte alla elever är benägna att plugga hemma och kanske därmed inte vill kolla på det aktuella materialet på fritiden. Då undermineras hela konceptet eftersom eleverna fortfarande måste få en genomgång i skolan för att kunna arbeta med det aktuella området.

Angående det specifika materialet som respondent 1 använde sig av för logaritmintroduktion syns det både styrkor och svagheter. Introduktionen är fokuserad på hur logaritmer fungerar algebraiskt och inte så mycket hur logaritmer syns i verkligheten eller vart de används i andra områden. Det finns likheter här mellan respondent 1, 3 och 4 då alla deras introduktioner var tämligen algebraiska i sin natur. Sådana introduktioner verkar fungera bra för att få eleverna att kunna räkna med logaritmer i standarduppgifter. Men som nämndes i kapitel 3.3.1 och av respondent 4 kan det också påverka elevers förståelse för konceptet på ett sätt som minskar möjligheten att koppla logaritmer till andra begrepp och lösa uppgifter som ej är av standardkaraktär.

En annan sak som respondent 1, 3 och 4 har gemensamt är att de någonstans i introduktionen definierar logaritmen som en fråga likt ‘vilket tal ska 10 upphöjas till för att få x’. Det går att tolka som ett sätt att försöka koppla logaritmen till exponenter, något eleverna redan känner till, vilket kan relateras till Piagets teori om assimilation och ackommodation. Eftersom eleverna kan relatera till logaritmer genom tidigare etablerad kunskap kan de assimilera informationen, istället för att konceptet introduceras på ett vis där eleverna inte har någon referensram att tolka det utifrån där de hade behövt ackommodera kunskapen. En fråga likt ’vilket tal ska 10 upphöjas till för att få x’ har också fördelen att vara en minnesregel för eleverna om de glömmer vad logaritmer är för något.

Fler försök att koppla logaritmen till tidigare kunskap så att informationen kan assimileras görs av vissa respondenter. Speciellt tydligt är det i genomgången som respondent 3 förespråkar eftersom den utgår från inversa funktioner, vilket är något eleverna känner igen sen tidigare och kan relatera till. Vidare syns det likheter mellan introduktionen från respondent 3 och 4 då båda använder grafer flitigt i sina genomgångar för att ge eleverna ett visuellt stöd samt fokuserar på logaritmen som funktion och inte som procedur för att lösa exponentialekvationer. Jag ser vissa likheter mellan introduktionen från respondent 3 och den introduktion som Hurwitz (1999) förespråkade, vilket beskrivs i kapitel 3.2.3. Båda undervisningsmetoderna använder sig av funktionsbegreppet som en grund för att sedan ta det logiska steget till att se logaritmer som invers till exponentialfunktioner. Det sättet att introducera logaritmer verkar vara användbart, dels för att eleverna lättare kan assimilera kunskapen och dels för att det motverkar elevers svårigheter med att se logaritmen som en inversfunktion vilket beskrivs i kapitel 3.3.2.

Det är intressant att ingen av respondenternas introduktioner är kopplade till att se logaritmen som upprepad division, ett synsätt som presenterades i kapitel 3.2.4. En sådan introduktion torde vara användbar då logaritmen presenteras på ett sätt som liknar hur exponenter brukar introduceras, nämligen genom upprepad multiplikation. Att introducera både logaritmer och exponenter med samma grund kan ge elever större möjlighet att se kopplingen mellan de två begreppen som inverser och ge ökad möjlighet till att assimilera logaritmkunskaper då det liknar redan etablerade kunskaper.

I kapitel 3.2.1 beskrivs ett undervisningssegment baserat på logaritmens historia där logaritmen ges kontext och mening genom dess historiska uppbyggnad. Respondent 2 försökte göra något liknande när hen kopplade logaritmen till dess historiska bakgrund via räknestickan. Det mest centrala för logaritmen historiskt var att underlätta när stora tal skulle multipliceras eller divideras. Just den centrala aspekten lyckades respondenten inkorporera i sin undervisnings genom att låta eleverna och läraren utföra multiplikation av stora tal och se vem som kunde beräkna svaren snabbast, för att sedan förklara hur räknestickan fungerar och varför det går så mycket snabbare att räkna med den än för hand. Dock mynnade introduktionen inte ut i någon förståelse för eleverna, vilket enligt respondenten handlade om räknestickans komplexitet och att eleverna inte var matematiskt redo att förstå den. Detta kan tolkas med hjälp av Vygotskijs tankar om elevers proximala utvecklingszon. Eftersom respondentens undervisningsmetod baserades på något som eleverna inte kunde greppa med hjälp av lärarens guidning var det utanför deras proximala utvecklingszon, vilket gjorde så de inte kunde ta till sig informationen. Det vore intressant att se en utvecklad version av genomgången som är mer anpassad till elevernas proximala utvecklingszon där de lär sig både om hur de kan använda logaritmer praktiskt och lite om dess historia för att ge begreppet en större kontext. Som avsnitt 3.5 belyser säger läroplanen i matematik på gymnasieskolan att eleverna ska få möjlighet att utveckla sina kunskaper inom matematikhistoria, men det är inte alltid helt enkelt att inkorporera i undervisningen. Att utforska undervisningsmöjligheter som smidigt använder sig av matematikens historia är därför användbart.

Respondent 4 hade en del av sin genomgång där eleverna skulle evaluera lg(26), vilket var problematiskt för dem på grund av att det inte ger en heltalsexponent till basen 10. Detta påminner lite om introduktionen som Gamble (2005) förespråkar, vilket beskrivs i avsnitt 3.2.2, där eleverna får testa sig fram för att hitta fler och fler decimaler till exponenten för exempelvis $10^x = 489$. Det finns ett värde i att låta elever reflektera över sådana uppgifter för de ska utveckla sin syn på kontinuerliga funktioner och det ger eleverna en gedigen anledning till varför logaritmer är användbara. Att testa sig fram tills en exponent med tillräckligt hög precision hittas är mycket tidskrävande men logaritmer löser det åt oss. Detta går att koppla tillbaka till logaritmens historia och de logaritmtabeller som använts i århundraden vilket kan ge eleverna ett historiskt sammanhang till logaritmer.

7.1.2 Elevers svårigheter

Respondent 4 nämnde att elever kanske har lättare för logaritmer om de redan stött på andra bokstavsfunktioner tidigare, såsom de trigonometriska funktionerna $sin(x)$, $cos(x)$ och $tan(x)$. Detta var något som också togs upp i avsnitt 3.3.3 där Kenney och Kastberg (2013) hävdade samma sak. Det är logiskt att elever är mer bekväma med funktioner som beskrivs med flera bokstäver om de stött på det tidigare eftersom det då är förenligt med deras inre representationer och därmed kan kunskapen, i enlighet med Piagets teorier, assimileras enklare. Om logaritmer är den första bosktavsfunktionen eleverna möter är det mer troligt att informationen måste ackommoderas. Detta kan innebära en skillnad för elever som läser matematik 2b jämfört med matematik 2c när de ska lära sig om logaritmer eftersom de föregående kurserna matematik 1b inte hanterar trigonometriska funktioner medan matematik 1c gör det (Skolverket, 2019). Alltså är det möjligt att elever som genomfört matematik 1c har större möjlighet att assimilera kunskaper om logaritmer än elever som slutfört matematik 1b.

Jag noterade att de flesta lärare främst använde sig av logaritmer med bas 10 och förkortningen $lg(x)$ istället för $log_{10}(x)$ i sina introduktioner, det var endast respondent 3 som tidigt visade att logaritmer med andra baser finns och hur det fungerar med notationen $log_b(x)$. De andra lärarna följer möjligtvis upp med andra baser i kommande lektioner och skapar förståelse där med. Vad som är mest lämpligt är oklart, frågan är hur elevernas förståelse påverkas av att först lära sig logaritmen med den förkortade notationen $lg(x)$ för att sedan utvidga den till den generella notationen $log_{10}(x)$ istället för att gå från den generella till den förkortade. Det påpekades i kapitel 3.3.3 att Ganesan och Dindyal (2014) uppmanar lärare till att inte använda förkortningar när logaritmer introduceras eftersom det kan skapa förvirring kring logaritmnotationen. Huruvida det spelar någon större roll för eleverna är som sagt oklart, men det tål att tänkas på.

Flera respondenter ansåg att elever har svårt för problemlösning där logaritmer är inblandade. Memorering av logaritmlagar och resonemang över hur logaritmer kan användas för att lösa uppgifter verkar vara problematiskt för många. Detta kan bero på att det läggs för mycket fokus på procedurkunskaper som gör att elever kan lösa uppgifter men förlorar förståelse för begreppet. Som beskrevs i kapitel 3.3.2 är det inte omöjligt att eleverna då börjar se logaritmen som en metod för att lösa exponentialekvationer, likt PQ-formeln som metod för att hitta rötter till andragradsekvationer, istället för ett mer nyanserat koncept som kan tillämpas på många olika vis.

Respondent 2 såg logaritmer som ett av de svåraste begreppen eleverna möter i gymnasiematematiken, hen använde sig också av den introduktion som hade minst koppling till att hantera logaritmer algebraiskt. Det verkar som att eleverna skulle uppleva mindre svårigheter om introduktionen strukturerades så fokuset låg på användningen av logaritmer i relation till ekvationslösning. Till skillnad från när fokuset ligger på att skapa förståelse för vad logaritmer innebär i verkliga situationer och samband, vilket är något respondenten själv insåg. Men det är intressant att reflektera över skillnaden mellan svårigheter att använda logaritmer i ekvationslösning och förståelsen för begreppet. Kanske är det så att de andra respondenterna upplever färre svårigheter på grund av deras syn på logaritmens primära användningsområde som ekvationslösningsmetod. Om eleverna kan använda sig av logaritmer för att lösa de uppgifter som matematikkurserna ger kan det ses som att eleverna inte har avsevärt mycket svårigheter för logaritmer. Men om det är förståelsen som brister kan det ses som att elever har svårigheter med logaritmer för att de inte riktigt greppar vad konceptet innebär, procedurkunskaperna sitter möjligtvis genom memorering av lagar och regler men den djupa förståelsen, som hjälper eleverna använda matematiken mer dynamiskt, går förlorad. I sådana fall minskar elevers möjlighet att använda logaritmer för mer obekanta problem, vilket nämndes i kapitel 3.3.1.

7.2 Metoddiskussion

Eftersom studien baseras på en kvalitativ metod med intervjuer av olika respondenter uppstår det olika problem. Ett möjligt problem är intervjuguiden som använts för att ställa frågor till respondenterna. Guiden är endast en bas och intervjuerna svävar snabbt iväg från frågorna om det tillåts. Detta leder till att vissa respondenter svarar på frågor som de andra inte gjort eftersom uppföljningsfrågor baseras på respondenternas svar. Vidare är det möjligt att respondenterna tolkade frågorna annorlunda. I slutskedet insåg jag att frågor som hanterar svårigheter med logaritmer kunde förfinas så de tolkades mer likvärdigt. Frågan ’vilka svårigheter uppvisar dina elever när det gäller logaritmer?’ kan tolkas olika beroende på vad respondenten ser som viktigt för eleverna att veta om logaritmer. Om det som läraren anser är viktigast är att lösa exponentialekvationer kanske deras tolkning av frågan blir att de inte ser några speciella svårigheter för eleverna om de kan nyttja logaritmer för det ändamålet. Men om läraren anser att det viktigaste är att eleverna förstår samband mellan logaritmer och andra begrepp och inte bara använda det som metod för att lösa ekvationer kanske de tolkar frågan på ett annat sätt och ser svårigheter kring förståelsen av konceptet. Av denna anledning hade det varit bättre med två olika frågor om logaritmens svårigheter, en som fokuserar på begreppsförståelse och en som fokuserar på den algebraiska användningen av logaritmer.

Tre av intervjuerna utfördes genom fysiska träffar i olika lokaler och en genomfördes via telefon, det är möjligt att skillnaden i intervjumetod påverkar resultatet. Fysiska intervjuer medför möjligheten att studera respondentens ansiktsuttryck när hen pratar och plocka upp subtila indikationer om respondentens tankar eller känslor. Detta är något som telefonintervjuer saknar då respondenten och intervjuaren inte kan se varandra. Visserligen transkriberades intervjuerna efteråt enbart via ljudfiler där inga visuella signaler kommer fram, men minnet om hur respondenten reagerade eller såg ut när olika frågor ställs finns fortfarande kvar när audiofilen spelas upp. Alltså kan det finnas det en viss skillnad mellan intervjuerna som gjordes fysiskt och via telefon då transkriberingen är färgad av mitt minne av respondenternas reaktioner.

En möjlig felkälla är att den information lärarna uppgav i intervjuerna inte kunde kontrolleras via lektionsbesök eller annan form av observation. Hur väl deras uttalanden stämmer överens med verkligheten i deras klassrum är därför något studien inte kan besvara. Vidare är analysen oundvikligen influerad av egna erfarenheter och tolkningar, även om målet var att uppnå objektivitet. Därmed går det inte att veta helt säkert om tolkningen av respondenternas svar är i enlighet med vad de faktiskt menade.

Att dra generella slutsatser från studien är relativt svårt eftersom jag endast intervjuat fyra informanter. Studien kan besvara hur dessa fyra hanterar logaritmer i klassrummet men det är högst osäkert om deras tillvägagångssätt är normen eller undantagen. Det hade varit gynnsamt att intervjua fler respondenter för att kontrollera om viss information är återkommande. Exempelvis var det endast en informant som använde sig av flipped classroom metodiken, om detta är vanligt eller inte i svensk skola är högst oklart och hur väl det fungerar är svårt att besvara genom studien då det endast är en observation kring det fenomenet.

7.3 Slutsatser

Syftet med studien var att studera hur olika lärare i svenska gymnasieskolor introducerar området logaritmer, vad det uppkommer för svårigheter och olika för- och nackdelar angående introduktionerna. Några objektiva slutsatser för andra lärare än respondenterna i studien är svåra att göra givet mängden insamlade data och den kvalitativa naturen på studien. När det gäller hur respondenterna introducerar logaritmer besvarades det i avsnitt 6.2, men det är svårt att veta hur verklighetstroget lärarna beskrev sina metoder samt om mina tolkningar av deras metoder är korrekta.

Den mest konkreta slutsatsen som kan dras är att elever verkar ha mindre svårigheter för att använda logaritmer i ekvationslösning om introduktionen är fokuserad på den algebraiska användningen av logaritmer i samband med just ekvationslösning. Men även denna slutsats kan tas med en nypa salt då det är baserat på få observationer samt att studiens metod inte är felfri, som belystes i avsnitt 7.2. Om slutsatsen stämmer är en fördel med att introducera logaritmer med fokus på ekvationslösning att eleverna lättare kan använda det för att lösa exponentialekvationer. En nackdel framkommer då som att eleverna kanske inte får en lika nyanserad bild av konceptet.

7.4 Didaktiska konsekvenser

Studien har givit mig många insikter om att lära ut logaritmer i svenska gymnasieskolan. Det är tydligt att det inte finns några rätt eller fel när det gäller att introducera logaritmer för elever, alla sätt att introducera ett ämne har fördelar och nackdelar i olika sammanhang. Därför går det inte att säga något om vilken metod som är objektivt bäst. Det kan dock konstateras, av det insamlade materialet, att en introduktion som fokuserar på ekvationslösning verkar göra så elever lättare kan hantera logaritmer när det kommer just till ekvationslösning. Litteraturen och en av respondenterna pekar dock på att en sådan introduktion ger logaritmer mindre verklighetsförankring eftersom eleverna inte får en uppfattning om hur det används och syns i vardagen. Det riskerar då att endast bli ett algebraiskt verktyg för att lösa exponentialekvationer, alltså blir det svårare för elever att greppa vad logaritmer faktiskt är. Detta är något jag reflekterat mycket över under arbetets gång, hur ger lärare de bästa förutsättningarna för elever att förstå koncepten som ska läras ut?

Det är en logisk följd att eleverna blir bättre och lär sig mer av det som läraren fokuserar på, vad som faktiskt gynnar eleverna mest är upp till varje pedagog att besluta beroende på situationen i fråga. Behöver eleverna en mer verklighetsförankrad bild av logaritmer? Det är helt klart gynnsamt för deras matematiska utveckling att få ett så brett perspektiv som möjligt men den stora faktorn är tidsaspekten, vilket ofta är fallet. Aziz, Pramudiani och Purnomo (2017) beskrev också att verklighetsförankringen hjälper elever minska sina misstag när det gäller felskrivningar och övergeneraliseringar. Men eftersom logaritmer utgör en så pass liten del av det centrala innehållet i gymnasieskolan är det svårt att argumentera för en mer ingående och därmed mer tidskrävande genomgång som gynnar elevernas helhetssyn, om vi jämför med en kort och koncis genomgång där eleverna lär sig använda det för att lösa uppgifter och inte för att bredda sin matematiska syn på konceptet.

Det som krävs av eleverna för att uppnå godkända betyg i gymnasiematematiken hänger ofta på att de kan använda sig av koncepten de lärt sig för att lösa uppgifter. Men om lärare vill sträva efter att elever får så goda möjligheter och kunskaper som möjligt i matematiken är det också viktigt med förståelsen för begreppen som lärs ut och kopplingen till verkligheten. Att balansera förståelsen för logaritmer och dess användning är därför en intressant utmaning för lärare i gymnasieskolan.

7.5 Framtida forskning

Angående framtida forskning vore det intressant att se en liknande studie fast ur elevers perspektiv istället för lärare. Vad tycker elever är svårt med logaritmer? Hur ser det ut för elever när de ska lösa standarduppgifter respektive icke standarduppgifter med logaritmer? Ett sådant forskningsområde vore användbart för lärare då det kan ge en mer handfast förklaring för vad elever tycker är svårt och vad de behöver jobba mer med. Det finns ett antal studier som gjorts kring detta område men än så länge är inga av dem fokuserade på svenska skolor och elever.

Under detta arbete märkte jag att svårighet för logaritmer kan ses på flera sätt. En av respondenterna upplevde att elever hade mycket svårigheter för logaritmer när hen fokuserade på att ge elever en bättre begreppsförståelse i sin introduktion. Medan de andra tre lärarna upplevde att elever hade mindre svårigheter och de fokuserade mer på den algebraiska användningen av logaritmer för att lösa exponentialekvationer. Det vore intressant att studera dessa två syner på svårigheter, alltså svårigheter kring logaritm som begrepp och koncept gentemot svårigheter när det gäller förmågan att använda logaritmer för ekvationslösning. En sådan studie kan göras antingen ur lärares perspektiv eller ur elevers perspektiv, båda är intressanta för att skapa en djupare kartläggning om svårigheter angående logaritmer i gymnasieskolan.

Referenslista

Alfredsson, L., Bråting, K., Erixon, P., & Heikne, H. (2011). Matematik 5000 Kurs 2c Blå Lärobok. Stockholm: Natur & Kultur.

Aziz, T. A., Pramudiani, P., & Purnomo, Y. W. (2017). How do college students solve logarithm questions? International Journal on Emerging Mathematics Education, 1(1), 25- 40. doi:10.12928/ijeme.v1i1.5736

Barker, D. [Daniel Barker]. (2012, 9 mars). *Exponentialekvationer och logaritmer* [Videofil]. Hämtad 2019-05-08 från https://youtu.be/kan2K_luMRE

Berezovski, T. (2004). An inquiry into high school students' understanding of logarithms (Doctoral dissertation, Faculty of Education).

Bishop, J. L., & Verleger, M. A. (2013). The flipped classroom: A survey of the research. In ASEE national conference proceedings, Atlanta, GA (Vol. 30, No. 9, pp. 1-18).

Boyer, C. B. (1968). *A history of mathematics.* New York: John Wiley & Sons. Hämtad 2019-04-16 från https://archive.org/stream/AHistoryOfMathematics/BoyerAHistoryOfMathematics#page/n19/mode/2up

Bradley, R., E., & Sandifer, C., E. (2007) Leonhard Euler: Life, Work and Legacy. Amsterdam: Elsevier.

Cajori, F. (1909). *A history of mathematics.* London: Macmillan & Co., Ltd

Cajori, F. (1913). History of the Exponential and Logarithmic Concepts. The American Mathematical Monthly, 20(1), 5-14. doi:10.2307/2973509

Ertmer, P. A., & Newby, T. J. (1993). Behaviorism, cognitivism, constructivism: Comparing critical features from an instructional design perspective. Performance improvement quarterly, 6(4), 50-72.

Gamble, M. (2005). Teaching Logarithms Day One. The Mathematics Teacher, 99(1), 66-67. Retrieved from http://www.jstor.org/stable/27971863

Ganesan, R., & Dindyal, J. (2014). An Investigation of Students' Errors in Logarithms. Mathematics Education Research Group of Australasia. Hämtad 2019-05-02 från http://files.eric.ed.gov/fulltext/ED572604.pdf

Hurwitz, M. (1999). WE HAVE LIFTOFF! INTRODUCING THE LOGARITHMIC FUNCTION. *The Mathematics Teacher*, 92(4), 344-345. Retrieved from http://www.jstor.org/stable/27970977

Kenney, R., & Kastberg, S. (2013). Links in Learning Logarithms. *Australian Senior Mathematics Journal*, 27(1), 12-20.

Kvale, S., & Brinkmann, S. (2014). Den kvalitativa forskningsintervjun (3. uppl.). Lund: Studentlitteratur.

Lundgren, U., Säljö, R., & Liberg, C. (2014). *Lärande Skola Bildning* (Tredje utgåvan). Stockholm: Natur & Kultur.

Mulqueeny, E. (2012). How do students acquire an understanding of logarithmic concepts?. Kent State University. Hämtad från 2019-04-23 från http://proxy.lib.chalmers.se/login?url=https://searchproquest-com.proxy.lib.chalmers.se/docview/1140497429?accountid=10041

O'Connor, J. J., & Robertson, E. F. (Juli 1999) Briggs Biography. Hämtad 2019-04-15, från http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Briggs.html

O'Connor, J. J., & Robertson, E. F. (September 2001) The number e. Hämtad 2019-04-15, från http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/HistTopics/e.html

oTranscribe (u.å.). *A free web app to take the pain out of transcribing recorded interviews.* Hämtad 2019-05-12 från https://otranscribe.com/

Panagiotou, E. N. (2011). Using history to teach mathematics: The case of logarithms. Science & Education, 20(1), 1-35. doi:10.1007/s11191-010-9276-5

Siemens, G. (2004). Connectivism. *A Learning Theory for the Digital Age. In eLearnSpace*. Hämtad 2019-04-05 från http://devrijeruimte.org/content/artikelen/Connectivism.pdf

Skolverket. (2019). *Ämne - Matematik.* Hämtad 2019-04-08 från https://www.skolverket.se/undervisning/gymnasieskolan/laroplan-program-och-amnen-i-gymnasieskolan/gymnasieprogrammen/amne?url=1530314731%2Fsyllabuscw%2Fjsp%2Fsubject.htm%3FsubjectCode%3DMAT%26tos%3Dgy%26p%3Dp&sv.url=12.5dfee44715d35a5cdfa92a3

Stoll, C. (2006). When Slide Rules Ruled. Scientific American, 294(5), 80-87. Hämtad 2019-05-15 från http://www.jstor.org/stable/26061456

Szabo, A., Larson, N., Viklund, G., Dufåker, D., & Marklund, M. (2012). Matematik Origo 2c. Stockholm: Sanoma Utbildning.

Toepfer, C. (u.å.). *Free Slide Rule Stock Photo* [Foto]. Hämtad 2019-05-15 från https://www.freeimages.com/photo/slide-rule-1550149

Toumasis, C. (1993). Teaching logarithms via their history. School Science and Mathematics, 93(8), 428-434. doi:10.1111/j.1949-8594.1993.tb12274.x

Tucker, B. (2012). The flipped classroom. Education next, 12(1), 82-83.

Törnkvist, L., & Hansson, V. (2017). *Logaritmen, igår, idag, imorgon - Från historia till klassrum*. Göteborg: Institutionen för matematiska vetenskaper, Chalmers Tekniska Högskola. http://hdl.handle.net/2077/56311

Vetenskapsrådet (2002). Forskningsetiska principer inom humanistisk-samhällsvetenskaplig forskning. Stockholm: Vetenskapsrådet.

Vos, P., & Espedal, B. (2016). Logarithms - a meaningful approach with repeated division. Mathematics Teaching, (251), 30-33. Hämtad 2019-04-23 från http://proxy.lib.chalmers.se/login?url=https://search.proquest.com/docview/1807707610?accountid=10041

Weber, C. (2016). Making logarithms accessible – operational and structural basic models for logarithms. Journal Für Mathematik-Didaktik, 37(S1), 69-98. doi:10.1007/s13138-016-0104-6

Wolfram|Alpha. (2019). *Wolfram|Alpha Computational Intelligence.* Hämtad 2019-05-03 från https://www.wolframalpha.com/

Bilaga 1 - Missivbrev

Hej! Jag går sista terminen på ämneslärarprogrammet på Göteborgs Universitet med inriktning på matematik och geografi. Jag skriver just nu mitt allra sista examensarbete och skulle vara evigt tacksam om det finns några vänliga själar där ute som kan tänka sig bli intervjuade av mig. Intervjun tänkte jag mig skulle ske via Skype eller ett liknande program där vi kan prata. Alternativt kan det ske i person om intervjuanden är lokaliserad nära Göteborg.

Arbetet handlar om hur lärare lär ut logaritmer. Alltså kommer jag ställa lite frågor om hur du som lärare hanterar det området i undervisningen och varför. Samtalet vi har kommer att spelas in för eget bruk och kommer raderas efter arbetet är klart. Du är såklart helt anonymiserad i arbetet. Tidsramen för en intervju skulle jag säga är max 1 timme.

Jag har förhoppningen om att genomföra intervjuerna under vecka 15–16, kan även tänka mig att boka in något senare denna veckan (v. 14).

Skriv gärna ett meddelande till mig direkt eller genom det här inlägget om ni är intresserade eller har någon fråga.

Tack på förhand!

Bilaga 2 - Intervjuguide

Bakgrund:

1) Vilka ämnen undervisar du i?
2) Vad har du för utbildning?
3) Hur länge har du jobbat som lärare?
4) På vilket/vilka program undervisar du? (ex. natur- eller samhällsprogrammet)
5) Vad använder ni för läromedel i undervisningen? (läroböcker och liknande)
    a) Vilka för- och nackdelar finns med läromedlen?
6) Vilka delar av matematiken verkar elever ha svårt för enligt dina erfarenheter?
    a) Vad är det som är svårt med dem delarna tror du?

Logaritmer:

7) Varför ska elever lära sig om logaritmer?
    a) Vad är deras primära användningsområde?
    b) Anser du att logaritmer behandlas i tillräckligt stor utsträckning i skolan? Varför/Varför inte?
8) Hur brukar du introducera logaritmbegreppet för elever? (En procedur för att lösa exponentialfunktioner? En funktion som ‘plockar ner’ en exponent? Eulers definition? Logaritmlagarna? Invers till exponentiering?)
    a) Använder du olika metoder vid olika tillfällen?
    b) Följer du läroboken eller hittar du på egna sätt att introducera logaritmer?
    c) Vilka för- och nackdelar ser du angående det sättet att introducera begreppet?
    d) Finns det andra sätt du testat eller vill testa för att lära ut logaritmer?
        i) Hur fungerade det i jämförelse med ditt nuvarande sätt?
9) Vilka svårigheter uppvisar dina elever när det gäller logaritmer? (Ge gärna exempel)
    a) Varför uppstår dessa svårigheter?
    b) Hur hanterar du som lärare dessa svårigheter?
    c) Ser du någon koppling mellan svårigheter och ditt sätt att introducera begreppet?
10) Hur reagerar elever på logaritmer med olika baser?
11) Anser du att elever har svårare för att förstå logaritmer än många andra matematiska koncept?
    a) Om ja; varför tror du det?
12) Hur och vad ger du för information till mer högpresterande elever?
13) Har du något du vill tillägga?