Att tolka problemlösningsförmågan

En kvalitativ studie om lärares förhållningssätt till problemlösning

Oskar Wagnås

Ämneslärarprogrammet med inriktning mot arbete i gymnasieskolan

Examensarbete:	15 hp
Kurs:	LGMA2A
Nivå:	Avancerad nivå
Termin/år:	VT2019
Handledare:	Daniel Persson
Examinator:	Hossein Raufi
Kod:	VT19-3001-011-LGMA2A

Nyckelord: *problem, problemlösning, lärares förhållningssätt, problemlösningsförmåga*

Abstract

Problem solving is described as one of the seven mathematical competencies that students in Swedish secondary upper school are expected to develop. It is also an integrated part of the core content in all mathematical courses and in the description of the aim of mathematics it is said that problem solving is to be regarded as both a goal for teaching and an instrument for teaching. This being said, problem solving is supposed to be seen as an end result of teaching but also a mean through which mathematics is taught.

This study aims to analyse how working teachers in Sweden interpret the mathematics curriculum in regards to problem solving as well as their attitudes towards problem solving in general. The data of the study was collected through interviews with five mathematics teachers working in the region of Gothenburg och analysed with a qualitative approach. Two main attitudes were discovered and given the names *bound problem solving* and *unbound problem solving*. These attitudes differed in six aspects of problem solving, for example in how the teachers described what a problem is, how the competence of problem solving is developed and how good problem solvers differ from poor problem solvers.

It was found that the attitude of bound problem solving lacks important aspects, both in relation to how the research literature describes problem solving and in comparison to the curriculum. Unbound problem solving has a more nuanced description of problem solving that correlates better with both the curriculum and the ideas found in published research about problem solving.

Förord

Jag vill passa på att tacka de lärare som valt att delta i studien, utan er hade denna undersökning inte varit möjlig. Samtidigt vill jag rikta ett tack till min handledare, Daniel Persson, som kommit med goda råd och hjälpt mig att strukturera mitt arbete.

Gustaf Arnesson och Mika Forss ska också få var sitt tack.

Innehållsförteckning

Figurförteckning

1 Inledning

Sedan urminnes tider har människan ställts inför problem och brottats med dessa i ett försök att komma till ny lärdom om vår omvärld. I samband med matematikens framväxt har nya typer av problem formulerats och nya grenar av matematiken har växt fram som ett resultat av dessa På så vis har problemlösning länge haft en betydande roll inom såväl matematik som matematikutbildning. Det är därför föga förvånande att problemlösning också utgör en integrerad del av matematikutbildningen i svensk gymnasieskola. Vad som däremot är anmärkningsvärt är i vilken omfattning problemlösning nämns i rådande styrdokument. Skolverket menar att matematikundervisningen inte bara ska träna eleverna i att lösa problem utan problemlösning ska också utgöra ett medel för undervisning. Samtidigt är problemlösning och strategier för problemlösning ett centralt innehåll i samtliga matematikkurser och att kunna formulera, analysera och lösa enkla matematiska problem är ett av kraven för ett godkänt betyg i samtliga kurser. Styrdokumenten återger inga explicita förklaringar om vad problemlösning är eller hur problemlösning kan utgöra ett medel för undervisningen. Istället är det upp till varje enskild lärare att läsa igenom ämnesplanen, tolka det som står, och utifrån sitt eget förhållningssätt implementera det som tolkats i sin undervisning. Det stora tolkningsutrymmet gör att olika lärare kan ha olika syn på vad styrdokumenten egentligen säger och hur lärare väljer att förhålla sig till dessa kan också få implikationer för hur denne väljer att undervisa. För att främja en likvärdig skola publicerar Skolverket stödmaterial och allmänna råd som lärare kan förhålla sig till, men först måste Skolverket veta inför vilka aspekter av styrdokumenten som lärare behöver tolkningsstöd. Därför är det viktigt att det genomförs undersökningar som syftar att kartlägga lärares olika sätt att tolka styrdokumenten, för att då åskådliggöra problematiska synsätt i hopp om att kunna arbeta för att stävja dessa.

1.1 Syfte

Syftet med denna studie är att utifrån Skolverkets formuleringar om matematiska problem och problemlösning undersöka hur lärare förhåller sig till problemlösning, vad de anser att problemlösning är och vilken roll de ser att problemlösning har i matematikundervisningen.

1.2 Frågeställningar

- Hur förhåller sig gymnasielärare till matematisk problemlösning?
- Hur tolkar gymnasielärare styrdokumentens angivelser rörande matematisk problemlösning?

2 Bakgrund

I kontrast till att matematikundervisning länge präglats av traditionell katederundervisning har det länge forskats kring matematisk problemlösning och hur man kan integrera detta i undervisningen. Nedan följer en teoretisk bakgrund om vad problemlösning är och hur det kan implementeras i undervisningen.

2.1 Vad är matematisk problemlösning?

Själva begreppet *problem* kan användas i många sammanhang och dess betydelse varierar beroende på i vilken kontext det placeras. I Skolverkets kommentarmaterial till gymnasieämnet matematik definieras ett problem enligt följande:

> *Ett problem är en uppgift som inte är av standardkaraktär och inte kan lösas på rutin. Det innebär att varje frågeställning där det inte på förhand för eleven finns en känd lösningsmetod kan ses som ett problem*
>
> (Skolverket, 2011a, s.2).

Problem kan således ställas i kontrast till vad Skolverket kallar *"uppgifter av standardkaraktär"* eller *rutinuppgifter* som kännetecknas av att lösningen för varje uppgift ges av en känd procedur eller algoritm (Skolverket, 2011a).

Sättet att se på problem som en kontrast till så kallade rutinuppgifter är vanligt förekommande i litteraturen om problemlösning. Sett ur ett matematikdidaktiskt perspektiv menar Lester (2013) dock att denna typ av beskrivningar av problemlösning är bristfällig. En sådan beskrivning tydliggör bara vad som kännetecknar en problemsituation men säger ingenting om hur lärare kan lära elever att lösa problem eller hur problemlösning kan ses som ett mål och som ett medel för undervisning. Han ger ett förslag på en bättre beskrivning av vad som kännetecknar framgångsrik problemlösning:

> *[...] problem solving involves coordinating previous experiences, knowledge, familiar representations and patterns of inference, and intuition in an effort to generate new representations and related patterns of inference that resolve some tension or ambiguity (i.e., lack of meaningful representations and supporting inferential moves) that prompted the original problem-solving activity*
>
> (Lester 2013, s. 249ff)

En sådan beskrivning tydliggör vilka aspekter av problemlösning som är viktiga för att framgångsrikt lösa problem vilket är av betydelse för de lärare som ska undervisa om eller med hjälp av problemlösning (Lester, 2013). Schoenfeld (1985) lägger stor vikt vid att problem inte är en inneboende egenskap hos en uppgift, utan då problem förutsätter att problemlösaren saknar en allmän lösningsmetod så beror en uppgifts problemkaraktär av vem som ställs inför uppgiften.

> *Being a 'problem' is not a property inherent in a mathematical task. Rather, it is a particular relationship between the individual and the task that makes the task a problem for that person. The word problem is used here in this relative sense, as a task that is difficult for the individual who is trying to solve it. Moreover, that difficulty should be an intellectual impasse rather than a computational one. [...] If one has ready access to a solution schema for a mathematical task, that task is an exercise and not a problem.*
>
> (Schoenfeld, 1985, s. 74)

Vad som faktiskt räknas som ett problem har också beskrivits av Lithner (2006, 2008), som har konstruerat en modell över olika typer av matematiska resonemang. Lithner beskriver där ett dikotomiskt förhållande mellan *kreativt resonerande* och *imitativt resonerande*, som sedan delas upp i ytterligare undergrupper. Lithner beskriver det kreativa resonerandet som en förutsättning för problemlösning, då det är upp till problemlösaren att själv föra giltiga resonemang för att försöka lösa problemet. Det imitativa resonemanget är mer närvarande vid arbete med rutinuppgifter och delas upp i två undergrupper, memorerat resonemang och algoritmiskt resonemang (Lithner, 2008). Dessa typer av resonemang baseras på för eleven kända svar eller lösningsmetoder. Lithner är noga med att påpeka att problemuppgifter som kräver kreativt resonemang ofta också kan ha inslag av imitativt resonemang, men att en uppgift inte kan klassas som ett problem om inte det kreativa resonemanget är närvarande. Lithner beskriver det kreativa resonemanget utifrån tre kriterier: (1) de använda resonemangen ska vara nya, eller att bortglömda sådana återkonstrueras, (2) resultatet eller metodvalets giltighet motiveras och (3) resonemanget vilar på en matematisk grund (Lithner, 2006).

En person som haft stor betydelse för synen på matematisk problemlösning är Pólya, som 1945 gav ut sin bok *How to solve it*. Här presenterade han sin syn på vad problemlösning är för något och hur man bör gå tillväga för att lösa ett problem. Pólya beskriver problemlösningsprocessen i fyra faser och ägnar stor del åt att beskriva vikten av problemlösningsstrategier. Pólya (1957) menar att problemlösning kräver ett utforskande arbetssätt och att arbetsprocessen följer fyra steg:

1. Få förståelse för problemet
2. Utforma en plan
3. Genomföra planen
4. Återkoppla

Pólya (1957) lyfter vikten av att problemlösare behöver vara medvetna om dessa fyra faser för att kunna reglera sitt arbete och slutligen komma fram till ett tillförlitligt svar. Detta är något som kräver övning och för att bemästra förmågan att lösa problem måste problemlösaren få instruktioner i hur man arbetar inom respektive fas. I en studie av Schoenfeld (1992) analyserades hur problemlösare arbetar med matematiska problem. För att mer systematiskt kunna kartlägga arbetsprocessen valde Schoenfeld att dela upp arbetet i 6 faser:

1. Läsa
2. Analysera
3. Utforska
4. Planera
5. Implementera
6. Verifiera

Schoenfeld (19929 menar att oerfarna problemlösare uppvisar en mindre spridning mellan de olika faserna och lägger mest tid på att ogrundat utforska utfallet av en vald lösningsmetod. Bättre problemlösare tenderar istället att vara mer flexibla i sitt arbete och uppvisar en större spridning mellan de olika faserna och rör sig ofta mellan dem (Schoenfeld, 1992). Detta indikerar att bra problemlösare ägnar mer tid åt att reflektera kring problemet och val av angreppssätt och att de lättare växlar mellan olika lösningsmetoder. Detta arbetssätt menar Schoenfeld inte nödvändigtvis gör att man löser ett specifikt problem, utan det ger snarare problemlösaren goda förutsättningar att lösa problemet. Schoenfelds (1992) beskrivning av problemlösningsprocessen är inte lika enkelriktad som Pólyas men de har vissa likheter. Pólya skriver att *"det värsta kan inträffa om han tar itu med beräkningar eller konstruktioner utan att ha förstått problemet"* (Pólya, 1954, s.26), vilket även Schoenfeld menar att många oerfarna problemlösare gör (Schoenfeld, 1992). Problemlösning har länge varit, och är fortfarande, ett aktuellt forskningsområde. Verksamma lärare har således en uppsjö av forskningslitteratur att bygga sin undervisning på men i första hand är det Skolverkets styrdokument som ligger till grund för lärares undervisningspraktik.

2.2 Problemlösning som mål eller medel för undervisning

I matematikämnets syfte ger Skolverket problemlösning två olika roller i undervisningen. Det ska dels vara ett mål för undervisning och dels ett medel för undervisning (Skolverket, 2011b). Undervisning i matematikämnet ska enligt Skolverket ge eleverna möjlighet att utveckla sju olika matematisk förmågor, där en av dem är *"förmåga att formulera, analysera och lösa matematiska problem samt värdera valda strategier, metoder och resultat"* (Skolverket, 2011b, s.1). Denna förmåga kommer i arbetet att benämnas som "problemlösningsförmågan". För att förtydliga vad problemlösningsförmågan faktiskt innebär skriver Skolverket i kommentarmaterialet till ämnesplanen att förmågan handlar om att kunna tolka matematiska problem och med hjälp av lämpligt valda strategier och korrekta resonemang kunna få fram ett resultat samt att kunna värdera såväl metoderna som resultatets giltighet (Skolverket, 2011a). Arbete som syftar att främja denna förmåga hos eleverna har problemlösningsförmågan som mål för undervisningen. För att sammanfatta: när problemlösning är målet för undervisningen vill läraren att eleverna ska bli bättre problemlösare.

Problemlösning som medel för undervisning syftar istället till att använda det icke-linjära och ibland kaotiska arbetssättet av problemlösning för att utveckla andra förmågor hos eleverna (Skolverket, 2011a). Skolverket specificerar inte vilket matematiskt innehåll som ska läras ut med hjälp av problemlösning, utan det är upp till varje lärare att använda problemlösnings som ett medel för att utveckla elevernas andra förmågor inom de områden läraren anser vara lämpliga för ändamålet. Skolverket har också med *problemlösningsstrategier* som ett centralt innehåll för samtliga matematikkurser på gymnasiet (Skolverket, 2011b).

Lester (2013) skriver att beroende på vad undervisningens syfte är krävs olika färdigheter hos läraren. Om problemlösning är målet med undervisningen förväntas läraren agera på ett sätt, men om problemlösning ska utgöra medlet genom vilket eleverna ska lära sig specifikt matematiskt innehåll bör läraren agera på ett annat sätt. Vidare menar Lester (1994) att för att eleverna ska tjäna på problemlösningsundervisning är det viktigt att de känner att läraren tycker problemlösning är en viktig del av matematikämnet.

2.2.1 När är problemlösning ett mål för undervisning?

Problemlösning som mål, eller undervisning *för* problemlösning, har som syfte att utveckla elevernas förmåga att lösa matematiska problem. I likhet med Polya (1957) lyfter Skolverket (2011a) i kommentarmaterialet till matematikämnet att för att lösa matematiska problem krävs ett aktivt användande av problemlösningsstrategier. Nedan följer några av de strategier som Skolverket nämner i sitt kommentarmaterial.

- *Jämföra med liknande problem*
- *Gissa, försöka och förbättra*
- *Förenkla problemet*
- *Använda ekvation*
- *Göra lista eller tabell*
- *Arbeta baklänges*
- *Rita en bild eller graf*
- *Göra en modell*
- *Göra simuleringar*
- *Prova alla möjligheter*
- *Söka efter undantag,*

(Skolverket, 2011a, s.10)

Schoenfeld (2013) beskriver fyra aspekter av problemlösning som han menar är avgörande för en persons eventuella framgång eller tillkortakommande vid problemlösningsarbete och användandet av problemlösningsstrategier utgör en av dessa.

a. *Individual knowledge;*
b. *The individual's use of problem solving strategies, known as heuristic strategies;*
c. *The individual's monitoring and self-regulation (an aspect of metacognition); and*
d. *The individual's belief systems (about him- or herself, about mathematics, about problem solving) and their origins in the students' mathematical experiences.*

(Schoenfeld, 2013, s.11)

Att problemlösarens faktiska kunskap är en begränsande faktor kan anses självklart. Besitter inte problemlösaren tillräcklig matematisk kunskap för att förstå eller hantera problemet kommer det bli svårare lösa problemet. Användandet av problemlösningsstrategier, eller *heuristiska* strategier, menar Schoenfeld också har en tydlig påverkan. Hur man kan undervisa om problemlösningsstrategier kommer beskrivas mer utförligt senare i nästa stycke. Angående punkt (c) skriver Schoenfeld att en skicklig problemlösare själv kan anpassa sitt arbete efter problemformuleringen och enklare byter mellan olika strategier om det första angreppssättet inte gav ett önskvärt resultat. Medan sämre, eller mindre framgångsrika, problemlösare tenderar att snabbare välja en strategi och hålla sig till den, oavsett hur olämplig den visar sig vara. Angående den sista punkten, (d), skriver Schoenfeld att personens tidigare erfarenheter spelar stor roll. Är personen van vid att lösa rutinuppgifter där en given metod snabbt ger en lösning kan själva problemlösningsprocessen kännas avig och ineffektiv vilket riskerar att leda till att problemlösare inte fullföljer sitt arbete för det tar för lång tid. Även elevens inställning till matematik och relationen till det har en avgörande roll.

2.2.1.1 Hur undervisar man med problemlösning som mål?

Schoenfeld (1980, 1982) har undersökt vikten av strategier vid problemlösning och vilka skillnader som finns mellan hur bra och dåliga problemlösare väljer att använda sig av olika strategier. Pólya presenterade i sin bok *How to solve it* olika heuristiska strategier för problemlösning, där heuristik är tekniker eller riktlinjer som används för att ge ny information eller hjälpa användaren att skapa ny information. Heuristiska metoder ger inte nödvändigtvis korrekta svar utan ska snarare ses som möjliga strategier som kan hjälpa användaren framåt. Pólya ger följande beskrivning av heuristik: *"Heuristikens syfte är att studera metoder och regler för upptäckt och uppfinning"* (1957, s.113) och *"heuristik försöker att förstå processen att lösa problem, speciellt de tankeprocesser som normalt är användbara under denna process"* (1957, s. 142). Schoenfelds studier om effekterna av explicit undervisning av elevgrupper i användandet av olika heuristiska strategier och fått resultat som visar en tydlig utveckling av problemlösningsförmågan (1980, 1982). I ena experimentet fick försöksgruppen inte bara träna sig i att använda vissa utvalda heuristiska strategier utan uppmanades också att regelbundet ställa sig fyra reflektionsfrågor:

1. *What (exactly) are you doing? (Can you describe it precisely?)*
2. *Why are you doing it? (How does it fit into the solution?)*
3. *How does it help you? (What will you do with the outcome when you obtain it?)*

(Schoenfeld, 1982, s.34)

Försöksgruppen uppvisade en statistiskt signifikant förbättring mellan för- och eftertest, vilket kontrollgruppen inte gjorde. Detta indikerar att det finns ett matematikdidaktiskt värde i att dels undervisa elever om problemlösningsstrategier och dels låta dem träna på att använda dessa, samt inkludera inslag av självreflektion under arbetsprocessen (Schoenfeld, 1982).

Förutom att läraren vet *vad* som ska ingå i undervisningen eller *vad* läraren ska göra på lektionen är det också viktigt att läraren vet *när* den ska agera och *hur* den ska göra detta (Lester, 2013). Lärare ska kunna välja ut eller konstruera för ändamålet lämpliga problem, lyssna och observera elevernas arbete med dessa problem, vara insatt i de strategier som eleverna väljer att använda, utveckla instruktionerna för elever som har fastnat utan att ta bort den undersökande aspekten av arbetsprocessen samt skapa och behålla ett gott klassrumsklimat (Lester, 2013). Hur lärare lär sig att förhålla sig till detta och hur de skapar goda klassrumsklimat anpassade för problemlösningsundervisning är ett aktuellt forskningsområde. Schoenfeld (2014) skriver om 5 dimensioner som han menar bygger upp så kallade *kraftfulla klassrum* (powerful classrooms), vilka Schoenfeld beskriver som klassrum som frambringar elever som presterar väl inom matematisk problemlösning. Hur undervisande lärare väljer att beakta dessa dimensioner påverkar hur bra förutsättningar eleverna ges för att utvecklas som problemlösare. Nedan följer de 5 dimensioner som Schoenfeld (2014) presenterat.

1. **Matematiken:** Till vilken grad det matematiska innehållet beskrivs och diskuteras och hur olika koncept länkas samman. Eleverna ska ges förutsättningar att lära sig matematik och utveckla ett produktivt matematiskt förhållningssätt.
2. **Kognitiva krav:** Hur anpassat det matematiska innehållet presenteras i förhållande till elevernas förståelse. Balansgången mellan att skala ner allt innehåll till små, lättförståeliga bitar, kontra att hålla det så generellt och abstrakt som det bara går.
3. **Tillgång till matematiskt innehåll:** Till vilken grad arbetet i klassrummet engagerar alla elever och inkluderar såväl låg- som högpresterande elever att diskutera sina tankar på sin egen nivå.

4. **Agentskap, auktoritet och identitet:** Hur väl undervisningen främjar elevernas matematiska självständighet. Eleverna ska utveckla förmågan att arbeta, och viljan att arbeta, matematiskt och bli auktoritära i den mån att de själva kan värdera sitt arbete och utveckla en individuell identitet som kompetenta problemlösare.
5. **Bedömning:** Till vilken grad läraren inkluderar lämplig återkoppling till alla elever om till exempel bra strategival eller felaktiga tolkningar.

(Schoenfeld, 2014, s.407)

2.2.2 När är problemlösning ett medel för undervisning?

Skolverket skriver i sitt kommentarmaterial att problemlösning som *medel* handlar om att använda ett problemlösningsorienterat arbetssätt för att utveckla andra matematiska förmågor hos eleverna. Dessa lärotillfällen kännetecknas av att eleverna får *"tänka högt, söka alternativa lösningar, diskutera och värdera lösningar, metoder, strategier och resultat"* (Skolverket, 2011a, s. 2). Hur lärare väljer att implementera detta är upp till var och en, men det har forskats en del om vad detta undervisningssätt har för möjligheter och begränsningar och vad lärare måste tänka på vid utförandet.

En undervisningsmetodik som fått stort genomslag inom matematikdidaktisk forskning är *problem based learning*. Barrows (2002) beskriver problem based learning som ett elevcentrerat undervisningssätt där elever lär sig att arbeta problemlösningsorienterat, styra över sin egen inlärning och samarbeta med andra elever samtidigt som eleverna får till sig ett brett konceptuellt innehåll som ofta sträcker sig över flera matematiska områden. Barrow lyfter att en av undervisningsmetodens styrkor är att den engagerar eleverna och tydliggör relevansen av det matematiska innehållet vilket motiverar eleverna att lära sig (2002). En meta-analys av 47 publicerade artiklar om effekterna av PBL visar att problem based learning är mer effektiv i att skapa en god attityd till matematikämnet än mer traditionell undervisning (Demirel & Dagyar, 2016). Elever som deltagit i en studie av Schettino (2016) uppgav att de fått en förändrad syn på matematik efter de läst matematikkurser som undervisats genom problem based learning, där ett större fokus låg på att arbeta utforskande med större problem än på procedurer.

2.2.2.1 Hur undervisar man genom problemlösning?

Savery (2006) ger en överblick av de mest centrala aspekterna av problem based learning och summerar detta i en lista. Fokus ligger på arbete med öppna uppgifter där eleverna själva ska vara styrande, läraren har en tydlig roll i att handleda eleverna framåt men huvudsakligen ska undervisningen vara elevcentrerad i den bemärkelsen att eleverna ska aktiveras. Eleverna bör ofta, men inte nödvändigtvis alltid, arbeta tillsammans i grupp och det ska finnas regelbundna inslag av själv- och kamratbedömning. Savory lyfter att det svåraste för lärare i att bedriva problem based learning är att övergå från en lärarroll som kunskapsförmedlare till en lärarroll som undervisningsvägledare. Schettino (2016) påpekar vikten av att klassrumsklimatet ska vara öppet och tryggt, där eleverna ska våga göra sina röster hörda. Detta är viktigt för att elever som är ovana vid denna typen av undervisning måste kunna ges möjligheten att lära sig att samarbeta, lära sig att själva reglera sitt arbete och reflektera över sitt eget och andras arbete (Savory, 2006). Lärarrollen som vägledare syftar till att tona ner det traditionellt hierarkiska förhållandet mellan lärare och elev för att istället göra plats åt ett förhållande som bygger mer på samarbete och tillitsskapande (Schettino, 2016).

Taflin (2007) menar att problemlösning kan delas upp i två olika dimensioner i klassrummet. Dels sker problemlösning på individnivå för alla elever och dels sker det som ett kollektivt samarbete. Den kollektiva nivån bestäms av hur lektionen är upplagd och Taflin delar in lektioner som handlar om problemlösning i 4 faser. Först kommer *introduktionsfasen*, där läraren presenterar ett eller flera problem för eleverna och denna fas når sitt slut när eleverna skapat sig en förståelse för vad problemet handlar om och vad som söks. Därefter kommer *idéfasen med lösningsutkast*. Här ska eleverna individuellt eller tillsammans försöka komma på ett sätt att lösa problemet. Lärarens roll är att finnas till hjälp och se till att eleverna kommer fram till en matematiskt modell eller idé för lösning och när en elev kommit fram till en strategi som verkar lämplig inleds nästa fas, *lösningsfasen*. Här löser eleverna problemet, eller delar av problemet och jämför sina metoder med varandra. Svarens rimlighet och eventuella följder diskuteras och problematiseras eleverna emellan. Lektionen avslutas med *redovisningsfasen*, där elever eller läraren redovisar och lyfter olika lösningar i helklass (Taflin, 2007).

Förutom hur lärare väljer att undervisa om problemlösning menar Lester att lärares förhållningssätt till problemlösning påverkar elevernas lärande (2013). Lester lyfter en syn på problemlösning som han anser både vara vanligt förekommande och problematisk för matematikundervisningen. I denna syn ses matematiken som oförenlig med vår fysiska verklighet. Matematiska aktiviteter presenteras i form av två dimensioner, den vardagliga fysiska verkligheten omkring oss samt den abstrakta matematiska verkligheten med symboler, operationer och regler.

> *This naive perspective has two levels or "worlds": the everyday world of things, problems, and applications of mathematics and the idealized, abstract world of mathematical symbols, concepts, and operations. In this naive perspective, the problem-solving process typically has three steps. Beginning with a problem posed in terms of physical reality, the problem solver first translates the problem into abstract mathematical terms, and then operates on this mathematical representation in order to come to a mathematical solution of the problem. This solution is then translated into the terms of the original problem.*
>
> (Lester, 2013, s. 254)

Arbete med uppgifter som följer detta mönster kan enligt Lester (2013) utveckla en syn på matematiken som någonting som sker skilt från verkligheten. Det matematiska innehållet lärs ut separat från dess tillämpningsmöjligheter och ofta utan koppling mellan olika matematiska innehåll. Lärare lägger ofta stor vikt vid att procedurer och begrepp ska läras ut, övas på och bemästras innan de ska användas på tillämpningsuppgifter. En förbättring av detta synsätt menar Lester vore att "översättningsprocessen" sker kontinuerligt i arbetet. Problemlösaren måste, när behov uppstår, översätta tillbaka det matematiska innehållet till orginalkontexten för att kunna värdera sitt arbete. Lester fortsätter med att även denna, förbättrade syn, har sina brister och att försöka beskriva problemlösning i termer av översättning från en kontext till en annan är otillräcklig.

2.3 Bedömning av förmågor

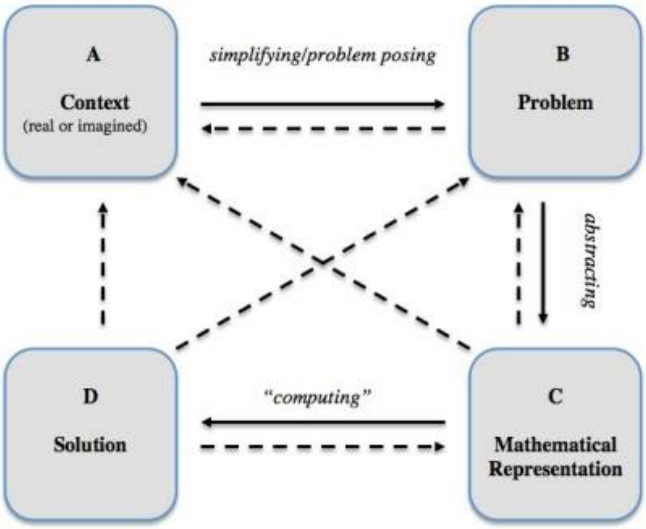
Skolverkets kunskapskrav för matematik lyfter problem och problemlösning på flera olika sätt. Exempel ges från kunskapskraven för betyget E i kurs Matematik 3b:

> *Eleven kan formulera, analysera och lösa matematiska problem av* ***enkel karaktär****. Dessa problem inkluderar* ***ett fåtal*** *begrepp och kräver* ***enkla*** *tolkningar. I arbetet gör eleven om realistiska problemsituationer till matematiska formuleringar genom att tillämpa* ***givna*** *matematiska modeller. Eleven kan med* ***enkla*** *omdömen utvärdera resultatets rimlighet samt valda modeller, strategier och metoder.*
>
> (Skolverket, 2011b, s. 22)

> *Eleven kan med* ***viss säkerhet*** *använda begrepp och samband mellan begrepp för att lösa matematiska problem och problemsituationer i karaktärsämnena i* ***bekanta situationer****.*
>
> (Skolverket, 2011b, s. 21)

De fetstilta värdeorden i citaten ovan ändras mellan de olika betygsstegen. Till exempel ändras *enkel karaktär* för betyget E till *komplex karaktär* för betyget A och *enkla tolkningar* för betyget E ändras till *avancerade tolkningar* för betyget A.

Hur progressionen från ett *enkelt* problem till ett *komplext* problem ska tolkas beskrivs inte i styrdokumenten eller i kommentarmaterialet till dessa. Lester (2013) ger en egen beskrivning av vad han menar avgör komplexiteten av en matematisk aktivitet och presenterar sina tankar i relation till modellen som visas i följande figur (se. figur 1).



Figur 1: Modell över matematisk aktivitet. Streckade pilar noterar reflektion och jämförelse. (Lester, 2013, s. 258)

Modellen beskriver i stora drag hur en problemlösare går från en given problemsituation till att förstå och konkretisera problemet, göra en matematisk representation och därefter använda procedurer för att slutligen nå en lösning. Notera att Lesters modell inte är en representation över matematisk problemlösning utan beskriver vad Lester kallar *matematisk aktivitet.* Komplexiteten av en matematisk aktivitet avgörs enligt Lester av i vilken utsträckning man behöver jämföra mellan de olika stegen. Lester representerar dessa reflektioner med streckade pilar i figur 1. Metakognitiva reflektioner sker i alla steg av arbetsprocessen och det är förekomsten av jämförande mellan ens nuvarande arbete och ens tidigare gjorda beräkningar, tolkningar eller ansatser som särskiljer en komplex aktivitet från en rutinmässig sådan (Lester, 2013).

Att kunna lösa komplexa problem kännetecknar en bra problemlösare och således är metakognitiva reflektioner ett karaktäristiskt drag för dessa. Lester (1994) listar 5 punkter med egenskaper som särskiljer bra problemlösare från mindre bra sådana, där självreflektion är en av dem.

> *1. Good problem solvers know more than poor problem solvers and what they know, they know differently-their knowledge is well connected and composed of rich schemata.*
> *2. Good problem solvers tend to focus their attention on structural features of problems, poor problem solvers on surface features.*
> *3. Good problem solvers are more aware than poor problem solvers of their strengths and weaknesses as problem solvers.*
> *4. Good problem solvers are better than poor problem solvers at monitoring and regulating their problem-solving efforts.*
> *5. Good problem solvers tend to be more concerned than poor problem solvers about obtaining "elegant" solutions to problem*

(Lester, 1994, s. 665)

Lester (1994) nämner också att övergången från att vara en sämre problemlösare till att bli en bra sådan kräver arbete under lång tid och att eleverna måste ges många tillfällen att få arbeta med matematiska problem.

2.4 Hur ser det ut i svenska gymnasieskolor

Skolinspektionen genomförde år 2016 en kvalitetsgranskning av hur svenska gymnasieskolor undervisar i kursen Matematik 3c. Granskningen omfattade 33 gymnasieskolor och på en tredjedel av dessa identifierades ett utvecklingsbehov rörande elevernas förutsättningar att arbeta med matematiska problem (Skolinspektionen, 2016). Deras kvalitetsgranskning visar också att flera lärare inte undervisar om problemlösningsstrategier och att undervisningen på de skolor som ansågs vara i behov av utveckling ofta präglas av lärarledda genomgångar följda av individuellt elevarbete. Samtidigt lyfter Skolinspektionen att *"Granskningen visar även att elever, när de ska arbeta med problemlösning, inte alltid möter och arbetar med matematiska problem såsom de definieras i styrdokumenten"* (Skolinspektionen, 2016, s.13). Skolinspektionen lyfter att många av uppgifterna lärarna presenterar som problemlösningsuppgifter är tydligt förankrade i det aktuella delområdet och därför snarare handlar om att tillämpa nyligen presenterade procedurer på en större uppgift. Det finns då för eleverna en någorlunda given lösningsmetod och problemlösningens utforskande karaktär försvinner. Generellt för dessa skolor är att läroboken styr undervisningspraktiken, där ett område presenteras och eleverna arbetar med uppgifterna från läroboken i takt med att nytt innehåll presenteras. Samtidigt ger flera av eleverna på dessa skolor uttryck för en snäv syn på vad problemlösning är för något, de uttrycker till exempel åsikter som att problemlösningsuppgifter är textuppgifter. Granskningen visade också att många av eleverna på skolor med utvecklingsbehov efterfrågade en undervisning som tydligare konkretiserar matematikens användning i verkligheten. De ville tydligare se vad matematiken som de lär sig faktiskt kan användas till.

I en läromedelsanalys av Brehmer, Ryve och Van Steenbrugge (2016) kategoriserades uppgifter i matematisk analys från tre olika läromedel efter Lithners (2006) modell för kreativt resonemang, se avsnitt 2.1. Kartläggningen visade att ungefär 5% av uppgifterna gick att klassificera som problemlösningsuppgifter och att 84,64% av de problemlösningsuppgifter som fanns i böckerna var placerade i slutet av varje kapitel. Brehmer et al. (2016) drar slutsatsen att matematiklärare måste komplettera matematikböckernas innehåll för att få ge eleverna förutsättningar att utveckla problemlösningsförmågan. Boesen, Helenius, Bergqvist, Lithner, Palm och Palmberg (2014) studerade hur lärare i svensk gymnasieskola implementerar ämnesplanen för matematik genom intervjuer, lektionsobservationer och enkätfrågor med nästan 200 verksamma lärare. Studien visade att det läggs mest tid, 79% av observerad lektionstid, på att ge eleverna förutsättningar att utveckla procedurförmågan och att detta huvudsakligen görs genom arbete i läroboken. En liknande studie av Palm, Boesen och Lithner (2011) syftade till att analyserade svenska lärarkonstruerade matematikprov utifrån Lithners (2006) modell för kreativt och imitativt resonemang. I jämförelse med uppgifter på nationella prov innehöll de lärarkonstruerade uppgifterna mycket färre uppgifter som kräver kreativt resonemang (36% för de lärarkonstuerade jämfört med 64% hos de nationella proven). Fokus låg istället på att testa elevernas imitativa resonemang i rutinuppgifter.

3 Metod

Då forskningsfrågan handlar om att studera lärares uppfattningar av, och förhållningssätt till, matematisk problemlösning syftar undersökningen till att kartlägga människors idéer, tolkningar och synsätt. Detta är svårdefinierade aspekter av individers livsvärld och således lämpar sig en kvalitativ ansats bäst (Kvale & Brinkmann, 2014). En välanvänd metodologisk ansats för kvalitativa studier är den så kallade *grundade teorin* som presenterades av Glaser och Strauss 1967. Grundad teori syftar till att genom ett induktivt arbetssätt formulera en empiriskt grundad teori (Kvale & Brinkmann, 2014). Metoden som bygger upp grundad teori är framtagen för att på ett integrerat sätt skapa nya teoretiska begrepp och kategorier som förklarar de fenomen som studeras (Strauss & Corbin, 1990). På så vis är det mätdatan som ligger till grund för de teorier eller modeller som skapas. Glaser och Strauss (1967) påpekar vikten av att särskilja grundad teori från andra metoder som försöker logiskt-deduktivt skapa nya teorier från redan existerande sådana. Undersökningen ska inte utgå från en redan bestämd teori utan arbetssättet med grundad teori syftar till att låta mätdatan själv vara jorden ur vilken nya teorier gror.

I följande stycken kommer grundad teori att presenteras, följt av en beskrivning av undersökningens metod i relation till datainsamlingen och analysprocessen.

3.1 Grundad teori

Arbetsprocessen är noggrant definierad för grundad teori och innehåller tydliga ramar för hur datainsamling och analys ska genomföras. Inom de givna ramarna finns viss möjlighet för variation och flexibilitet, men för att inte grundad teori som metod ska gå förlorad krävs att undersökningen ändå följer de huvudsakliga dragen (Strauss & Corbin, 1990). En av huvudaspekterna i grundad teori är att datainsamling sker parallellt med analysen (Glaser & Strauss, 1967). Under arbetsprocessen identifieras mönster i datan vilket leder till en förändring i hur analysen bör genomföras. Ny datainsamling behövs för att ytterligare studera de nyupptäckta mönstren och arbetet fortsätter med kontinuerlig samverkan mellan analys och datainsamling. Analysprocessen utgörs av att data kodas och koder ställs mot varandra, jämförs och undersöks i syftet att försöka skapa nya begrepp eller kategorier som representerar fenomenet som undersöks. Charmaz beskriver kodning som en process där företeelser i datamaterialet definieras och namnges: *"Coding is the pivotal link between collecting data and developing an emergent theory in the data and begin to to explain these data. Through coding, you define what is happening in the data and begin to grapple with what it means"* (Charmaz, 2006, s. 46). Kodningsprocessen genomförs kontinuerligt i relation till den framtagna datan. Färdiga eller preliminära koder och kategorier ska inte tas fram innan analysen för att ställas *mot* datan, utan kategorierna ska successivt genereras *utifrån* datan (Charmaz, 2006). Glaser och Strauss (1967) lyfter det konstanta jämförandet koder emellan, mellan koderna och de framväxande kategorierna och senare mellan kategorierna, som en av analysens viktigaste delar. Det är genom det konstanta jämförandet som nya begrepp, kategorier och hypoteser kan konstrueras.

Kodningsprocessen följer generellt två steg med tre typer av kodningsprocesser. Först en initial *öppen* kodning och en efterföljande *selektiv* kodning, mellan vilka en tredje, *axiell*, kodningsprocess kontinuerligt används. I en intervjustudie syftar den öppna kodningen kartlägga eller beskriva enskilda rader eller uttalanden i mätdatan och genom dessa erhålla nya insikter om vad mätdatan säger (Charmaz, 2006, Corbin & Strauss, 1990). Genom att jämföra koderna och söka efter likheter och skillnader kan koderna grupperas i kategorier och underkategorier. Den efterföljande selektiva kodningen är mer fokuserad då de mest betydelsefulla eller vanligast förekommande, initialt konstruerade, grupperna och koderna används för att sortera och integrera det nya datamaterialet. Detta gör att ny data enklare kan studeras i relation till det redan kodade materialet (Charmaz, 2006). I samband med att kategorier av koder konstrueras används en tredje kodningstyp, så kallad axial kodning. Denna kodningsprocess syftar till att relatera olika underkategorier till varandra genom att tydligt förankra dessa relationer i mätdatan och sammanställa dessa till större huvudkategorier (Charmaz, 2006). I samband med analysen formuleras olika hypoteser eller tidiga teorier som förklarar eller beskriver fenomenet som studeras. De nya teorierna som skapas undersöks vidare med ny datainsamling och detta fortlöper tills det uppstår en teoretisk mättnad. Denna mättnad kännetecknas av att ytterligare data inte längre genererar någon ny kunskap, samtidigt som ytterligare analys av de framtagna begreppen och teorierna inte längre ger upphov till några nya koncept (Corbin & Strauss, 2008). Glaser och Strauss (1967) beskriver det som att den framtagna teorin eller modellen i detta läget fyller den tänkta funktionen och svarar mot undersökningens syfte men påpekar att den framtagna teorin inte nödvändigtvis är den enda som kan besvara forskningsfrågan. Då den framtagna teorin eller modellen genererats i en tydlig närhet till det insamlade materialet och kontinuerligt testats i relation till såväl tidigare data som nyframtagen sådan så har teorin en hög giltighet, utan att den behöver vara allomfattande eller ensam i sin förklaring.

Användandet av ett teoretiskt ramverk skiljer sig för grundad teori jämfört med andra metodansatser. Ett på förhand konstruerat ramverk påverkar sättet som analysen sker och kan ge upphov till tolkningar av mätdatan som bygger på ramverkets förklaringsmodeller snarare än vad mätdatan faktiskt säger. Istället är det i stor utsträckningen den tidigare forskningen som fungerar som en referensram till de nya koncept som skapas under analysprocessen och det teoretiska ramverket är snarare något som utvecklas under arbetsprocessen än något som definieras innan (Charmaz, 2006).

3.2 Genomförande

All använd mätdata insamlades genom intervjuer. Sammanlagt genomfördes 5 intervjuer med olika gymnasielärare som varade i 25 - 45 minuter och spelades in för att möjliggöra en efterföljande transkribering. Vid transkriberingen låg fokus på att ordagrant återge intervjupersonernas svar och pauser har antecknats med utelämningstecken (...). Transkriptionen utelämnar paralingvistiska signaler som betoning av ord, minspel och kroppsspråk. Då frågorna förändrades i samband med det pågående analysarbetet skapades inte en övergripande intervjuguide, även om vissa frågor ställdes till alla intervjupersoner. Exempelvis frågades alla intervjuerpersoner om vad de anser kännetecknar ett matematiskt problem och vad de anser skiljer en bra problemlösare mot någon som inte är lika bra.

Efter transkription av en intervju kodades personens uttalanden och de konstruerade koderna skrevs ned separat. I samband med att mer data insamlades lades fler koder till och dessa kunde jämföras med varandra. Koderna placerades i större grupper för att tydliggöra hur intervjupersonernas uttalanden liknande och skiljde sig från varandra. En mer detaljerad beskrivning av analysarbetet ges nedan i avsnitt 3.3.

I resultatdelen (se avsnitt 4.) presenteras citat från intervjutranskriptionerna. Citat från alla intervjuer används men det preciseras inte vilket citat som kommer från vilken intervju. I återgivningen av lärarnas intervjusvar används en ellips omskriven av hakparenteser, *[...]*, för att representera delar av citaten som valts att utelämnas.

3.3 Analys och bearbetning

Den genomförda analysen följer huvuddragen för grundad teori som presenterats i avsnitt 3.1. De transkriberade intervjuerna analyseras initialt med en öppen kodning, där enskilda uttalanden sammanfattas och beskrivs med ett ord eller en kortare mening. Dessa tidiga koder samlas och jämförs genom att placeras i grupper som åskådliggör likheter och skillnader mellan lärarnas uttalanden. I samband med att mer data tillförs ökar antalet koder och dessa kan då jämföras med, och analyseras utifrån, de grupperingar som trätt fram från de tidigare analyserna. Allteftersom mer data läggs till skapas kategorier och underkategorier som förklarar skilda synsätt på problemlösning och visar på spänningar mellan dessa. Från dessa nya kategorierna kan sedan kärnkategorier skapas som leder över till en selektiv kodning. I samband med att kärnkategorier skapas kan de andra kategorierna ställas mot dessa samtidigt som ny mätdata analyseras i relation till kärnkategorierna. På så vis kan koder eller kategorier som inte har att göra med kärnkategorierna läggas åt sidan vilket leder till att analysen får ett smalare och mer avgränsat fokus. Den selektiva kodningen leder vidare in på analysens avslutande del av en mer teoretisk kodning som sammanställer vilka företeelser som faktiskt kommer att utgöra studiens resultat. I den teoretiska kodningen studeras de utvalda kärnkategorierna och deras underkategorier i syfte att identifiera typiska synsätt på problemlösning, där begrepp och kategorier delas in i en uppsättning av typer. Dessa typer beskrivs som innefattande av olika dimensioner som byggs upp av de olika underkategorierna. Ur den teoretiska kodningen växer sedan resultatet fram i form av en modell som svarar mot undersökningens frågeställningar.

3.4 Urval

Intervjupersonerna som deltagit i denna studie har valts ut genom ett bekvämlighetsurval av legitimerade gymnasielärare som undervisar i matematik. Intervjupersonerna arbetar på gymnasieskolor i Göteborgsområdet eller i gränskommuner till Göteborg och kontaktades via e-post. Bland intervjupersonerna finns en spridning i vilka program lärarna undervisar och hur länge de varit verksamma. Intervjupersonernas arbetserfarenheter varierar från att vara nyexaminerade till att ha arbetat inom gymnasieskolan i nästan 40 år.

3.5 Etiska principer

Undersökningen har genomförts i linje med Vetenskapsrådets riktlinjer för god forskningssed (Vetenskapsrådet, 2002). Intervjupersonerna har informerats om vad syftet med undersökningen är, hur informationen som ges vid deras eventuella deltagande kommer att bearbetas och hanteras samt att uppgifterna som ges vid ett eventuellt deltagande enbart används för studien och inga andra ändamål. Intervjupersonerna har informerats om att deltagandet är helt frivilligt och att ett deltagande inte på något vis innebär några skyldigheter att svara på alla intervjuns frågor. Intervjupersonerna informerades muntligt vid intervjutillfället att det är fullt tillåtet att stå över frågor eller att i efterhand ta tillbaka gjorda utlåtanden. Skulle en intervjuperson vilja ta tillbaka ett uttalande eller ångrar sitt deltagande så ska denne person kontakta intervjuaren varpå all erhållen data från intervjutillfället raderas och tas ut ur studien. De transkriberade intervjuerna anonymiseras på så vis att alla uppgifter om namn, arbetsgivare och geografisk skolplacering tas bort och används inte heller i studiens resultat för att minimera risken för bakvägsidentifiering.

4 Resultat

I analysen kunde två skilda synsätt på problemlösning identifieras. Det ena synsättet, typ 1, har valts att kallas *bunden problemlösning* och typ 2 för *obunden problemlösning*. Synsätten uttrycker sig genom att det existerar skiljaktigheter, spänningar, mellan de två synsätten i 6 olika aspekter. Dessa aspekter och en kort sammanfattning illustreras i Figur 2 (se sida 27). De två synsätten utgörs inte av två motpoler utan vissa likheter finns mellan de två typerna och för vissa av aspekterna kan det ena synsättet istället utgöra en snävare och mer enkelspårig tolkning av det andra synsättet. Det är alltså inte ett strikt dikotomiskt förhållande dem sinsemellan och modellen försöker inte beskriva faktiska lärare. Snarare ska de två synsätten ses som arketyper, där praktiserande lärare uttrycker delar från respektive synsätt och har ett eget förhållningssätt till matematisk problemlösning.

Efterföljande resultat är strukturerat så att det första synsättet, bunden problemlösning, presenteras i sin helhet i relation till de olika aspekterna. Därefter följer en liknande presentation av synsätt 2, obunden problemlösning. Resultatet avslutas med att kartlagda synsätt gällande bedömning av problemlösning och komplexiteten av problem beskrivs separat då dessa synsätt inte varit förenliga med varken synsätt typ 1 eller typ 2.

4.1 Synsätt typ 1 - bunden problemlösning

Förhållningssättet *bunden problemlösning* ser matematiska problem som uppgifter där eleverna får testa sina kunskaper om ett aktuellt område. De uppgifter som används som problem kännetecknas av att de kräver översättning för att lösas. De presenteras i en kontext där det inte är tydliggjort hur de ska lösas och kräver att eleven först försöker formulera problemet matematiskt innan eleven väljer ut rätt procedurer för att komma fram till en lösning. Innan eleverna kan öva sig i att lösa problem måste de först lära sig procedurerna och på så vis grundas problemlösningsförmågan i hur väl eleven utvecklat procedurförmågan. På grund av detta blir problemlösning svårt för elever som inte bemästrat procedurer och att arbeta med problem anses vara sekundärt till arbete med rutinuppgifter där eleverna ges möjlighet att utveckla procedurförmågan. I efterföljande avsnitt kommer de olika aspekterna av synsätt typ 1, bunden problemlösning, att beskrivas mer ingående och exemplifieras med citat från intervjutranskriptionerna.

4.1.1 Problemlösning som översättning

Det finns en syn på problemlösning som en process där eleverna måste översätta en form av problemsituation, gärna i text, till en matematisk kontext varpå eleverna måste välja rätt verktyg ur verktygslådan. Problemlösning handlar således om att arbeta med uppgifter som inte är formulerade i en direkt matematisk kontext. Problemlösningsarbetet kännetecknas då av översättning och abstraktion. Det krävs att eleven översätter en text eller information till ett matematiskt sammanhang och därpå tillämpar en given procedur för att få fram svaret. Problemlösningsförmågan beskrivs då som en förmåga att översätta.

> *[...] att det är förmågan att översätta en kontext, ett sammanhang, en situation, till matematik.*

Problemlösning ses här som ett sätt att integrera modellering med problemlösning, där eleverna får arbeta med att tolka en realistisk situation och beskriva det matematiskt.

[...] jag tänker nog att ett matematiskt problem är en form av applicering av ett verkligt problem.

4.1.2 Verktygsberoende förmåga och kontextspecifik undervisning

Enligt synsätt typ 1, där problemlösning ses som att översätta ickematematiska situationer till en matematisk kontext, ses också problemlösningsförmågan som *vektygsberoende*. Efter att problemformuleringen tolkats och översatts ska problemlösaren välja ut rätt metod eller procedur och använda denna för att få ett svar.

[...] förstå att en i en given problemsituation ska man liksom lyfta fram det här verktyget.

Problemlösning blir här kopplat till ett specifikt centralt innehåll och problemuppgifterna syftar till att testa elevernas förståelse av de procedurer som presenterats inom det aktuella momentet.

När vi väl har lärt oss procedurerna och begreppen så använder vi dessa för att lösa problem.

Besitter inte eleven tillräckliga procedurella kunskaper för att använda de aktuella metoderna hindras problemlösningen. En stor del av undervisningen fokuserar på att träna eleverna i att arbeta med procedurer och det finns en syn på att grunderna "måste sitta" innan eleverna kan gå över till att arbeta med problem.

[...] man lägger väldigt mycket tid på att eleverna ska göra rutinuppgifterna, standarduppgifterna, och sen när man fått ihop alla verktyg så ska man någonstans lösa ett problem med sina verktyg.

4.1.2.1 Undervisningen strävar mot problemlösning

[...] det testas som det sista momentet i ett område.

Lärare av synsätt typ 1 ser problemlösning som någonting man strävar mot inom varje moment. Då eleverna inledningsvis behöver lära sig metoder och procedurer för att sedan kunna tillämpa dessa på problem så blir problemlösning ett område som kommer sent i varje delmoment och något som eleverna måste förberedas för.

4.1.3 Elever har svårt för problemlösning

Problemlösning beskrivs här som någonting som eleverna har svårt för och som riktar sig till de mer högpresterande eleverna i en klass. I och med att problemlösningen blir en påbyggnad av deras procedurella kunskaper är dessa i viss mån en förutsättning som krävs. Sitter inte grunderna kan man inte fortsätta med de svårare problemlösningsuppgifterna.

Möter ofta ganska mycket motstånd. 'Måste vi det här? Kan vi inte hoppa över det här? Jag fattar ingenting'. De har liksom svårt att tolka texterna och se hur de ska kunna applicera de kunskaper vi har.

Lärarna pratar mycket om en rådande elevsyn, där elever är vana vid att det ska gå snabbt när man räknar matematik. De är vana vid att arbeta med rutinuppgifter där de direkt vet vad uppgiften är ute efter och kan använda en känd metod och snabbt kolla i facit om de gjort rätt. När uppgifterna inte längre ser ut på det sättet känner de sig ovana och de vill hellre fortsätta att arbeta med rutinuppgifter.

[...] när de räknar uppgifter i boken då vill de kolla i facit och det ska gå väldigt snabbt.

De elever som är duktiga i matematik och är säkra i sitt användande av procedurer har också lättare för problemlösning och motsätter sig det inte lika tydligt. Motsättningarna finns huvudsakligen hos de som vanligtvis är svaga i matematik och inte är lika säkra på att hantera procedurer.

[...] man nästan ser på hela kroppsformen att de inte vill vara där.

Det beskrivs också en syn att elever ibland är oförstående om skillnaden mellan de olika förmågorna. Att eleverna ser problemlösning som något svårare än rutinuppgifter, men inte som en egen förmåga i sig.

[...] de har nog svårt egentligen att särskilja det från vad är procedur och vad är begreppsförståelse. Vad är det liksom? Jag tror det, att de ser det som att matematik, jag är bra på matematik eller så är jag inte bra på matematik.

4.1.3.1 Kvalitet av problemlösare

Det som synsätt typ 1 beskriver kännetecknar starka problemlösare är att de besitter en stor verktygslåda, att de med säkerhet behärskar många olika procedurer. Svaga problemlösare begränsas istället av att de inte är tillräckligt bekväma i sitt användande av procedurer. De har svårt att översätta text till en matematisk kontext och kan också ha sämre läsförståelse.

Har en ganska liten verktygslåda. Har en kanske dålig läsförståelse. Svår att översätta det till matematiska då.

Samtidigt ses elever som har svårt för problemlösning som mer låsta vid det procedurella arbetet och är vana vid att arbete med matematikuppgifter ska gå snabbt.

En mindre bra problemlösare vill stressa igenom hela uppgiften, hoppar över steg, gör ofta slarvfel.

4.2 Synsätt typ 2 - obunden problemlösning

Kännetecknande för detta synsätt är att problemlösning inte är bundet till en viss plats i undervisningen. Problemlösning ses som en naturlig del av allt matematiskt innehåll och eleverna behöver få stöta på matematiska problem av olika slag vid flera tillfällen. Beskrivningen av vad ett matematiskt problem är ligger i linje med vad forskningen säger och problemlösningsförmågan anses vara en isolerad förmåga som inte beror på den procedurella förmågan. Som en följd av att problemlösning regelbundet återkommer, i inledningen till nytt innehåll, i slutet av ett innehåll eller i form av projektarbeten så genomsyras undervisningen av problemlösning. Undervisningen syftar till att vänja eleverna vid att arbeta med matematiska problem och göra dem medvetna om hur problemlösningsarbetet skiljer sig från arbete med rutinuppgifter. I kommande avsnitt presenteras hur detta synsätt uttrycker sig i de olika aspekterna.

4.2.1 Problemlösning som problemlösning

Ett matematiskt problem är en uppgift där det för problemlösaren inte är uppenbart hur lösningen ges, som kräver användande av olika problemlösningsstrategier och går ofta att lösas på flera olika sätt.

> *Till en början så handlar det nog om att man kanske inte riktigt vet hur man ska börja och lösa problemet utan man måste rita en bild eller skriva ner informationen. Oftast så kanske det går att lösa på flera sätt.*

Eleven måste arbeta utforskande och bearbeta den information som uppgiften ger för att ställa upp en plan för hur problemet ska tacklas.

> *Först är att man ska förstå problemet, då måste man kanske rita en bild, skriva ner informationen, försöka förstå vad det är man ska besvara för fråga liksom […] efter det så måste man göra någon form av plan liksom, man får tänka okej men nu har jag denna info, hur går jag vidare? [...] och sen då så när man vet att detta ska jag göra då ska man någonstans utföra sin plan [...] och sen när man kommer fram till sitt svar så får man någonstans tolka det. Och man ska titta tillbaka, kontrollera, man kollar tillbaka till frågan, kan jag besvara frågan. Är det rimligt? Kräver de ett svar i form av en formulering eller är svaret ett tal?*

Det räcker alltså inte att översätta problemet och sedan välja rätt metod. Under arbetsprocessen måste eleven reflektera över sitt val av metod och se om man rör sig i rätt riktning eller om man ska börja om och försöka med en ny metod.

4.2.2 Isolerad förmåga och holistisk undervisning

Här ses problemlösning som en förmåga som utvecklas oberoende av den procedurella förmågan. I likhet med det andra synsättet spelar procedurer en viktig roll i att kunna fullfölja sin lösning och nå ett svar på problemet. Skillnaden ligger i att själva problemlösningsförmågan är isolerad och grundas i hur man hanterar den okända problemsituationen.

[...] och det är någonstans ett holistiskt perspektiv. När du får ett problem, hur orienterar du dig i det?

I synsätt typ 2 ses inte att problemlösningsförmågan är beroende av procedurförmågan på samma sätt som synsätt typ 1 gör.

En elev kan vara väldigt duktig procedurellt, kan lösa jättesvåra ekvationssystem med tre obekanta och kan derivera den ena och den andra funktionen men när det kommer till problem [...] så kan det vara jättesvårt för då är det inte givet vad man ska göra,

Undervisning om problemlösning fokuserar här på allmän heuristik och problemlösningsstrategier. Modeller likt Pólyas eller Schoenfelds (se avsnitt 2.1) presenteras för eleverna och används regelbundet för att tydliggöra hur problemlösningsarbetet skiljer sig från mer procedurellt arbete.

Ja först så måste man ju gå igenom med dem till exempel Pólyas schema för hur man löser ett problem.

Generellt ligger det största fokuset på att elever själva ska reglera sitt arbete. De ska tolka uppgifterna, förstå vad som ska göras och undersöka om deras valda angreppssätt fungerar och en viktig uppgift för läraren är att visa att problem ofta kan lösas på flera olika sätt.

Visa på skillnader mellan problemlösning, gärna kontrastera tänker jag. Det finns olika sätt att gripa an ett problem. Man kan ju lösa problem genom att prova sig fram, en systematisk prövning. Man kan ju visa det generellt, algebraisk metod. Det tänker jag är ett sätt att man kan träna den förmågan, visa att det finns olika vägar att gå här, att lösa det på något sätt.

4.2.2.1 Undervisningen genomsyras av problemlösning

Istället för att undervisningen ska leda fram till att eleverna så småningom ska kunna lösa problem kännetecknas synsätt typ 2 av att problemlösning är ett moment som med enkelhet kan, och bör, integreras i alla stadier av undervisningen. Sådant arbete kan exempelvis uttrycka sig i längre problemlösningsorienterade projekt.

Ja men att man skulle starta kursen med att nu har vi ett problem här och nu ska vi ta reda på hur vi ska lösa det. Och bygga en stor del av undervisningen på att vi har ett konkret problem och vad kan vi använda för modeller för att lösa det och måste vi lära oss en ny modell? Någon ny procedur? Ja då får vi göra det.

Problemlösningens roll blir då att ge en kontext till matematikämnet som behandlas samtidigt som arbetet utvecklar såväl problemlösningsförmågan som procedurförmågan.

4.2.3 Elever stimuleras av problemlösning

Utifrån synsätt typ 2 är det vanligare att lärare beskriver elevinställningen till problemlösning som mer positiv och att variationen hos elevers inställning inte är lika prestationsberoende.

[...] både låg- och högpresterande elever kan jag ha upplevt både såväl positiva som negativa. Så att det är nog ganska frikopplat från den faktorn känner jag.

Problemlösningsuppgifter beskrivs också oftare som ett roligt avbrott och att eleverna känner sig stimulerade av det öppna arbetssättet.

[...] många kan också tycka att det är ett roligt avbrott från de vanliga rutinuppgifterna och känna sig utmanade av det.

4.2.3.1 Kvalitet av problemlösare

Det som synsätt typ 2 menar särskiljer svaga problemlösare från starka är att svaga ofta har ett sämre matematiskt självförtroende. Då problemen kännetecknas av att det inte finns en tydlig väg framåt för eleven är det elevens ansvar att försöka hitta en väg. Detta förutsätter att eleven reflekterar över olika problemlösningsstrategier och testar olika metoder. Saknar eleven självförtroende kommer eleven aldrig till skott.

[...] det tror jag också handlar om matematiskt självförtroende. Duktiga elever vet att de kan detta och vågar testa. Medan sämre elever är rädda för att misslyckas igen.

Att faktiskt göra en ansats och påbörja en lösning är något som starka problemlösare gör i högre utsträckning.

Medan en bra problemlösare ofta känner igen något slags mönster i alla fall. Och tänker att okej men detta har jag typ sett förut och börjar testa. Okej nej det funkar inte, men aha jag kan göra såhär istället. Så att de vågar kasta sig in i det och testa, medan en dålig aldrig riktigt kommer till skott. Sitter och stirrar blint in i matteboken kanske.

Karaktäristiskt för synsätt typ 2 är att bra problemlösare ägnar mer tid åt självreflektion. De är i större utsträckning medvetna om att då metoden inte är självklar måste de också kritiskt reflektera kring sitt metodval. Sämre problemlösare beskrivs inte som lika flexibla i sitt arbete, de vill hitta rätt metod och använda denna. Om ingen hittas så löser de inte problemet.

4.3 Sammanfattning av synsätt typ 1 och 2

De beskrivna synsätten finns sammanfattade och återgivna i figuren nedan. Notera att varken beskrivningen av ett problems komplexitet eller synsätten som kallats *svarsorienterad* respektive *lösningsorienterad bedömning* (se avsnitt 4.4) inte är återgivna i figuren då de ej är förenliga med uppdelningen.

Typ 1: Bunden problemlösning	**Typ 2:** Obunden problemlösning
Problemlösning som översättning: Problemlösning handlar om att översätta ett problem till en matematisk kontext och välja rätt metod för att hitta en lösning.	**Problemlösning som problemlösning:** Problemlösning krävs då eleven utsätts för en problemsituation som eleven saknar metod för att lösa. Kräver ett utforskande arbetssätt och ett medvetet användande av problemlösningsstrategier
Verktygsberoende förmåga: Förmågan att lösa problem beror på den procedurella förmågan. Först lära sig metoder och därefter tillämpa dessa.	**Isolerad förmåga:** Heuristik och allmänna strategier är avgörande. Det viktiga är att kunna orientera sig i en problemsituation.
Kontextspecifik undervisning: Problemlösningsuppgifter anses vara lämpliga att introducera i slutet av ett specifikt moment. Fokus ligger på att välja rätt metod för uppgiften.	**Holistisk undervisning:** Fokus ligger på att lära eleverna att följa allmänna problemlösningsmodeller. Undervisa om strategier, resonera kring metodval etc.
Strävar mot problemlösning: Inom varje delmoment är målet att eleverna ska kunna tillämpa de presenterade metoderna på problemlösningsuppgifter.	**Genomsyras av problemlösning:** Problemlösning är en naturlig del av alla moment och tid ägnas åt problemlösning såväl tidigt som sent i delmoment.
Problemlösning svårt för elever: Då problemlösningen läggs sent i momenten och förmågan är beroende av hur mycket man hängt med i tidigare genomgångar blir problemlösning något som riktar sig mot högpresterande elever.	**Problemlösning stimulerande för elever:** Eleverna blir utmanade av problemlösning och det fungerar som ett roligt avbrott i arbetet med uppgifter i läroboken.
Svaga problemlösare: Har liten verktygslåda och har svårt att översätta textuppgifter till en matematisk kontext. **Starka problemlösare:** Översätter med säkerhet och har en stor verktygslåda.	**Svaga problemlösare:** Har dåligt matematiskt självförtroende och vågar inte börja på problemen. **Starka problemlösare:** Känner igen problemlösningsuppgifter och vet vad som förväntas av en. De vågar prova sig fram och ritar bilder.

Figur 2: Beskrivning av de två synsätten som identifierats

4.4 Bedömning av problemlösningsförmågan

Synen på hur problemlösningsförmågan bör bedömas skiljer sig åt mellan olika lärare. Två skilda synsätt har identifierats och definierats som *svarsorienterad* bedömning respektive *lösningsorienterad* bedömning. Notera att dessa skilda synsätt är följer samma linje som uppdelningen mellan bunden problemlösning och obunden problemlösning utan står utanför denna uppdelning.

4.4.1 Svarsorienterad bedömning

Vissa lärare ser att bedömningen görs strikt utifrån problemets karaktär. Löser eleven ett problem av komplex karaktär, då ligger eleven på A nivå och kan eleven bara lösa problem av enkel karaktär ligger eleven på E-nivå.

> *[...] om man kan lösa problemet som jag ställt till dom, löser man det fullständigt så är man på den nivån man förväntas. Asså jag behöver ju inte bedöma nyanser i svaret [...] så egentligen är det på ett sätt, har jag bara lyckats formulera ett problem på C-nivå och eleven löser det ja då är eleven bevisligen på den nivån. Så på ett sätt lättare att bedöma då.*

Problemuppgiften beskrivs då ha en inneboende komplexitet, åtminstone i relation till eleverna i en klass, och att ha löst problemet innebär att eleven har kommit fram till ett av läraren godkänt svar.

4.4.2 Lösningsorienterad bedömning

Andra lärare anser att elevens tankegångar i problemlösningsprocessen också ska tas i beaktning när en bedömning görs. Problemlösningsförmågan blir mer holistisk och handlar om hur eleven orienterar sig i ett problem, snarare än om lösningen är korrekt. Lärare tar hänsyn till gjorda ansatser och metodval och elevernas resonemang bakom dessa.

> *Har dom börjat någonstans? Har dom liksom gjort en ansats på något vis. Och sen har dom testat vidare, har det fungerat eller inte fungerat.*

Dessa lärare lägger också stor vikt vid att elevernas redovisningar, deras skriftliga kommunikationsförmåga, är avgörande för bedömningens validitet. Kan inte eleven åskådliggöra sin problemlösningsprocess saknas underlag för bedömning.

> *Men då måste man liksom att eleverna verkligen antecknar alla steg i sin, i sin tankebana. Annars så kan man inte bedöma hela problemlösningsprocessen.*

4.4.3 Komplexitet av problem

Det fanns en samsyn mellan lärarna angående progressionen från ett enkelt problem till ett komplext problem. Komplexa problem löses i flera steg, där eleven får använda flera olika procedurer eller föra flera resonemang.

> *[...] och då tänker jag att ett komplext problem består av flera delar. Du behöver göra flera saker för att du ska komma till svaret och lösa det här fullständigt liksom. Ett enkelt problem kanske kräver ett steg på något sätt.*

Enkla problem kräver färre lösningssteg och det är inte heller lika svårt att komma på hur problemet löses.

> *Säg att du, om man ska kombinera två metoder man känner till. Två procedurer man känner till, och liksom fundera ut att ja de här två procedurerna måste jag kombinera. Och att det inte är så svårt att komma på det, då är det väl ett enkelt problem ja.*

5 Diskussion

Studiens resultat kan sammanfattas i att undersökningen identifierade två skilda synsätt som lärare kan ha gällande matematisk problemlösning och två kring bedömning av problemlösningsförmågan. Dessa synsätt utgår från lärarnas tolkningar av styrdokumenten och deras allmänna uppfattning om matematikämnet som sådant. I följande avsnitt kommer metoden att problematiseras i relation till dess begränsningar och hur detta påverkat resultatets trovärdighet. Därefter följer en resultatdiskussion, ytterligare tankar om didaktiska lärdomar samt en kort kommentar om vidare forskning.

5.1 Metoddiskussion

Att datamaterialet samlades in från intervjuer med lärare har sina begränsningar. I ett samtal får deltagande parter sätta ord på sina åsikter och det finns inget sätt att säkerställa att intervjupersonernas uttryckta åsikter är deras faktiska sådana. Under ett samtal kan frågesvar tas ur luften, utan förankring i intervjupersonens faktiska uppfattningar, vilken kan resultera i att resultatet kartlägger åsikter som uttryckts i intervjuerna men som lärarna inte agerar efter.

Även transkriberingsprocessen kan påverka mätdatan i den bemärkelsen att en stor del av ett samtal sker med ickeverbal kommunikation och paralingvistiska signaler. Då dessa inte noterades i transkriberingen var det endast intervjupersonernas ordagranna formuleringar som låg till grund för analysen. Vilken påverkan detta haft på resultatet är svårt att avgöra, men min uppfattning är det inte har haft en negativ påverkan på resultatets trovärdighet. Intervjusvaren återges i den kontext där orden föll och deras betydelse fångas av transkriberingen.

Urvalet av intervjupersoner för undersökningen var relativt litet och variationen mellan intervjupersonerna låg. Alla var verksamma på stora kommunala skolor i Göteborgsregionen och att inkludera lärare från mindre skolor, privata skolor eller skolor utanför Göteborgsregionen skulle kunna ha gett studien en större bredd. Jag tror inte att detta på något sätt inskränker på giltigheten av studiens resultat, men den framställda modellen över lärares förhållningssätt till problemlösning skulle kanske kunna ha utvecklats om fler intervjuer genomförts. Då tolkningen av styrdokumenten görs av enskilda lärare och inte av huvudmän, så finns det anledning att tro att spridning i lärares tolkning av styrdokumenten är stor även inom mindre geografiska ramar och inom kommunala skolor.

En av utgångspunkterna för grundad teori är att den framställda teorin uttrycks i sin helhet först när analysen har nått en teoretisk mättnad, i den bemärkelsen att ny data inte längre tillför ny information (Corbin & Strauss, 2008). Jag kan inte påstå att den framtagna modellen över lärares förhållningssätt till problemlösning som presenteras i resultatet är fullständig, men jag vill ändå hävda att resultatets giltighet är hög och att de två framtagna synsätten existerar enligt hur resultatet framställer dem. Däremot kan jag inte med säkerhet hävda att ytterligare datainsamling inte skulle kunna ge upphov till en vidareutveckling av modellen. Kategorier som konstruerats men som åsidosatts i den selektiva kodningsprocessen kunde ha plockats upp om mer relevant data erhållits och på det sättet skapat ett mer fullständigt eller allomfattande svar på undersökningens frågeställningar.

5.2 Resultatdiskussion

Denna undersöknings resultat utgörs dels av identifierandet av två skilda synsätt, bunden problemlösning och obunden problemlösning, och dels en återgivning av lärares förhållningssätt till bedömning av problemlösning. I och med att modellen som beskriver de två synsätten, typ 1 och typ 2 (se figur 2) , inte täcker in lärares syn på frågor om bedömning kan vara en indikation på att modellen inte är fullständig, att det finns ett utvecklingsutrymme. Det görs inga anspråk på att modellen skulle vara fullständig, utan den ska enbart ses som en beskrivning av två synsätt som finns hos lärare, inte att dessa två är de enda som florerar.

5.2.1 Vad är problemlösning?

De två synsätten skiljer sig åt gällande synen på vad ett matematiskt problem är och vad begreppet problemlösning innebär. Synsätt typ 1, bunden problemlösning, har en syn på problemlösning som att det handlar om att ta en situation och översätta denna till en matematisk kontext, varpå eleven använder relevanta verktyg för att nå ett svar på problemet. På så vis riskerar läraren att problemen främjar en syn på matematiken som skild från originalkontexten, vilket liknar det synsätt som Lester (2013) kritiserar. Lester menar att matematiska operationer som lärs ut skilt från sina appliceringar riskerar att fostra en syn på matematik som något som existerar utanför vår faktiska verklighet. Elever som ofta möter uppgifter där de måste översätta en vardagssituation till en matematisk kontext riskerar att få en förstärkt bild av att matematiken inte utgör en integrerad del av vår vardag. Således går det att anta att Lester skulle ha invändningar mot hur lärare av synsätt typ 1 ser på problemlösning.

Synsätt typ 2, obunden problemlösning, har istället en bild av vad ett problem är som mer liknar den som ges av Skolverkets kommentarmaterial (2011a) och av forskningslitteraturen (Schoenfeld, 1985, Lester, 2013). Inom den obundna problemlösningen finns en större medvetenhet att vad som går att räknas som ett problem beror på vem som ställs inför uppgiften. Ett problem kräver att problemlösaren inte kan erhålla ett svar på uppgiften genom att tillämpa en given metod, utan lösningsprocessen kräver aspekter av utforskning eller användande av problemlösningsstrategier. Det är viktigt att påpeka att det inte råder en direkt motsättning mellan vad som inom bunden och obunden problemlösning räknas som ett matematiskt problem. Översättningsaspekten av ett problem motsätter sig inte synen som ges av typ 2, utan även inom detta synsätt *kan* en problemuppgift kräva översättning. Skillnaden ligger i att synsätt typ 2 inte begränsar sig till denna typen av uppgifter och att obunden problemlösning ställer högre krav på vad som faktiskt är ett problem. Således råder inte ett strikt dikotomiskt förhållande mellan synsätten i denna aspekt utan snarare är synsättet för bunden problemlösning en snävare och inte lika omfattande del av synsättet som ges av obunden problemlösning.

Forskningslitteraturen är tydlig med att karaktären på en uppgift, som antingen rutinuppgift eller problem, är individberoende och avgörs av vilka erfarenheter eller färdigheter som personen som ställs inför uppgiften har (Schoenfeld, 1985, Lester, 2013, Lithner, 2006) . Ändå råder det inte en samsyn mellan gymnasielärare om hur detta uttrycker sig i undervisningen. En möjlig anledning till detta kan vara hur Skolverket formulerar kunskapskraven. För kursen matematik 3b står det att elever för betyget E ska kunna lösa matematiska problem av enkel karaktär, och för betyget A att eleven kan lösa problem av komplex karaktär (Skolverket, 2011b). Av denna formulering ges möjligheten att tolka det som att en uppgift faktiskt har en inneboende egenskap som gör att det kan klassificeras som antingen ett enkelt eller ett komplext problem, och således också som antingen ett problem eller inte ett problem.

Kännetecknande för skolorna som Skolinspektionens (2016) studie ansåg ha ett utvecklingsbehov i undervisningen om problemlösning var att eleverna ägnade sig åt problemlösning i slutet av ett moment och att problemuppgifterna därför ofta var förankrade i de procedurer som nyligen presenterats och övats. Skolinspektionen (2016) hävdade att detta medför att uppgifterna förlorar sin problemkaraktär då det ofta finns någorlunda givna lösningsmetoder för eleverna. I och med att undervisning som presenterar problemlösning på ett sådant sätt ansågs vara i behov av utveckling känns det rimligt att anta att Skolinspektionen inte anser att ett sådant användande av problemlösning som tillräckligt. Man får också anta att Skolinspektionens syn på vad matematiska problem är för något väl representerar Skolverkets syn, vilket skulle indikera att även synsättet av bunden problemlösning därför också är bristfällig, då detta synsätt presenterar problemlösning på ett liknande sätt.

5.2.2 Problemlösning som mål eller medel för undervisning

Både lärare som har en bunden syn och de som har en obunden syn på problemlösning har inslag av problemlösning i sin undervisning. Däremot kan man urskilja en skillnad i hur de förhåller sig till styrdokumentens formulering om att problemlösning ska vara ett mål och ett medel för undervisningen. I synsätt typ 1 finns ett tydligt fokus på att problemlösning är ett mål. I synsätt typ 2 är problemlösning såväl ett mål som ett medel för undervisningen. Även om lärare som hyser en bunden syn på problemlösning är medvetna om att när elever arbetar med matematiska problem så integreras även de andra förmågorna, vilket kan ses som att problemlösningen då blir ett medel, så är det inte ett fokus på samma sätt som för lärare av synsätt typ 2. Lärare av synsätt typ 1 ser det mer som en konsekvens av problemlösning, en naturlig följd, att andra förmågor integreras. I en obunden problemlösningssyn syftar problemlösningsundervisningen till att utveckla elevens hela matematiska kompetens, vilket gör att deras undervisning om problemlösning lutar mer åt *problem based learning* och ligger mer i linje med Skolverkets (2011a) formuleringar om problemlösning som ett medel för undervisning.

Även om lärare av synsätt typ 1 har ett tydligare målfokus i sin problemlösningsundervisning missar de viktiga aspekter i hur sådan undervisning bör bedrivas. Undersökningen syftade inte till att kartlägga hur lärare faktiskt undervisar om problemlösning har det i resultatet uppdagats vad olika lärare anser vara viktigt i undervisningen vilket i viss mån kan anses fungera som en riktlinje för hur dessa lärare faktiskt bedriver sin undervisning. Lärare av synsätt typ 1 ser elevernas procedurella förmåga som starkt avgörande för deras problemlösningsförmåga och det låg ett tydligt fokus på att först lära ut metoder och procedurer innan eleverna fick tillämpa dessa på matematiska problem. Skolverket nämner att problemlösningsstrategier ska explicit undervisas om (Skolverket, 2011b) och Schoenfeld (2013) beskriver användandet av problemlösningsstrategier som direkt avgörande för problemlösning och lyfter att tydlig undervisning i hur dessa strategier fungerar och används ger positiva resultat på elevernas lärande (1980, 1982). Då lärare av synsätt typ 1, bunden problemlösning, ser att utvecklingen mot att bli bra problemlösare går via att lära sig många procedurer och inte via allmänna problemlösningsstrategier riskerar de att missa viktiga aspekter av problemlösningsundervisningen.

Synsätt typ 2, obunden problemlösning, ligger istället mer i linje med vad Skolverket och vad forskningen säger. Dessa lärare anser att det är av stor vikt att eleverna lär sig allmänna problemlösningsstrategier och tränas i att orientera sig i utforskande och öppna problemuppgifter. Då de vill att deras undervisning ska genomsyras av problemlösning, och inte bara presenteras i slutet av ett kapitel, finns det likheter med *problem based learning* (Savery, 2006) och hur Skolverket (2011a) beskriver problemlösning som medel. I detta synsätt finns också en tydligare beskrivning av att bra problemlösare ägnar sig mer åt metakognitiva resonemang, då de reflekterar om sina metodval och svarens giltighet. Dessa egenskaper nämner även Schoenfeld (2013, 2014) och Lester (1994) som viktiga och som kännetecknande för bra problemlösare och är en förutsättning för att vara flexibel som problemlösare. I Schoenfelds beskrivning av hur framgångsrika problemlösare arbetar med matematiska problem framgår det att dessa är flexibla, i den bemärkelsen att de inte väljer ett angreppssätt och håller sig till detta utan snarare varierar sitt sätt att arbeta i takt med att man kommer till nya insikter om problemet (Schoenfeld, 1992). De hoppar kontinuerligt mellan att analysera, planera, implementera och utforska problemet och det är alltså en tydlig skillnad i hur arbetsprocessen ser ut jämfört med arbete med rutinuppgifter. Det är således rimligt att anta att det ligger något i det som forskningen säger, att det är viktigt att elever får träna sig i att arbeta med problem för att då bli bekväma med detta icke-linjära, utforskande arbetssättet. Att lärare av synsätt typ 1 beskriver en negativ elevsyn på problemlösning kan mycket väl vara en konsekvens av att de inte får öva sig i att arbeta problemlösningsorienterat. Om fokus ligger på att arbeta med rutinuppgifter i böckerna indoktrineras eleverna i att matematik handlar om att snabbt välja rätt metod och på ett smidigt sätt få fram en lösning. Är eleverna vana vid att arbeta på det sättet är det naturligt att de blir ställda mot väggen av problemuppgifter, där de inte längre kan arbeta på samma sätt.

5.2.3 Elever och problemlösning

Om lärare har en otillräcklig syn på vad problemlösning är för något riskerar även dessa lärares elever att få en felaktig uppfattning. Om eleverna inte är medvetna om vad som kännetecknar problemlösning och problemlösningsarbetet är det svårt för dem att utveckla den förmågan. Risken blir då, som flera lärare medgav, att eleverna tycker det är svårt och är motvilligt inställda till problemlösning för de är vana vid att arbeta i boken, vana med att det ska gå snabbt att räkna matte. Det är också problematiskt att lärare anser att problemlösningsförmågan är så starkt beroende av eleverna procedurella kompetens. Om undervisningen baserad på att eleverna först ska bemästra olika procedurer och därefter arbeta med problemlösningsuppgifter där dessa procedurer ska tillämpas finns det en risk att de som har svårt för att lära sig procedurer hindras i att arbeta med problemlösning. Lärare av synsätt 1 uttrycker idéer som *grunderna måste sitta* vilket riskerar att leda till att elever som inte presterat väl inom ett visst kapitel kanske inte ges tillfälle att arbeta med problemuppgifter, för de måste först lära sig rätt procedurer. På så vis ges inte alla elever samma förutsättningar att utvecklas i riktning mot målen.

5.2.4 Bedömning av problemlösningsförmågan

Synen på bedömning av problemlösningsförmågan skiljer sig åt beroende på lärarens syn på problemlösning. Skolverket (2011b) kontrasterar tre nivåer av problem i kunskapskraven. Enkla problem, problem och komplexa problem, som alla kräver tolkningar på olika svårighetsnivåer samt användandet olika antal matematiska begrepp. Vissa lärare ser att bedömningen görs strikt utifrån problemets karaktär. Löser eleven ett problem av komplex karaktär, då ligger eleven på A nivå. Hur eleven gick tillväga är inte det centrala. Andra lärare lägger stor vikt vid att kunna se hur eleven gjort för att lösa problemet, för att då kunna urskilja metodval och genomföra resonemang. De ser således att elevens ansats till en lösning också är ett underlag för den summativa bedömningen. Det finns här en koppling till Skolverkets kunskapskrav rörande problemlösning, och vilka ord därur som läraren lägger mest fokus på. Ta kunskapskravet för betyget E i Matematik 3b till exempel. En formulering lyder enligt följande: *"Eleven kan formulera, analysera och lösa matematiska problem av enkel karaktär"* (Skolverket, 2011b, s. 22). Lärare kan här läsa in att så länge eleven kan *lösa* enkla problem har eleven uppfyllt detta krav, att värdet ligger i själva ordet *lösa*. Samtidigt skriver Skolverket att *"Eleven kan med enkla omdömen utvärdera resultatets rimlighet samt valda modeller, strategier och metoder"* (2011b, s.21) och de lärare som uttrycker vikten av att i bedömningen kunna följa hela elevens lösning lägger ett större värde i denna formulering. Samtidigt skriver Skolverket i sitt kommentarmaterial följande: "*att lösa problemet innebär att genomföra ett resonemang där grunderna för resultatets giltighet blir tydligt och resultatet korrekt"* (Skolverket, 2011a, s. 2). Således kan tolkningen att lösningen på ett problem enbart beror på svaret vara direkt felaktig.

Dessa två skilda synsätt anses inte vara förenliga med uppdelningen av bunden och obunden problemlösning och återfinns därför inte i figur 2. Att det existerar två skilda sätt att se på hur problemlösningsförmågan bedöms anses ändå vara av relevans i relation till undersökningens syfte och är därför ändå med i studiens resultat.

Intressant är också att lärarnas beskrivningar om vad som avgör komplexiteten av ett matematiskt problem tydligt överensstämmer för alla intervjuade lärare, men ingen ser på det på samma sätt som Lester (2013). Ingen lyfte att komplexiteten skulle avgöras av i vilken utsträckning eleven måste ägna sig åt reflektion och självreglering. Istället ser alla komplexitet som en konsekvens av att uppgiften består av flera delar, och att problemlösaren måste lösa uppgiften i flera steg.

5.3 Didaktiska konsekvenser

Att undervisa i och om problemlösning är ett uppdrag som åligger alla matematiklärare på gymnasiet och efter denna genomförda studie är det tydligt att lärare förhåller sig olika till vilken roll problemlösning har i klassrummet. Med tanke på vad som nämnts tidigare i diskussionen om att det bundna problemlösningsförhållningssättet (synsätt 1) har sina brister kan det anses vara fördelaktigt om skolor, lärarutbildningar och verksamma gymnasielärare försökte främja en syn på problemlösning som ligger närmare den av synsätt 2, obunden problemlösning. Den genomförda undersökningen gör inga anspråk på att beskriva hur de olika synsätten uttrycker sig i undervisningspraktiken, men som tidigare nämnt kan lärares synsätt ses som en riktlinje för hur de väljer att undervisa. I och med att obunden problemlösning har vissa likheter med hur problem based learning ser på matematiken finns det möjligheter att lärare av typ 2 faktiskt skulle bedriva en undervisning som har en positiv effekt på elevers inställning till matematikämnet som en mer dynamisk och utforskande vetenskap (Schettino, 2016, Demirel & Dagyar, 2016). Detta är däremot långsökta kopplingar som bygger på att lärarens syn på problemlösning kommer i uttryck i hur denne undervisar och att det då skulle finnas likheter med specifik undervisningsmetodik som observerats ha gynnsamma effekter på elevers lärande. En kanske viktigare lärdom att ta med sig från undersökningen är kännedomen om att det hos gymnasielärare florerar motsägande eller åtminstone alternativa synsätt på vad problemlösning är för något. Ska produktivt kollegialt arbete existera på en skola är det viktigt att lärare förklarar sina tolkningar av styrdokumenten för varandra och diskuterar sina förhållningssätt med varandra. Att det finns så skilda sätt att tolka styrdokumenten på är en tydlig indikator på att de är svåra att förstå, och att deras formuleringar ger utrymme för alternativa tolkningar.

5.4 Vidare forskning

Alla verksamma gymnasielärare ska själva tolka styrdokumenten och därefter lägga upp en egen undervisningspraktik. De nuvarande formuleringarna i läroplanen och i ämnesplanerna ger lärare ett stort tolkningsutrymme och man kan inte anta annat än att det är ett medvetet val Skolverket gjort. Däremot finns det med säkerhet en bakomliggande idé om grundläggande aspekter av undervisningen som skall finnas med för att alla elever ska ha en likvärdig skolgång. För att främja detta publicerar Skolverket regelbundet allmänna råd och stöddokument som lärare kan ta hjälp av i sin tolkning av styrdokumenten. Ytterligare studier av liknande karaktär som denna kan ge Skolverket en indikation på vilka tolkningar som görs av verksamma lärare och på så vis åskådliggöra problematiska sådana. Det skulle i sin tur ge Skolverket data att utgå ifrån när de väljer att publicera nytt stödmaterial. Enkelheten i denna undersöknings omfattning har lett till att endast två skilda synsätt på området av problemlösning identifierats, men fortsatta studier hade säkerligen lett till att fler identifierats eller att de här framtagna kunnat utvecklas.

Det hade också varit av relevans att genomföra liknande studier fast om andra matematiska aspekter än bara problemlösning. Genom att kvalitativt undersöka lärares förhållningssätt till de olika förmågorna hade man kanske kunnat få en överblick kring varför undervisningen i Sverige har ett så tydligt procedurellt fokus (Boesen, Helenius, Bergqvist, Lithner, Palm & Palmberg, 2014).

Vad denna studien missar är hur lärare av olika förhållningssätt faktiskt implementerar problemlösning i undervisningen. Detta hade också utgjort en intressant vidareutveckling av resultatet från denna studie, att kartlägga hur lärares syn på problemlösning uttrycker sig i undervisningen. Genomförandet av en sådan kartläggning hade krävt en annan form av metodansats med lektionsobservationer istället för intervjuer och det var därför inte aktuellt att studera den frågan.

5.5 Slutsatser

Avslutningsvis vill jag återkoppla till studiens frågeställningar.

- Hur förhåller sig gymnasielärare till matematisk problemlösning?
- Hur tolkar gymnasielärare styrdokumentens angivelser rörande problemlösning?

Hur faktiska gymnasielärare förhåller sig till problemlösning skiljer sig åt från lärare till lärare, och likadant för hur lärare tolkar styrdokumenten. Däremot kan resultatet från denna undersökning beskriva två olika sätt gymnasielärare kan förhålla sig gentemot problemlösning, och kan därför hjälpa till i att förklara hur olika lärare hanterar problemlösning i klassrummet. Det är viktigt att typerna inte ses som beskrivningar av riktiga lärare, utan som arketyper som identifierats i materialet. Verkligheten är mycket mer nyanserad än vad mitt resultat försöker måla upp, men en grov kartläggning av olika förhållningssätt har ändå ett värde i det att det åskådliggör vilka olika synsätt som finns.

6 Referenser

Barrows, H. (2002). Is it Truly Possible to Have Such a Thing as dPBL?. *Distance Education, 23*(1), 119-122.

Boesen, J., Helenius, O., Bergqvist, E., Bergqvist, T., Lithner, J., Palm, T., & Palmberg, B. (2014). Developing mathematical competence: From the intended to the enacted curriculum. *Journal of Mathematical Behavior, 33*, 72-87.

Brehmer, D., Ryve, A., & Van Steenbrugge, H. (2016). Problem solving in Swedish mathematics textbooks for upper secondary school. *Scandinavian Journal of Educational Research, 60*(6), 577-593.

Charmaz, K. (2006). *Constructing Grounded Theory.* London: SAGE Publications

Charles, R., Lester, F., & O'Daffer, P. (1987). How to evaluate progress in problem. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Corbin, J., & Strauss, A. (1990). Grounded Theory Research: Procedures, Canons, and Evaluative Criteria. *Qualitative Sociology, 13,*(1), 3-21.

Corbin, J., & Strauss, A. (2008). *Basics of qualitative research (3rd ed.): Techniques and procedures for developing grounded theory* . Thousand Oaks, CA: SAGE Publications, Inc.

Demirel, M., & Dagyar, M. (2016). Effects of problem-based learning on attitude: A meta-analysis study. *EURASIA Journal of Mathematics, Science & Technology Education, 12*(8), 2115-2137.

Glaser, B., & Strauss, A. (1967). *The Discovery of Grounded Theory: Strategies for Qualitative Research.* New Brunswick, N.J: Aldine Transaction

Lester, F. K. (1994). Musings about mathematical problem-solving research. *Journal for Research in Mathematics Education. 25*(6), 660-675.

Lester, F. K. Jr. (2013). Thoughts About Research On Mathematical Problem- Solving Instruction. *Mathematics Enthusiast. 10*(1), 245-278.

Lithner, J. (2006). A framework for analysing creative and imitative mathematical reasoning. Department of Mathematics and Mathematical Statistics. Umeå

Lithner, J. (2008). A Research Framework for Creative and Imitative Reasoning. *Educational Studies in Mathematics, 67*(3), 255-276.

Palm, T., Boesen, J., & Lithner, J. (2011). Mathematical Reasoning Requirements in Swedish Upper Secondary Level Assessments. *Mathematical Thinking and Learning, 13*(3), 221-246.

Pólya, G. (1957). *Problemlösnings - en handbok i rationellt tänkande.* Stockholm: Nordstedts Akademiska Förlag.

Savery, J. (2006). Overview of Problem-Based Learning: Definitions and Distinctions. *Interdisciplinary Journal of Problem-based Learning*, *1*(1), 9-20.

Schettino, C. (2016). A framework for problem-based learning: Teaching mathematics with a relational problem-based pedagogy. *Interdisciplinary Journal of Problem-Based Learning, 10*(2), 1-27.

Schoenfeld, A.H. (1980). Teaching Problem-Solving Skills. *The American Mathematical Monthly, 87*(10), 794-805.

Schoenfeld, A. H. (1982). Measures of Problem-Solving Performance and of Problem Solving Instruction. *Journal for Research in Mathematics Education*, *13*(1), 31-49.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical Problem Solving*. Orlando, FL: Academic Press

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. I D. Grouws (Ed.), *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York: MacMillan.

Schoenfeld, A.H. (2013). Reflections on Problem Solving Theory and Practice. *The Mathematics Enthusiast*, *10*(1/2), 9-34.

Schoenfeld, A.H. (2014). What Makes for Powerful Classrooms, and How Can We Support Teachers in Creating Them? A Story of Research and Practice, Productively Intertwined. *Educational Researcher*, *43*(8), 404-412.

Skolinspektionen. (2016). *Senare matematik i gymnasieskolan (matematik 3c).*

Skolverket. (2011a). Kommentarmaterial till ämnesplanen i matematik i gymnasieskolan. Hämtad från: https://www.skolverket.se/undervisning/gymnasieskolan/laroplan-program-och-amnen-i-gymnasieskolan/gymnasieprogrammen/amne?url=1530314731%2Fsyllabuscw%2Fjsp%2Fsubject.htm%3FsubjectCode%3DMAT%26tos%3Dgy&sv.url=12.5dfee44715d35a5cdfa92a3

Skolverket. (2011b). Ämnesplan för gymnasieskolan - Matematik. Hämtad från: https://www.skolverket.se/undervisning/gymnasieskolan/laroplan-program-och-amnen-i-gymnasieskolan/gymnasieprogrammen/amne?url=1530314731%2Fsyllabuscw%2Fjsp%2Fsubject.htm%3FsubjectCode%3DMAT%26tos%3Dgy&sv.url=12.5dfee44715d35a5cdfa92a3

Taflin, E. (2007). Matematikproblem i skolan : för att skapa tillfällen till lärande (Doktorsavhandling, Department of Mathematics and Mathematical Statistics). Umeå: Print & Media. Tillgänglig: http://urn.kb.se/resolve?urn=urn:nbn:se:umu:diva-1384

Vetenskapsrådet. (2002). *Forskningsetiska principer inom humanistisk-samhällsvetenskaplig forskning*. Stockholm: Vetenskapsrådet