GÖTEBORGS UNIVERSITET

ÄMNESLÄRARPROGRAMMET

VARIABELNS MÅNGFASETTERADE TVETYDIGHETER

En studie kring begreppets historia, elevers svårigheter och lärares möjligheter

Johannes Jitzmark

Ämneslärarprogrammet med inriktning mot arbete i gymnasieskolan

Självständigt arbete (examensarbete): 15 hp
Program och kurs: Ämneslärarprogrammet, LGMA2G
Nivå: Grundnivå
Termin/år: HT/2019
Handledare: Anna Holmlund
Examinator: Jan Stevens
Rapport nr: HT19-3001-002-LGMA2G

Nyckelord: Variabel. Obekant tal. Generellt tal. Variabelkonceptet. Problemlösning. Ekvationslösning.

Abstract

In this literature study I have sought answers to the following questions: “How did today’s variable categories come into existence?” and “What difficulties do today’s students face when working with variables and what possibilities do teachers have in dealing with those difficulties?” The questions originate from the fact that the algebraic variable is found in several different contexts. Contexts which are likely to contribute to confusion arising when students, and often even teachers, are asked to motivate what the variable stands for in a given problem. The three categories that are identified comprise the variable’s three most common areas of usage: variables as unknown numbers, variables as general numbers and varying variables.

This study starts off with a historical account on how today’s categories of the variable term came to form. It then brings attention to research conducted in different countries concerning common learner errors. Common difficulties include not accepting open expressions as answers, leading to a number of strategies being employed to eliminate operations from the expressions; dealing with variables in expressions and equations as if they were names or units; an inability to describe patterns using variables; and, perhaps most importantly, differentiating the different variable types.

Swedish high school teachers’ possibilities in dealing with the lattermost difficulty are shown to be limited to some extent by the directives of The Swedish National Agency for Education. However, firm knowledge and awareness concerning the variable types are nonetheless indicated as absolute necessities among teachers for students to learn effectively how to deal with variables in a seamless manner.

Förord

Arbetet med denna studie har på många sätt fördjupat min kunskap kring variabelns olika förekomster. Inte minst handlar det om den varierande variabelns typiska särdrag och dess särskiljning från variabler som generella tal, men även variabelns koppling till mängdläran och vilka begrepp som är mest lämpliga i vilka sammanhang. Allt detta och mycket mer utgör kunskap som jag ser fram emot att tilldela även mina framtida elever då de stöter på hinder som rör variabler, eller om de mot all förmodan helt enkelt vill veta mer om begreppet.

Jag vill passa på att tacka min handledare Anna Holmlund för hennes många tips och råd samt för hennes ständiga försök att få min text att gå från bra till ännu bättre. Denna studie hade kanske varit fullt möjlig utan hennes hjälp, men den hade då tveklöst varit sämre, tråkigare, mer spretig och mindre korrekt. Även min katt, Maja, förtjänar en omnämning för att ha varit vid min sida under större delen av arbetet och bidragit med moraliskt stöd de få gånger som motivationen sviktat.

Deras bidrag har inte gått obemärkta.

Johannes Jitzmark

Innehållsförteckning

Figurförteckning

1 Inledning

Variabeln förekommer i en mängd olika sammanhang inom matematikämnet. När sidlängden till ett kvadratiskt staket som inhägnar 625 m^2 ska beräknas används ofta variabeln x för att ange den sökta längden i våra uträkningar. När geometriska objekt av godtyckliga proportioner ska anges används ofta variabler som a, b, c, h och l för att beteckna diverse längder och ytor. När förhållandet mellan vikt och kostnad vid inköp av godis eller grönsaker ska beskrivas används ofta variabler som x och y för att visa på detta samband. Trots att alla dessa exempel visar på användningar av variabler kan variablerna emellertid knappast likställas med varandra. I det första exemplet kan x inte ens anta mer än ett värde, men faller ändå under samma benämning som övriga användningar av bokstäver som obestämda siffror.

Det som synliggjorts är de tre stora användningsområdena som variabler har i dagens klassrum. Nämligen variabler som obekanta tal, variabler som generella tal respektive varierande variabler. Den exakta kategoriseringen är emellertid, som det kommer visa sig, inte något som alla är helt eniga- eller ens medvetna om.

1.1 Syfte

Syftet med denna litteraturstudie är att redogöra för skillnaderna mellan variablerna i ovanstående användningsområden samt att svara på följande frågeställningar:

- Hur uppkom dagens kategorier av variabelbegreppet?
- Vilka svårigheter har dagens elever med variabler och vilka möjligheter har lärare att hantera svårigheterna?

För att uppnå dessa syften redovisas variabeltypernas historiska uppkomst samt en mängd studier utförda världen över som pekar på främst elevers men också lärares svårigheter med variabelbegreppet och på vad lärare kan göra för att hjälpa sina elever. Avsnitt har även tillägnats Skolverkets- samt ett fåtal läromedels hantering av variabeltyperna, och konkreta exempel på hur ekvationslösning och problemlösning med en variabel kan göras enklare för eleverna. Detta för att visa på lärares förutsättningar att hantera problemen och för att inte låta någon möjlighet att förenkla elevers arbete med variabler stå onämnd.

2 Bakgrund: En översikt kring variabelbegreppets hantering i styrdokument och läromedel

Skolverkets handläggning av variabelbegreppet ger ytterst tvetydiga intryck. Å ena sidan görs det klart i läroplanen för grundskolan (Skolverket, 2019a) att eleverna under årskurs 4–6 ska lära sig om ”[obekanta] tal och deras egenskaper samt situationer där det finns behov av att beteckna ett obekant tal med en symbol” (sid. 57). Det nämns även hur meningen av variabelns många användningar i olika sammanhang, så som i algebraiska uttryck, formler och ekvationer, ska redogöras under årskurs 7–9 (Skolverket, 2019a). Å andra sidan omnämns varken variabeltyperna eller variabelbegreppet någon gång i ämnesplanen för matematik på gymnasienivå, utöver en användning av begreppet obekanta tal som enbart förekommer en gång, under centralt innehåll för matematik 2c (Skolverket, 2019b).

Det framstår alltså som att eleverna redan väntas ha goda konceptuella kunskaper om variabler efter att ha genomgått grundskolan. Detta är emellertid ett antagande som deras egna rapport *Utökad undervisningstid i matematik* (Skolverket, 2012) inte stödjer. I rapporten bekräftas bland annat att svårigheter med att se variabler som tal istället för objekt och svårigheter med otillåtna förenklingar av uttryck innehållande additions-, subtraktions- och multiplikationsoperationer—som kommer att redogöras i senare avsnitt—är vanliga även bland svenska elever. Svårigheterna används dessutom som argument för att utöka undervisningstiden för matematikämnet i grundskolan, grundsärskolan, specialskolan och sameskolan, vilket visar på att Skolverket bör vara fullt medvetna om att dessa problem finns och borde tas på allvar.

Skolverkets antaganden gällande förkunskaper om variabeltyperna tycks även genomsyra ett antal svenska läromedel på gymnasienivå. En genomgång av tre läroböcker ur *Matematik 5000* serien (Alfredsson, Erixon & Heikne, 2011; Alfredsson, Bråting, Erixon & Heikne, 2012a, 2012b), anpassade efter kurserna matematik 1a, 2a respektive 2b, visar hur någon större särskiljning mellan variabeltyperna inte ges något nämnvärt utrymme. Förvisso används olika varianter av beteckningen obekanta, så som obekanta variabler, obekanta tal eller obekanta i sin enkelhet för att ange variabler som obekanta tal (Alfredsson et al., 2011; Alfredsson et al., 2012a, 2012b), men dessa benämningar undermineras av att de sker i vakuum – frånskilt varierande variabler. Dessutom särskiljs inte beroende variabler från oberoende, vilket möjligen är en följd av att Skolverket (2019b) inte heller krävt att dessa ska tas upp. En nyare lärobok från en annan serie, *Matematik origo 2a* (Gerholm, Skarp & Olofsson, 2019) gör emellertid denna särskiljning, men motivationen bakom förblir oklar.

Vad gäller svenska läromedel på grundskolenivå tycks däremot enighet råda kring vikten av att påpeka variabelns olika användningsområden; främst den stora skillnaden mellan variabler som obekanta tal och varierande variabler. Ett litet urval av svenska matematikböcker på mellanstadienivå (Björklund & Dalsmyr, 2016; Carlsson, Falck & Liljegren, 2012; Carlsson, 2015) använder sig genomgående av liknande beteckningar som Skolverket (2019a, 2019b) använder sig av. Begreppet variabel syftar då främst på varierande variabler samt variabler som generella tal, medan begreppet obekant syftar på variabler som obekanta tal. Dessutom gick två av böckerna igenom varierande variabler och variabler som obekanta tal i samma avsnitt, i vilka det förekom uppgifter vars tydliga syfte var att särskilja dessa variabeltyper från varandra (Carlsson, Falck & Liljegren, 2012; Carlsson, 2015). Detta genom att be eleverna att identifiera när variabeln kan anta olika värden och när den har ett bestämt värde som kan fastställas genom att utföra algebraiska uträkningar.

Sammanfattningsvis tycks grundskoleböcker alltså i större utsträckning vara tydliga i sin särskiljning av variabeltyperna än vad gymnasieböckerna är, medan det från Skolverkets håll ges tvetydiga signaler. En tvetydighet som yttrar sig genom att Skolverket förvisso identifierar att vanliga problem hos elever i andra länder även förekommer hos svenska elever (Skolverket, 2012) medan gällande ämnesplan för matematik på gymnasienivå knappt omnämner variabler överhuvudtaget (Skolverket, 2019b). Givetvis krävs stor försiktighet då slutsatser dras utifrån en sådan begränsad mängd läroböcker, men Skolverkets kanske vedertagna inflytande över läromedlen tycks ändå, trots denna brist, kunna urskiljas med all önskvärd tydlighet.

3 Metod

För att få svar på frågeställningarna har en litteraturstudie genomförts. Databaserna Google Scholar, Göteborgs Universitetsbiblioteks Supersök, ERIC och JSTOR har använts för att hitta texter och få full tillgång till dem. Vanligt förekommande var att Google Scholar användes för att finna intressanta artiklar som sedan titel-söktes på Supersök då de varit svårtillgängliga. Ett par artiklar hittades även via enkla Google-sökningar på intressanta källor som identifierats i diverse källförteckningar till litteratur som rekommenderats av handledaren.

Inte sällan resulterade användningen av ordet ”variable” i att tusentals irrelevanta sökresultat uppkom. Specificeringarna ”algebraic variable” och ”unknown variable” samt användning av orden ”mathematics” och ”teaching” utnyttjades då för att få ned siffran till några få hundra. En snabb överblick av dessa resultat utgjorde sedan grund för urval. Inga svenska sökord gav gynnsamma resultat.

Söktermer som använts med framgång i databaserna: history algebraic variables unknown, teaching unknown variables mathematics, algebra unknown variables mathematics

I sökningarna på Google ingick namn på författare, publikationsdatum, samt titel vid behov. En titelsökning av namnet al-Khwārizmī användes även på Supersök för att finna artiklar om honom.

De flesta av läroböckerna som refererats i bakgrundsavsnittet blev tillhandahållna av Nationellt Centrum för Matematikutbildning (NCM) som lät mig ta en titt på deras lärobokssamling. Ett fåtal lånades även på Chalmers bibliotek, varav en ingick i denna studie.

Anmärkning: Mycket av den forskning som redovisas i avsnitt 4.2 har haft helt olika utgångspunkter gällande syfte och metodik. Exempelvis fokuserar många av artiklarna på elever tillhörande specifika nationaliteter. Andra väger in sociokulturella faktorer och huruvida skolorna som eleverna går på är statliga eller privatägda i sina diskussioner. Detta är emellertid faktorer som inte uppfattats som intressanta för att uppnå syftet med avsnittet. Ett syfte som i sin enkelhet utgörs av identifiering av vanligt förekommande problem och svårigheter som lärare och elever på gymnasienivå stöter på vid inlärning av- och arbete med variabler, samt att finna metoder för att hantera svårigheterna. Av denna anledning ses alla redovisade upptäckter som relevanta utan att ha genomgått någon systematisk sortering efter land, ursprung eller andra tänkbara förutsättningar.

4 Resultat

Resultatdelen har två huvudsakliga uppdelningar. Den första av dessa tar upp variabelns historia utifrån de tre stora användningsområdena som exemplifierades i inledningsavsnittet. Den andra delen redovisar vilka utmaningar och möjligheter lärare står inför i samband med undervisning om variabler, där särskilt fokus riktas mot variabeltyperna, problemlösning samt ekvationslösning. Samtliga översättningar till det svenska språket är mina egna.

4.1 Den moderna variabelns historiska framkomst

I det här avsnittet redogörs den historiska framväxten av den algebraiska variabeln som vi stöter på i dagens läromedel. Detta görs genom att fokus riktas på variabelns olika användningsområden genom tiderna, även då variabeln själv ännu ej varit uppfunnen, för att följa dess konceptuella utveckling tills dess att något som liknar dagens användning uppnås. De tre stora användningsområdena som kommer belysas är: 1) variabler som obekanta tal, 2) variabler som generella tal samt 3) varierande variabler, där sorteringen kan anses vara både kronologisk och anpassad efter komplexitet.

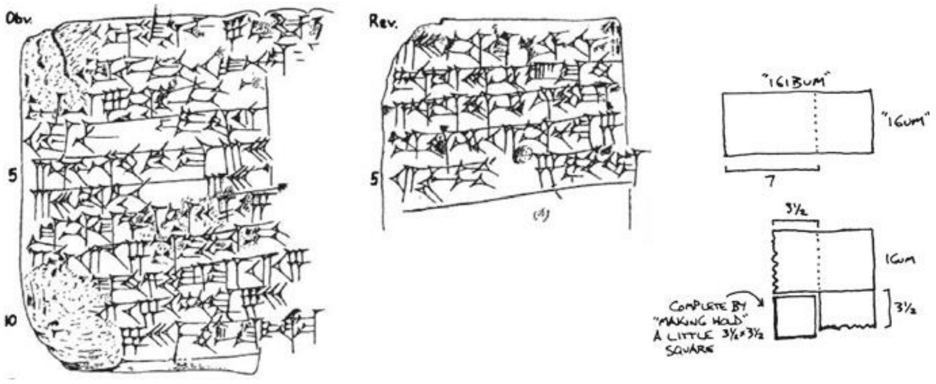
Förhoppningen med denna redogörelse är att den ska klarlägga några av de problem som matematiker stött på i takt med att matematiken gått från att vara mer verklighetsnära till att bli mer abstrakt. Det handlar om problem som ofta har sin grund i intuitiva resonemang och som därmed kan tänkas återfinnas även i elevers tankemönster i takt med att de ger sig på att avkoda- och försöka använda sig av variabeln som ett matematiskt verktyg.

4.1.1 Variabler som obekanta tal

Ca. 4000 år innan bokstäver användes för att beteckna sökta storheter i uträkningar inleddes den så kallade för-symboliska eran i Egypten och Mesopotamien (Sfard, 1995). Eran präglades av retorisk- och geometrisk algebra, där benämningar som ”längd” och ”bredd” ofta användes för att ange de kvantiteter som skulle beräknas (Sfard, 1995).

Ett synnerligen tidigt exempel på en uppgift där ett obekant tal ska beräknas utgörs av YBC 6967 (se Fig. 1), som ristades ca. 1900–1600 f.Kr. av Babylonierna (Ely & Adams, 2012). Det geometriska problemet som framförs motsvaras med dagens notationer av ekvationen $x^2 - 60 = 7x$ efter några omskrivningar[1], vilket visar på att lösningar till avancerade ekvationer, om än möjligen omedvetet, kunde erhållas redan då. Sökandet efter obekanta storheter givet vissa förutsättningar har alltså pågått i tusentals år, men de sökta värdena har då gått under godtyckliga beteckningar.

[1] HL anges som 7 i Ely och Adams (2012) artikel, men det är förmodligen ett misstag.



Figur 1: Tablett YBC 6967, följd av en illustration av den geometriska lösningsmetoden som lärs ut (Ely & Adams, 2012, sid. 24).

Diofantos var kanske först med att använda sig av bokstäver för att beteckna obekanta storheter. Redan under 200-talet valde han att beteckna sökta kvantiteter med grekiska bokstäver i sin bok *Arithmetica* (se Sfard, 1995). Det skulle dock dröja ända till 800-talet innan systematiska benämningar fått stort genomslag.

De första lyckade försöken att fastställa entydiga benämningar till sökta storheter som används i beräkningar finner vi i medeltida algebraiska matematikböcker från arabvärlden (se Oaks, 2007; Radford, 1995). Dessa böcker är retoriska—i linje med samtida traditioner—och använder sig av verbala resonemang istället för siffror och tecken, som förekom ytterst sällan (Oaks, 2007). Således används systematiskt ord som exempelvis ”sak” för att ange den sökta kvantiteten x, ”skatt” för att benämna motsvarigheten till x^2 och ”dirhemer” för att ange konstanter, även om benämningarna i någon mån varierade böcker emellan (Oaks, 2007). Översättningar till andra språk ledde till att detta system kunde spridas vidare till andra länder som exempelvis Italien. Där användes motsvarande ord för sak (la cosa) och skatt (census) i samband med att ekvationslösningar lärts ut (Radford, 1995; Ely & Adams, 2012). Dessa italienska begrepp förkortades så småningom till c respektive ce (Ely & Adams, 2012). Den tidigare förkortningen motsvarar alltså något som är mycket likt dagens användning av variabler som obekanta tal, vilket konkluderar detta avsnitt.

4.1.2 Variabler som generella tal

Även när matematiker under medeltiden haft som mål att lära ut lösningar till hela problemfamiljer har avsaknaden av variabler som generella tal medfört att konkreta exempel använts (Sfard, 1995). Ett exempel på detta påträffas i Diofantos tidigare nämnda verk *Arithmetica* i vilket det, med moderna benämningar, står att:

> För att finna två tal sådana att deras summa och produkt är givna tal:
> “Givet att summan är 20, givet att produkten är 96. 2x är differensen av de sökta talen. Därför är talen 10 + x, 10 - x. Som följd är 100 – x^2 lika med 96. Därmed är x lika med 2 och de sökta talen är 12, 8.” (refererad i Sfard, 1995, sid. 19)

Han börjar alltså mycket riktigt med ett generellt problem som ska lösas, men följer sedan upp med ett specifikt exempel där siffrorna är givna. Vad som saknas är alltså fullt utvecklade koncept och benämningar som skulle kunna användas för att med en och samma lösning visa hur man går till väga oavsett val av siffror.[2]

Euklides *Elementa*, skriven under antiken ca. 300 f.Kr, innehåller en av de tidigaste användningarna av något som liknar variabler som generella tal (Oaks, 2007; Sfard, 1995), och kan anses vara det första steget mot dagens användningar. I boken förekommer satser och bevis som använder sig av bokstäver för att beteckna godtyckliga storheter, som exempelvis Proposition VII.29 i vilken det står att: ”Låt A vara ett primtal, och låt talet B vara ett tal som ej är en multipel av A; jag säger att B, A är relativt prima” (Oaks, 2007, sid. 568). Faktumet att variabler som generella tal inte fick större genomslag förrän långt senare trots denna tidiga förekomst menar Sfard (1995) har att göra med ett bristfälligt funktionellt tänkande hos samtida matematiker. Ett tänkande där man behöver se ”hela talsläkten istället för specifika kvantiteter” (sid. 25).

Nästa steg togs i den retoriska algebran. Oaks (2007) kunde i sin studie om medeltida arabiska matematikböcker enbart finna ett fall där benämningen ”sak” användes för att beteckna ett generellt tal istället för ett specifikt obekant tal. Denna användning visade sig emellertid vara banbrytande. I sitt algebraiska bevis för den aritmetiska identiteten:

$$a + n\sqrt{a} = b - n\sqrt{b} \;\Rightarrow\; \sqrt{b} = \sqrt{a} + n, \quad a \neq b, \quad n \in \mathbf{N}\backslash\{0\}$$

använder sig Kāmil av uttrycket ”sak” vid ett flertal tillfällen för att beskriva a, b samt deras rötter trots att inga storheter är givna (Oaks, 2007). Ett nytt tankesätt har därmed uppenbarats där man inte längre behöver använda sig av specifika exempel för att visa generella principer.

Al-Khwārizmī förde detta koncept vidare ca. 813–833 genom att identifiera följande problemfamiljer (Radford, 1995, sid. 30):

Enkla fall:	$ax^2 = bx,$	$ax^2 = c,$	$ax = b$
Samman-satta fall:	$ax^2 + bx = c,$	$ax^2 + c = bx,$	$bx + c = ax^2$

Även här har alltså moderna notationer använts. Al-Khwārizmī kallade exempelvis det mellersta sammansatta fallet för ”skatter och tal är lika med saker” (Radford, 1995). När lösningarna till de sammansatta fallen presenterades använde sig al-Khwārizmī, liksom Diofantos, emellertid av konkreta exempel för att få fram sitt budskap (Usmanov & Hodjiev, 1998). Trots att problemfamiljerna identifierats saknades alltså fortfarande ett koncept för att räkna med obestämda storheter som om de vore givna.

Dagens historiker tycks vara eniga om att det slutgiltiga steget mot dagens användning av variabler som generella tal togs av Viète mot slutet av 1500-talet (Ely & Adams, 2012; Sfard, 1995). Under den tiden hade det blivit vanligt att använda bokstäver för att beteckna obekanta tal, vilket var en tradition som han ville behålla genom att framöver använda vokaler för att beteckna obekanta tal och konsonanter för att ange generella tal (Ely & Adams, 2012; Sfard, 1995). Det stora steget som Viète tog vara att förespråka att ekvationer i stil med $ax^2 + bx + c = 0$ bör lösas istället för enskilda fall med angivna värden för talen a, b respektive c. Detta då lösningen visar precis vad som händer med talen a, b och c, och alltså utgör en lösningsformel för samtliga fall i denna problemfamilj (Ely & Adams, 2012). Ovanstående

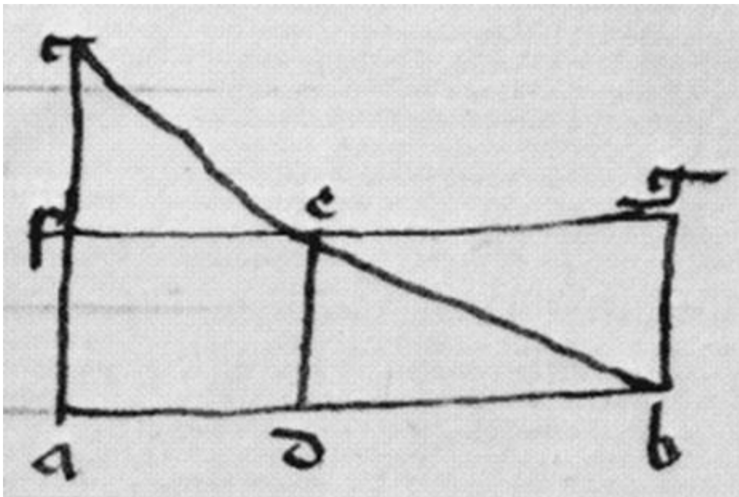
[2] För den intresserade läsaren finns en allmän lösningsformel i Appendix.

insikt beskrevs av Sfard (1995) som den sannolikt avgörande punkten som möjliggjorde variabelkonceptets uppkomst.

4.1.3 Varierande variabler

En mängd konceptuella genombrott behövde äga rum innan nutidens varierande variabel kunde etableras. Ett av dessa var Viètes användning av variabler som generella tal, som redovisats i föregående avsnitt, vilken bidrog till att bokstäver inte längre sågs som entydiga storheter. Resterande kommer att tas upp i detta avsnitt.

Ett nödvändigt genombrott rörde ”möjligheten att kvantifiera och representera kontinuerlig variation av en kvantitet i förhållande till en annan” (Ely & Adams, 2012, sid. 27). Framsteg inom detta område gjordes under 1300-talet av matematiker som Bradwardine och Heytesbury. Deras arbete ledde till uppdelningen av vad som idag benämns linjära och icke-linjära förändringar, vilka ofta representerades med svårföljda resonemang och få symboler och bilder (Ely & Adams, 2012). Under 1350-talet kom emellertid Oresme på idén att representera varierande kvantiteter med diagram (se Fig. 2).



Figur 2: Oresmes illustration av en linjär förändring. Här kan alltså punkten d jämföras med ett x-värde i ett koordinatsystem, medan längden från d till e kan jämföras med ett y-värde. (Hämtad från Ely & Adams, 2012, sid. 28.)

Trots denna illustration skulle det dröja ända till 1600-talet innan en varierande kvantitets förhållande till en annan kunde beskrivas med enbart symboler. Descartes och Fermat var båda först med att, oberoende av varandra, beskriva kurvor med hjälp av ekvationer innehållande variabler (Oaks, 2007; Ely & Adams, 2012). Oaks (2007) vill dessutom göra gällande att Descartes i sin bok *Geometry* ger de första exemplen på ekvationer som inte konstruerades för att lösas, då de istället enbart beskrev samband mellan kvantiteter. Dagens varierande variabel var alltså på god väg att kunna införas. Ett stort genombrott återstod emellertid.

En viktig skillnad mellan dagens varierande variabel och den som dominerade under 1600-talet—och länge därefter—åskådliggörs i samband med funktionskonceptet. Till skillnad från dagens synsätt, där varje tal i en definitionsmängd entydigt korresponderar mot ett tal i en värdemängd, beskrev funktioner ett dynamiskt samband mellan varierande kvantiteter (Domingues, 2003). Leibnitz och Newton hade detta dynamiska synsätt då de, oberoende av varandra, utvecklade konceptet om varierande variabler i samband med att de uppfann infinitesimalkalkylen (Philipp, 1992; Kilhamn, 2014; Domingues, 2003). Bland annat ledde detta till att de använde andra definitioner för gränsvärden än de som används idag, då det talades om variablers- eller kvantiteters gränsvärden istället för funktioners (se Domingues, 2003). Detta synsätt kännetecknades av en ständig underförstådd tidsaspekt, där rörelse längs en kurva på en graf medför att tid passerar. Ett exempel på detta ges av Définition I i l'Hospital (1696, citerad i Domingues, 2003, sid. 18): ”Storheter som ökar eller minskar kontinuerligt kallar vi varierande; och storheter som inte förändras då andra gör det kallar vi för konstanta.” Andra samtida definitioner ställde inte nödvändigtvis kravet att storheter ständigt ökade eller minskade utan att oscillera, men tidsaspekten var något som de alla hade gemensamt, och var något som förekom ända in på 1800-talet (Domingues, 2003).

Den dynamiska variabeln var dock inte obestridd. Euler förkastade tidsaspekten då han definierade en varierande storhet som ”en obestämd eller universell kvantitet, som i sig själv omfattar precis alla bestämda värden” (citerad i Domingues, 2003, sid. 20). Här gör sig emellertid avsaknaden av mängdlärans koppling till variabler känd då Euler, tidsenligt, likställer funktioner med varierande variabler och kräver att variablerna kan anta alla värden. Ett krav som exempelvis medför att y i sambandet $y = \sqrt{x}$ måste kunna anta imaginära värden för att sambandet ska kunna klassas som en varierande storhet (se Domingues, 2003). Eulers definition bidrog emellertid sannolikt till att inspirera definitionen som Cunha, kallad 1700-talets tveklöst viktigaste portugisiska matematiker (Domingues, 2003), förespråkade. Denna definition liksom Eulers förkastar tidsaspekten men tillåter emellertid att definitions- samt värdemängderna, och därmed storheterna, inskränks: ”Om ett uttryck kan anta mer än ett värde, medan ett annat bara kan anta ett värde, kommer det senare kallas konstant, och det tidigare variabel” (Cunha, 1790, refererad i Domingues, 2003, sid. 22). Dagens varierande variabel har alltså slutligen blivit uppnådd, då Cunha varken låter variabler begränsas av tid eller krav på att de ska kunna anta alla tänkbara värden.

4.2 Didaktiska utmaningar och möjligheter

I detta avsnitt belyses en mängd vanliga svårigheter som dagens elever står inför i samband med att de arbetar med variabler. Uppmärksamhet riktas även till en mängd strategier och riktlinjer som lärare rekommenderas efterleva för att, på bästa möjliga sätt, handskas med de problem som kan tänkas uppstå. Syftet med avsnittet är alltså att visa vilka förutsättningar som finns och vilka medel en matematiklärare i svenska skolor har att tillgå för att utföra sin yrkesroll i enlighet med vad forskningen inom detta område faktiskt säger.

En anmärkning rör begreppen i de olika artiklarna som refereras. Det finns många sätt att benämna och kategorisera de olika variabeltyperna i deras respektive användningsområden då matematiker ej uppnått en koncensus (Ely & Adams, 2012). För att underlätta överskådligheten har följande uppdelning valts i redovisningen, inspirerad av Ely och Adams (2012) samt Küchemanns (1978) kategoriseringar:

- *Variabler som obekanta tal*, vars möjliga värden kan fastställas med beräkningar. Exempel: variabeln *x* i ekvationer som:

  $x + 3 = 5,\qquad x^2 + 3x = 0,\qquad 3^x = 81,$

  $y = 3x + 1,\ -2 \leq y \leq 3,\ \ x, y \in \mathbf{R}$

  Det bör betonas att formuleringen alltså medför att exempelvis *x* i ekvationen:

  $x^2 + 3 = 0,\ \ x \in \mathbf{R}$

  likväl tillhör denna kategori trots att ekvationen saknar lösningar.

- *Variabler som generella tal*, där variabeln väntas ersättas med en entydig konstant ur en (ofta underförstådd) mängd. Exempel: *k* och *m* i den räta linjens ekvation (se nedan), samt *a*, *b*, *c*, *n*, och *r* i formlerna:

  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,\qquad 1 + 3 + 5 + \cdots + n = \left(\frac{n+1}{2}\right)^2,\qquad A = \pi r^2,$

  $ax^2 + bx + c = 0$

- *Varierande variabler*, som ingår i relationella samband och kan anta olika värden ur en given mängd. Exempel: *x* i den räta linjens ekvation, funktionen samt uttrycket nedan:

  $y = kx + m,\qquad f(x) = \sqrt{x + 2},\qquad x + 5,\qquad x \in \mathbf{R}$

  De relationella sambanden i fråga rör alltså *x* och *y*, *x* och $f(x)$ respektive *x* och ett underförstått värde som uppkommer då uttrycket används.

Förhoppningen med detta val av terminologi är att flera olika uttryck inte kommer att behövas för att beskriva samma sak, samtidigt som redovisningen av artiklarna blir mer sammanhängande.

4.2.1 Vanliga algebraiska fel: Beräkningar och generaliseringar med variabler

En viktig sak att ha i åtanke när vanliga algebraiska fel på gymnasienivå analyseras är hur bristfälliga förkunskaper gällande bland annat ekvationslösningar, olikheter och algebraiska manipulationer kan ha stora konsekvenser på längre sikt (se Pournara, Hodgen, Sander & Adler, 2016). Av denna anledning läggs mycket fokus på enklare kunskaper som i själva verket lärs ut på högstadiet, eller så tidigt som på mellanstadiet, trots att det i regel alltså är elever på nivåer motsvarande gymnasiet som undersöks. Med det sagt inleds avsnittet med ett exempel som jämför kunskaperna hos samma elever under deras skolgång från årskurs 9 till årskurs 11.

Några vanligt förekommande svårigheter som elever på högstadiet har med sig till gymnasiet identifieras av Pournara et al. (2016), som i deras studier med Sydafrikanska elever observerat att:

> The most common errors involve conjoining and premature closure, negatives and subtraction, multiplication and indices, the equality relationship and evaluating letters rather than accepting an open expression as a final answer. (sid. 5)

Detta illustreras tydligt i deras tabeller som bland annat visar att om $e + f = 8$ så tror en stor andel att $e + f + g$ kan likställas med $8g$ (se Fig. 3) vilket alltså utgör exempel på ovannämnd ”conjoining.” Ännu vanligare är antaganden att $e = f = g = 4$, alternativt att g, i egenskap av att vara en variabel, kan anta värdet 1 (Küchemann, 1978; Pournara et al., 2016) vilket resulterar i de numeriska svaren 12 respektive 9. Då dessa metoder identifierats redan under 70-talet av Küchemann (1978) tycks det alltså inte handla om något nytt fenomen som upptäckts, utan om intuitiva resonemang som tillämpats då förståelsen för varierande variabler är bristfällig.

De två vanligt förekommande strategierna för att undvika öppna uttryck och uppnå numeriska svar går under följande benämningar (Pournara et al., 2016):

1. *Equal splits* (jämn fördelning). Exempel: $1 + x + y = 7 \Rightarrow x = y = 3$
2. *Assigning a value of 1* (ge variabeln värdet 1). Exempel: $x + y = 5 \Rightarrow x + y + z = 6$

Av dessa strategier har equal splits visat sig vara den mest använda både i Pournara et al.s (2016) undersökning och i Küchemanns (1978). Den visar sig även vara beständig i stor grad då 47% av eleverna som använt sig av strategin under åk 10 även hade använt den under åk 9, samtidigt som 37% fortsatte använda strategin under åk 11 (Pournara et al., 2016). Förklaringen till den andra strategin ligger i att z är en variabel och av den anledningen tros kunna anta vilket värde som helst, enligt elevernas antaganden. Eleverna väljer sedan värdet 1 för att göra beräkningarna så enkla som möjligt (se Pournara et al. 2016).

Item		Typical errors	% of all responses		
			Grade 9	Grade 10	Grade 11
1.2	Simplify $2a + 5b$	$7ab$	53	50	42
1.4	Simplify $2a + 5b + a$	$7ab$, $8ab$	25	18	14
3.2	Add 4 to $n + 5$	$9n$	11	12	7
3.3	Add 4 to $3n$	$7n$	25	32	17
5.3	If $e + f = 8$ $e + f + g = ?$	$8g$	17	11	10

Figur 3: Några vanliga fel i arbete med uttryck och ekvationer. Här kan även felens beständighet åskådas då det alltså är samma klasser som undersökts årligen. (Hämtad från Pournara et al., 2016, sid. 5).

De felaktiga svaren på uppgiften har alla sina ursprung i att 8 + g inte accepteras som svar av eleverna, vilket är ett fenomen som Collis (1978, refererad i Pournara et al., 2016) kallar ”lack of closure,” (se även Küchemann, 1978; Marum, Isler, Stevens, Gardiner, Blanton & Knuth, 2011; Hodgen, Küchemann & Brown, 2010). Det handlar alltså om att svar innehållande plus, minus eller andra räkneoperationer i stor utsträckning inte accepteras av eleverna, vilket är ett resultat i linje med vad som väntades då uppgiften utformades (Pournara et al., 2016). I Küchemanns (1978) undersökning visade det sig att hela 59% av eleverna, trots uppgiftens enkla natur, svarade fel då de arbetade med samma uppgift som i punkt 5.3 i Figur 3. Grundläggande konceptuell förståelse för uttryck som innehåller varierande variabler saknas alltså hos många elever.

Ett liknande exempel belyses av Marum et al. (2011) i vilket en elev beskriver ett obekant antal med ekvationen $n + 8 = n$, trots att uttrycket $n + 8$ mycket väl hade kunnat vara rätt svar. En möjlig förklaring till denna missuppfattning finner vi i hur likhetstecknet ofta ses som en ”blir”-symbol istället för något som beskriver en likhet (se Crawford, 2001; Skolverket, 2012). Hade det stått klart för eleven vad ett likhetstecken faktiskt betecknar så hade det alltså sannolikt blivit tydligt att något tal adderat med åtta inte möjligen kan vara lika mycket som enbart det talet utan något tillfört.

Flera exempel på tidigare nämnda fel med negativa tal och subtraktion tas upp i en rapport sammanställd av Skolverket (2012). I rapporten nämns bland annat hur svenska elever fått arbeta med uppgiften: ”Vad är värdet av 2a + 3(2 – b) för a = 3 och b = –1?” (sid. 50). På denna uppgift uppges enbart 10,9% av de svenska eleverna ha svarat rätt, där det vanligaste felet visat sig vara att –b tolkats som –1 istället för +1 vid insättning. Resultatet kan jämföras med Hong Kong och Taiwan där 69,2% respektive 78,4% av eleverna svarade rätt (Skolverket, 2012). Här kan det emellertid vara på sin plats att ifrågasätta huruvida den konceptuella svårigheten hos eleverna till större del rör variabler eller negativa tal. Inte minst med tanke på det påfallande rimmet: ”Minus times minus equals plus, the reasons for this we need not discuss” (citerat i Sfard, 1995, sid. 31). Relevansen hos denna punkt kan alltså anses vara omstridd.

En kanske mindre omtalad men ytterst viktig aspekt rör hur elevers förväntningar gällande typiska matematikuppgifters frågeställningar kan spela stor roll. Flera studier visar på utbredda svårigheter där elever försöker addera exempelvis 5 med 3x och 2a med 2b (Küchemann, 1978; Pournara et al., 2016). En möjlig förklaring till detta fenomen är att frågorna av sin natur är designade att få eleven att utföra en operation (Pournara et al., 2016; se även Hodgen et al., 2010). En bra illustration på detta finner vi i en elevintervju utförd av Maschazi (2012, refererad i Pournara et al., 2016) där eleven säger: ”*They said add 5 to 3x* so I said 5 plus 3 equal to 8 then after that I took the x and put it next to 8 to get 8x” (sid. 20, egen betoning)[3]. Eleven tycks alltså se det som att additionen måste utföras då denna operation är vad som begärs i frågeställningen. Att detta leder till tidigare nämnd ”conjoining,” att handskas med variabler ”som om de vore enheter i ett mätproblem,” (Pournara et al., 2016, sid 5) tycks alltså inte utgöra hinder.

Fenomenet att elever har en tendens att vilja utföra en operation kan även användas för att förklara varför en elev känner sig mer benägen att, felaktigt, utföra operationen $8 - 2b = 8$, medan $2b - a$ tillåts stå som svar. Eleven resonerar sig nämligen fram till att det inte går att subtrahera 2b från 8, alltså blir det åtta kvar efter att operationen utförts och inget tagits bort (se Pournara et al., 2016). Operationen $2b - a$ kan å andra sidan inte utföras, vilket leder till att uttrycket får stå kvar som det är. Med detta synsätt är alltså öppna uttryck fullt godtagbara som svar på uppgiften, förutsatt att operationen inte kan genomföras.

När det gäller ekvationslösningar i allmänhet tycks det råda stora konceptuella brister. I en jämförelse mellan spanska och mexikanska elevers kunskaper kring den algebraiska variabeln fann Álvarez och Gómez-Chacón (2015) att eleverna i båda länderna har mycket svårt för att lösa ekvationer av typen $(x + 3) \times 2 = 36$, med $x = 3$ som det vanligaste angivna svaret. De försökte inte söka någon förklaring på vad detta kan bero på, men en indikation ges i följande exempel.

På frågan ”hur många värden kan variabeln anta i ekvationen $4 + x^2 = x(x + 1)$?” var det vanligaste svaret ”2, därför att det är en andragradsekvation.” (Álvarez & Gómez-Chacón, 2015, sid. 1516–1517). Det verkar troligt att eleverna i detta exempel samt det förra svarat utan att ha försökt skriva om uttrycken, vilket skulle peka på tillkortakommanden gällande algebraiska manipulationer eller, som författarna påpekar, bristfällig förståelse för vad ekvationer är för något (Álvarez & Gómez-Chacón, 2015). Ett tredje exempel underbygger samma slutsatser: På frågan ”Hur många värden kan bokstaven a [sic] anta i $3 + a + a = a + 10$?” (Álvarez & Gómez-Chacón, 2015, sid. 1518) var tre det vanligaste svaret som angavs. Återigen framstår det alltså som att försök till omskrivningar ej ägt rum, medan antalet variabeltermer utgjort grund för elevers gissningar.

Álvarez och Gómez-Chacón (2015) har identifierat ytterligare problem relaterade till variabler, likhetstecken samt ekvationer. På uppgiften: ”Översätt till matematiskt språk, ett obekant tal delat med fem och resultatet adderat med sju,” (s. 1518) har det vanligaste svaret i deras studier visat sig vara $\frac{x}{5} = y + 7$. Detta menar de tyder på att $\frac{x}{5}$ inte kan ses som en utförd matematisk operation vilket kräver att ett y måste införas. Dessutom indikerar avsaknaden av elevsvar i stil med $\frac{x}{5} + 7$ eller $y + 7$, som alltså båda saknar likhetstecken, att även dessa elever har svårt för att acceptera öppna uttryck som svar på uppgifter (Álvarez & Gómez-Chacón, 2015).

[3] Originalspråket har här tillåtits stå kvar för att bevara den exakta frågeformuleringens koppling till operationen som efterfrågas i uppgiften samt elevens tolkning av formuleringen.

Ett viktigt exempel på vanligt förekommande problem rör identifiering av mönster. När elever fått i uppgift att fylla i högerledet till den sista ekvationen i mönstret:

1+2+3=(4x3)/2
1+2+3+4=(5x4)/2
.
.
1 + 2 + 3 + 4 + ... + n =

var de vanligaste svaren enligt en undersökning (n+n+1)/2, 5×n/2, (n.n+1)/2 och 5.6/2 (Álvarez & Gómez-Chacón, 2015), där punkter får antas motsvara multiplikationstecken. Det framgår här hur eleverna försöker följa mönstret, men tycks sakna en djupare förståelse för variabler som generella tal. Denna svårighet att översätta mönster till matematiskt språk identifierades som ett problem som höll i sig även i senare årskurser (Álvarez & Gómez-Chacón, 2015), och kan alltså anses behöva extra uppmärksamhet.

När det gäller variabler i funktioner och uttryck uppvisar elever stora svårigheter. Uppgifter av typen ”Givet att y = 5 + x, vilka värden kan x ha om y måste vara större än 2 men mindre än 9?” samt ”Vilken är större, n + 3 eller 3n?” svarade över hälften av eleverna i Álvarez och Gómez-Chacóns (2015) studie fel på. Även Küchemann (1978) fann att en stor majoritet, 71%, inte insåg att en variabel med en konstant adderad inte alltid är mindre än en multipel av samma variabel, vilket tyder på att även detta har varit en svårighet för eleverna sedan många år tillbaka. Det står alltså klart att det även finns allvarliga kunskapsluckor gällande variabelns roll i ekvationer och olikheter som kan kräva särskilda insatser från lärare.

Slutligen bör uppmärksamhet riktas mot fenomenet att variabler felaktigt ses som namn, förkortningar eller objekt (Kilhamn 2014; Ely & Adams. 2012; Marum et al., 2011; Hodgen et al., 2010; Skolverket, 2012). Detta leder exempelvis till att *r* utläses som ”radie” i ett uttryck istället för att tillhöra någon av variabeltyperna. Ytterligare ett exempel på hur elevers sviktande konceptuella förståelse för variabler kan leda till missuppfattningar och felaktiga algebraiska beräkningar har alltså identifierats. Detta då 3*r* exempelvis kan uppfattas som ett sätt att beteckna en radie med längd 3 istället för att ses som tre stycken radielängder.

4.2.2 Vikten av att särskilja variabeltyperna samt tidiga interventioner

Det tycks råda stor enighet när det gäller vikten av att börja tidigt med att göra tydliga skiljelinjer mellan variabeltyperna. Pournara et al. (2016) påpekade att ”[elever] behöver utveckla denna mer sofistikerade tolkning av bokstäver tidigare för att handskas med algebra och funktioner” (sid. 9). Den mer sofistikerade tolkningen som åsyftas rör här den stora skillnaden mellan variabler som obekanta tal och varierande variabler som redogjorts i tidigare avsnitt. En snarlik ståndpunkt har framförts av Ely och Adams (2012) som ville göra gällande att ”[en] av de viktigaste stegen vid inlärning av algebra är att förstå bokstävernas roll i matematiska uttryck från obekanta till variabler” (sid. 1). Skolverket (2012) har dessutom gått så långt att de vågar påstå att en graf kan vara omöjlig att förstå om man tolkar variabeln som ett obekant tal istället för att se den som varierande.

Arbete inom detta område underlättas givetvis av att lärarna själva besitter goda kunskaper om de olika variabeltyperna och deras användningsområden (se Ely & Adams, 2012), men är det så det faktiskt ser ut i klassrummen? I artikeln, *When does a variable vary? Identifying mathematical content knowledge for teaching variables* ville Kilhamn (2014) reda ut vilka kunskaper och kompetenser en lärare behöver för att kunna lära ut variabler på bästa möjliga sätt. I hennes analys jämförs två matematikklassrum där lärarna uppvisar stora brister då variabler introduceras och därefter diskuteras.

I det första exempelklassrummet kallar Ms B den varierande variabeln x, som i detta fall betecknar en persons ålder, för variabel vid fem tillfällen och uttryck vid två andra. Dessutom svarar hon, efter att ha blivit frågad vad x är för något, att ”x är ingenting det är bara vad hans ålder kallas,” (Kilhamn, 2014, sid 89). Hon gör heller inte någon ansträngning för att beskriva varken nyttan eller den matematiska innebörden av att använda x som varierande variabel i det givna exemplet. Hennes beskrivning riskerar därmed att få eleverna att se x som ett obekant tal, dvs. en fast ålder som kommer kunna beräknas i takt med att mer information utges. Alternativt, och kanske ännu värre, riskerar hennes formulering att ge intrycket att x bara är ett angivet namn för åldern tills dess att den blir känd (se Kilhamn, 2014; Ely & Adams, 2012; Skolverket, 2012). Förvirringen sprids ytterligare när Ms B försöker beskriva variabler genom att skriva upp tre ekvationer som har olika värden på x. Förvisso är det sant att värdet på x varierar ekvationerna emellan, men till skillnad från uppgiften som eleverna arbetar med så har de nu fått tre exempel på x som ett obekant tal, inte som varierande variabel.

Även i Ms C:s klassrum uppvisar lärare och elever stora svårigheter med att göra tydliga distinktioner variabeltyperna emellan (Kilhamn, 2014). Detta tydliggörs då en elev konstruerar en formel för diverse familjemedlemmars åldrar, med den egna åldern som utgångspunkt, som bara fungerar i ett specifikt fall. Variablerna i formeln var alltså obekanta tal istället för varierande; ett faktum som inte diskuterades när detta framkom i helklassdiskussionen. Osäkerheten blir ännu mer påtaglig i den efterkommande elevdiskussionen när många elever yttrar felaktiga antaganden kring variabelns roll i uttrycken medan Ms C undviker att ställa följdfrågor på deras bristfälliga resonemang (Kilhamn, 2014). Lärares och elevers osäkerheter kring variabeltyperna tycks alltså resultera i en ond cirkel, i vilken elevers motivation att förstå variabler troligen tar förödande skador.

Exemplen som Kilhamn (2014) lyfter fram blir särskilt intressanta med tanke på hur viktigt det är för elever att få goda första intryck om variabler. De första intrycken har nämligen visat sig vara nödvändiga för att kunna bygga upp en god konceptuell förståelse för variablers användning vid problemlösning och för att kunna acceptera öppna uttryck som svar i algebraiska uträkningar. Ely och Adams (2012) skriver: ”Många svårigheter som elever har med övergången från obekanta tal till variabel härstammar från tidigare erfarenheter i grundskolan” (sid. 12). Som varningsexempel refererar Ely och Adams till Sfard som i hennes klassrum, utan större förberedelser, gav eleverna ekvationer att lösa som innehöll både varierande variabler och variabler som generella tal. Ett beslut som ledde till två veckor med besvär, under vilka eleverna vägrade gå vidare till nästa avsnitt innan förståelsen för lösningarna som läraren presenterat uppnåtts (Ely & Adams, 2012; Sfard, 1995). Ett annat exempel utgörs av arbete med avkodning under tidigare årskurser. Sådana aktiviteter, som på ytan tycks vara helt ofarliga, har nämligen visat sig leda till att många elever associerar a med 1, b med 2, osv. (Ely & Adams, 2012). Resultatet är således att variabler representerade av tidiga bokstäver i alfabetet förknippas med deras ordningstal (se även Küchemann, 1978).

Det tycks finnas ytterst lite som tyder på att klassrummen som redovisats ovan är unika i deras bristfälliga introduktioner till variabeltyperna. Tidigare forskning har fastställt att algebraundervisningen under 90-talet och tidigare till stor del var regelbaserad och procedurell (Marum et al., 2011; Crawford, 2001; Kilhamn, 2014). Fokus har alltså legat i att kunna skriva om och beräkna olika ekvationer och algebraiska uttryck på olika nivåer, medan förståelsen för varför uttrycken ser ut som de gör och vilken roll variabeln spelar hamnat i skymundan. Dessutom finns ett antal läroplaner som väljer att ibland kalla alla algebraiska bokstäver för variabler och ibland använder sig av mer begränsade definitioner som exempelvis kvantiteter som varierar (Kilhamn, 2014).

Denna försummelse av variabeltypernas skiljelinjer har dock inte gått obemärkt. Usiskin (1988) klargjorde redan under 80-talet vikten av att lära ut variabelns olika roller i samband med att olika sorters algebraiska problem tacklas i klassrummet: ”Syftet med algebra bestäms av, eller har att göra med, olika uppfattningar om algebra, vilka korrelerar med olika betydelser som är kopplade till olika variabelanvändningar” (s. 11). Detta är ett uttalande som sannolikt bidragit till att ny undervisning baserad på generaliseringar, modellering, problemlösning och funktionella perspektiv förespråkats bland diverse forskare (se Kilhamn, 2014; Pournara et al., 2016; Crawford 2001). Forskare som Rojano (1996, refererad i Kilhamn, 2014) ville dessutom gå så långt att lärdom om symbolmanipulationer inte borde läras ut förrän verkliga situationer uppvisats som faktiskt kräver den sortens uträkningar. Detta skulle alltså gå rakt emot den koncensus som exemplifierats i Ms Bs och Ms Cs klassrum, då fokus skiftas från procedurella förmågor till att i första hand kretsa kring problemformuleringar. Vidare finns forskare som förespråkat att ”[elever] behöver spendera en hel del tid åt att artikulera generella påståenden tydligt i ord och sedan koppla dessa påståenden till argument som baserats på representationer” (citerad i Kilhamn, 2014, sid. 85). Även här blir det alltså tydligt att den konceptuella förståelsen bör gå före procedurer, vilket förutsätter en grundläggande förståelse för variabeltypernas olika särdrag.

Att tidiga ansträngningar hjälper eleverna att representera obekanta storheter med variabler verifierades av Marum et al. (2011). I deras studie visar det sig att elever, efter genomgående interventioner från lärare i tidiga stadier av algebraundervisning, blir allt bättre på att representera relaterade obekanta storheter med hjälp av variabler. Det har även fastslagits att problemet med ”assigning values,” att ge variabler värden (se även Pournara et al., 2016) för att slippa öppna uttryck som svar, kan motverkas redan hos elever i tredje klass genom att föra diskussioner där de som accepterat öppna svar uppmuntras till att motivera dem för andra i klassen (Marum et al., 2011). Även andra tidigare nämnda problem som att se variabler som namn och förkortningar istället för representationer av obestämda värden kan motverkas i denna åldersgrupp. Detta genom att medvetet lära ut variabelns många användningsområden och koppla dem till elevers ”informella representationer och förståelser” (Marum et al., 2011, sid. 107).

4.2.3 3UV-modellen som diagnosiskt verktyg

3UV-modellen, på engelska kallad The 3UV model efter The Three Uses of Variables (Ursini & Trigueros, 2001), utgör vad som kanske är den mest utarbetade mallen för att metodiskt arbeta med elevers förmågor gällande variabelns olika användningsområden. Modellen, som konstruerats av Ursini och Trigueros, har som uttalat syfte att bland annat ”användas som riktlinje vid design av redskap för att göra diagnosiska analyser, designa undervisningsaktiviteter och för att analysera textböcker och andra läromedel relaterade till variabelkonceptet i elementär algebra” (Ursini & Trigueros, 2001, sid. 327). Av denna anledning har modellen tillägnats ett eget avsnitt i denna studie, med förhoppning om att klargöra den praktiska nyttan som applicering av denna modell medför.

De tre stora användningsområdena för variabler benämns i 3UV-modellen som 1) variabler som obekanta tal, 2) variabler som generella tal och 3) variabler i funktionella relationer (Ursini & Trigueros, 2001; jfr Küchemann, 1978). I denna kategorisering identifieras ett antal förmågor förknippade med varje område. Dessa är (Ursini & Trigueros, 2001, sid 328–329):

Variabler som obekanta tal:

- att i en problemsituation kunna känna igen och identifiera existensen av något obekant som kan bestämmas genom att väga in problemets restriktioner
- tolka symboler som förekommer i ekvationer, som specifika värden
- ersätta variabeln med det eller de värden som gör ekvationen till ett sant påstående
- bestämma de obekanta kvantiteter som förekommer i ekvationer eller problem genom att utföra de algebraiska och/eller aritmetiska operationer som krävs
- symbolisera de obekanta kvantiteter som identifierats i en specifik situation och använda dem för att ställa upp ekvationer

Variabler som generella tal:

- känna igen mönster, finna regler och metoder i sekvenser och i problemfamiljer
- uppfatta en symbol som en representant för en generell, obestämd entitet som kan anta vilket värde som helst
- urskilja generella regler och generella metoder i sekvenser och i familjer av problem
- manipulera (förenkla, förlänga) den symboliska variabeln
- symbolisera generella påståenden, regler och metoder

Variabler i funktionella relationer:

- känna igen sambandet mellan relaterade variabler oberoende av deras representation (tabeller, grafer, verbala problem, analytiska uttryck)
- bestämma värdet på en beroende variabel, givet värdet av den oberoende
- bestämma värdet på en oberoende variabel, givet värdet av den beroende
- känna igen den gemensamma variationen av variabler inblandade i en relation, oberoende av deras representation (tabeller, grafer, analytiska uttryck)
- bestämma variationsintervallet av en variabel givet variationsintervallet av den andra variabeln
- symbolisera en funktionell relation baserad på analys av data tillhörande ett problem

Denna detaljerade uppdelning av förmågor har en stor potential för praktiska användning. Problem relaterade till svårigheter med att acceptera öppna uttryck som svar (Pournara et al., 2016: Küchemann, 1978; Marum et al., 2011) kan kopplas till den andra och fjärde punkten under variabler som generella tal, medan problem med att fastställa möjliga värden på y givet en viss linjes ekvation med begränsade värden på x (se Álvarez & Gómez-Chacón, 2015) snabbt kan kopplas till den femte punkten under variabler i funktionella relationer. Med förberedda metoder att hantera tillkortakommanden hos varje enskild punkt har alltså en lärare möjlighet att snabbt kunna ta itu med eventuella konceptuella svårigheter kring de olika variabeltyperna som elever kan tänkas uppvisa. Som Ursini och Trigueros (2001) observerar:

> The possibility to design teaching activities that can help students make the necessary links between the aspects that constitute each one of the uses of variable, and the possibility of identifying them with a specific name may help beginning students to develop a stronger concept of each of the uses of variable. (sid. 334)

Vidare kan 3UV-modellen användas för att kartlägga matematiklärares kunskaper och färdigheter kring användning av de tre variabeltyperna. Ursini och Trigueros gjorde just detta och kom fram till en mängd oväntade resultat. Bland annat fann de att kunskaperna hos matematiklärare på gymnasiet ligger på snarlika nivåer som kunskaperna hos de som just börjat studera på högskolor (Ursini & Trigueros, 2001) och att även lärare har svårt för att acceptera öppna uttryck som svar på en uppgift. Vidare uppkom att högstadielärare har svårt för att skilja på variabler som obekanta tal och variabler som generella tal, vilket är i linje med Kilhamns (2014) observationer som tidigare redovisats.

En sista användning värd att nämna rör jämförande studier. 3UV-modellen tycks av allt att döma inte ha utnyttjats i någon större utsträckning (se Álvarez & Gómez-Chacón, 2015). Álvarez och Gómez-Chacóns (2015) undersökning mellan spanska och mexikanska elevers kunskaper kring den algebraiska variabeln, som omnämnts i tidigare avsnitt, står emellertid som praktexempel på hur modellen kan utnyttjas när kunskaper om variabeltyperna ska jämföras. Som de själva kommenterat:

> The 3UV Model offers an appropriate answer to algebraic problems and three uses of the variable and the aspects that characterise each. The results of this study could constitute a first step in the systematisation of a series of case studies, by combining theoretical approaches that afford a better understanding of empirical research. (Álvarez & Gómez-Chacón, 2015, sid. 1508)

I dagsläget kan alltså 3UV-modellen anses ha varit en missad möjlighet, men med en stor potential att få genomslag framöver.

4.2.4 Två strategier för att handskas med konceptuella svårigheter

I beaktande av tidigare redovisade svårigheter som lärare uppvisat i samband med undervisning om variabler (Pournara et al., 2016; Kilhamn, 2014; Ursini & Trigueros, 2001) är det på sin plats att rikta uppmärksamhet till olika metoder som undervisare kan dra nytta av för att underlätta elevers förståelse av detta mångsidiga begrepp. Av denna anledning belyses två strategier i detta avsnitt, där den ena rör hur man genom att se ekvationer som en jämförelse mellan funktioner kan lösa dem grafiskt och den andra handlar om hur problemlösning kan förenklas genom att introducera flera variabler i ett tidigare skede är vad läromedel och styrdokument förespråkar.

Metoden att se ekvationslösning som en jämförelse mellan två funktioner har fått stort genomslag i åtminstone ett litet distrikt i USA (se Chazan, Yerushalmy & Leikin, 2008), vilket fått som följd att ekvationer i läroplanen beskrivs i termer av två funktioner som jämförs istället för att som tidigare ses som ett sökande efter obekanta tal. Chazan, Yerushalmy och Leikin (2008) fann i sina intervjuer med ett fåtal högstadie- och gymnasielärare att detta nya synsätt anses vara användbart i arbete med ekvationer innehållande en variabel. Då fler variabler ingick i ekvationerna blev det däremot svårare för lärarna att se hur metoden skulle kunna vara användbar för eleverna.

Strategin går till på följande sätt: För att lösa ekvationen $6x - 18 = 30$ tänker vi oss att vi har de två linjerna $y = 6x - 18$ och $y = 30$. Linjerna ritas i ett koordinatsystem och eventuella skärningspunkter markeras. Skärningspunkternas positioner i x-led utgör då ekvationens samtliga lösningar, som alla uppnåtts utan några algebraiska omskrivningar. För att koppla strategin till variabeltyperna kan detta tolkas som att x fungerar som en varierande variabel längs x-axeln tills dess att skärningspunkten, och därmed det obekanta talet, identifierats; ett tankesätt som uppfattats som ögonöppnande för en av lärarna i Chazan et al.s (2008) intervjuer:

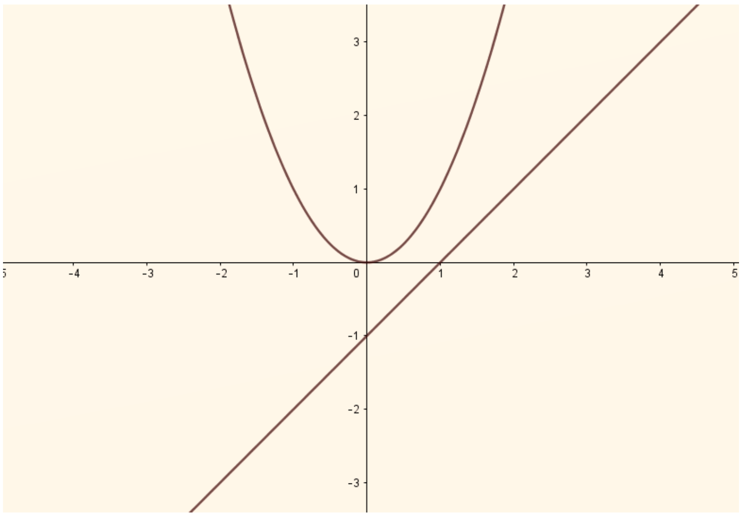
> *Before* it was, it was definitely, before I got to. . . It [solving equations] would have been much more of trying to manipulate and do operation to each side until they are. . . until I have the *one variable equals the other*. And it just, *x* was just unknown and I had to solve for what *x* would be. *Now*, I'm thinking of it [equations], now that I'm here, I'm thinking of it more as *x* is a variable that is changing. (sid. 91)

Som Chazan et al. (2008) påpekade för sina intervjuobjekt medför denna strategi att avancerade ekvationer som inte kan lösas med algebraiska metoder, så som $2^x = x^2$, plötsligt blir fullt lösbara. Med digitala verktyg till hands blir metoden synnerligen effektiv. Allt som krävs är att rita graferna för $y = 2^x$ och $y = x^2$ för att sedan avläsa var de skär varandra.

En annan stor fördel med metoden är att paralleller kan dras till grafiska lösningsmetoder av ekvationssystem för att göra det tydligt för eleverna varför ekvationer ibland saknar lösningar. Ekvationssystemet:

$$\begin{cases} y = 2x - 5 \\ 6x - 3y = 3 \end{cases}$$

kan med algebraiska manipulationer, exempelvis substitutionsmetoden, leda till ekvationen $15 = 3$ (se Chazan et al., 2008). Denna olikhet kan sedan, utan ytterligare motivering, anges som skäl för att lösningar saknas. En grafisk lösning gör emellertid saken klar då eleven kan se att linjerna aldrig skär varandra. Med metoden redovisad ovan kan linjerna till en ekvation skissas med eller utan digitala hjälpmedel för att på liknande sätt enkelt visa att linjerna aldrig möts, vilket motiverar varför exempelvis ekvationen $x^2 = x - 1$ saknar reella lösningar (se Fig. 4).



Figur 4: Grafisk lösning av ekvationen $x^2 = x - 1$. De två linjerna som jämförs är alltså $y = x^2$ respektive $y = x - 1$.

Den andra metoden som ska belysas bygger på idén om ett tidigt införande av en andra variabel. Detta för att underlätta arbete med problemlösning med två variabler som obekanta tal som vanligtvis enbart löses med hjälp av en. Ett exempel på användning av metoden redovisades av Mathews (1997), där följande problem framfördes:

> Mr. Field invested $3600, some in bonds that paid 4-1/2 percent interest and the rest in stocks that paid 6 per cent. His annual income from both together was $207. How much money was invested at each rate? (sid. 124)

Genom att införa variablerna x och y för de olika obligationerna överförs problemet till lösning av ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + y = 3600 \\ 0{,}045x + 0{,}06y = 207 \end{cases}$$

Vars lösningar för x och y genast ger svaret på uppgiften. Detta är emellertid en lösningsmetod som inte lärs ut förrän mot slutet av några av de mest använda matematikböckerna (Mathews, 1997). Metoden som faktiskt lärs ut i takt med att denna sorts problem tas upp ställer istället upp ekvationen 0,045x + 0,06 (3600 – x) = 207, förutsatt att obligationen med 4,5% ränta väljs som utgångspunkt. Denna uppställning medför dock att elever ofta uppvisar svårigheter med att komma fram till antalet 6%-obligationer och har svårt för att tolka resultaten (Mathews, 1997).

Att elever utropar ”Detta är så mycket enklare!” har visat sig vara en vanlig reaktion i takt med den nya variabelns införande i tidigare stadier än vad läroböckerna rekommenderar (Mathews, 1997). Även om den inte nödvändigtvis fungerar bättre för alla elever tycks den alltså vara ett bra redskap att ha till hands då elevernas motivation sviktar. I synnerhet i de fall då eleverna redan är välbekanta med att lösa ekvationssystem samt användning av substitutionsmetoden.

5 Diskussion

Diskussionsavsnittet har uppdelats på följande sätt: Del ett tar upp otydligheterna som redovisats i bakgrundsavsnittet, där det ingår en kort analys samt förslag på lösningar till de problem som har identifierats. Del två tar kort upp hur variabelns utveckling kan kopplas till elevers svårigheter med att handskas med variabelkonceptet via det konstruktivistiska synsättet på kunskap. Den tredje delen diskuterar möjligheten att elevers motivation kan vara den mest avgörande anledningen bakom elevers svårigheter med variabler. Den innehåller även några tips på hur lärare kan agera för att öka motivationen hos eleverna. Diskussionsavsnittet avslutas sedan med förslag på fokus och riktlinjer som bör ligga till grund för framtida forskning.

5.1 Variabeltypernas olika beteckningar

Med tanke på den stora oenigheten gällande variabeltypernas beteckningar är det ytterst relevant att fundera över vilken uppdelning som kan tänkas vara optimal. I svenska styrdokument och läromedel tycks särskiljningen mellan variabler som obekanta tal och varierande variabler vara av högsta prioritet. Detta framgår av den konsekventa användningen av begreppet ”obekant tal”—ett begrepp som inte innehåller ordet variabel överhuvudtaget—samt av att variabler som generella tal tycks hamna under samma benämning som varierande variabler (se avsnitt 2). Benämningen som används är då i regel ”variabel” i sin enkelhet. Här kan det dock ifrågasättas om särskiljningen i själva verket är så pass grov att den riskerar att gå obemärkt hos lärare och elever. Inte minst med tanke på hur både variabler som obekanta tal och varierande variabler ofta använder sig av bokstaven x och hur båda typerna, mycket riktigt, klassificeras som variabeltermer i diverse uttryck och ekvationer. Den slutliga frågan blir följaktligen huruvida denna kontraproduktivitet kan motverkas genom att konsekvent använda sig av begrepp som alla innehåller en variant av ordet variabel—som exempelvis de som använts genomgående i denna studie—för att tydliggöra en gång för alla att olika typer av variabler finns och bör särskiljas. Dessutom skulle därmed klumpiga användningar av exempelvis ordet symbol för att beteckna samtliga variabeltyper (se Björklund & Dalsmyr, 2016) inte behöva användas då begreppet variabel frigjorts och är betydligt mer passande som samlingsterm för de olika typerna.

Här har givetvis även forskarna ett ansvar då det, som tidigare nämnts, alltså råder oenighet även hos dem kring vilka begrepp som bör användas i diverse sammanhang. Skolverket bör dock ta på sig det yttersta ansvaret för otydligheterna som uppvisats då deras direktiv rimligen är vad som i störst utsträckning påverkar lärares och läromedels presentationer och hanteringar av variabeltypernas särdrag och förekomster. Kanske borde de ta en närmare titt på den forskning som faktiskt finns, och börja därifrån?

5.2 Historiens koppling till dagens elever

En intressant koppling kan dras mellan variabeltypernas uppkommande och elevers svårigheter med att forma en konceptuell förståelse för dem. Sfard (1995) menar att algebrans historiska utveckling, i konstruktivistisk anda, krävde flera steg där känd information omformades för att nya abstrakta idéer, så som negativa- och imaginära tal, skulle kunna accepteras till det redan kända. På samma sätt är det inte svårt att föreställa sig hur elever som introduceras till variabler genom att lösa uppgifter liknande $3x + 4 = 13$ sedan stöter på problem då de plötsligt ombedes lösa den mycket mer abstrakta ekvationen $ax + 4 = 3$, eller får som uppgift att beskriva Olofs ålder givet att Anna är x år gammal och fem år äldre.

Med tanke på hur Viètes idé om variabler som generella tal inte uppkom förrän tusentals år efter att Euklides använt bokstäver på liknande sätt, och med tanke på hur dagens varierande variabler mötte motstånd ända in på 1800-talet, kan man knappast klandra eleverna för diverse beständiga svårigheter med att bemästra variabeltyperna och assimilera rådande abstrakta variabelkoncept. Det borde kanske inte ta eleverna hundratals år att omforma sina idéer efter nutida traditioner, men med tanke på historiens utveckling bör man ha full förståelse för varför de kan verka ovilliga att sätta gällande trosföreställningar på spel.

Ofta krävs flera steg av utvärdering och omvärdering innan nya koncept accepteras. Detta inom såväl vetenskap som hos kritiskt tänkande elever. Vad som bör efterfrågas är alltså mer tid åt systematisk särskiljning mellan variabeltyperna. Tid där eleverna tillåts reflektera över nyttan i att exempelvis kunna lösa ekvationen $ax^2 + bx + c = 0$, och där innebörderna hos *a*, *b*, *c*, respektive *x* framgår tydligt (jfr Philipp, 1992). Undervisningen kan inte ha som utgångspunkt att eleverna arbetar med *a* som ett obekant tal ena dagen för att sedan räkna med *a* som generellt tal och väntas förstå den enorma konceptuella skillnaden variablerna emellan – utrymme för diskussion och reflektion måste tilldelas innan dess, och gärna därefter.

5.3 Brist på meningsskapande som huvudsakligt skäl bakom svårigheterna

Anledningarna som kan tänkas ligga bakom några av de mer frekventa svårigheterna som elever uppvisar i samband med att de arbetar med variabler ger stort utrymme för diskussion och spekulation. De flesta av dessa har redan tagits upp, som exempelvis frågeställningars uppmuntran att be elever ”göra något” med matematiska uttryck och elevers svårigheter med att omfamna nya abstrakta koncept. Vad som emellertid inte har diskuterats är vikten av att elever faktiskt är motiverade att förstå variabelkonceptet och ta egna initiativ för att underlätta lärandet; en punkt som kanske är så pass viktig att eventuella förslag på lösningar blir verkningslösa om den inte har adresserats. När det gäller algebran i stort har det åtminstone i Storbritannien identifierats att elevers motivation sänkts i takt med att arbetet uppfattas som svårt, tråkigt, irrelevant, abstrakt och alltför rutinmässigt (se Hodgen et al., 2010). Det krävs inte många antaganden för att se dessa faktorer som gällande även hos svenska elever då de arbetar med variabler. Den stora frågan blir följaktligen: Vad kan- och bör man göra som lärare för att öka motivationen hos eleverna och få arbetet med variabler att uppfattas som mer meningsfullt?

Ett enkelt och brett täckande svar på denna fråga, som absolut tål att upprepas, utgörs av att agera efter den forskning som refererats i bland annat avsnitt 4.2.2, vilken förespråkar att variabeltyperna konsekvent och med tydlighet hålls isär. Detta kan kräva stora, medvetna insatser från lärarens håll – i synnerhet då läroböckerna är otydliga eller inkonsekventa med sina benämningar och i sina framställningar av variabeltyperna. Förslagsvis kan det handla om att systematiskt fråga eleverna vilka sorters variabler som ingår i de exempel som tas upp i genomgångarna och att ständigt hänvisa tillbaka till de olika typerna då eleverna arbetar med variabler i diverse sammanhang som geometri, sannolikhetslära, modellering, samband och förändring och, givetvis, algebra. En eller flera diskussionsuppgifter bör även ingå för att motverka felaktiga antaganden om variabler. Exempelvis kan det handla om att be eleverna motivera vilka variabler som kan anta många olika värden och vilka som är mer begränsade eller helt enkelt inte kan anta några värden givet vissa förutsättningar. Detta för att bland annat motverka tidigare redogjorda problem med att ge varierande variabler entydiga värden via jämn fördelning eller att ge dem värdet 1, då det tros vara tillåtet av den enkla anledningen att man arbetar med variabler.

Insatser som ovanstående bör leda till att arbete med uttryck och ekvationer blir enklare och därmed mindre tråkiga i takt med att variablernas betydelser blir mer lättbegripliga och mindre abstrakta. Dessutom bör diskussionsuppgifterna bidra till att arbetet uppfattas som mindre rutinmässigt och möjligen mer relevant och meningsfullt i takt med att verkliga exempel kan behöva tillgås för att underbygga argumenten för variabeltypernas eventuella begränsningar. Ett stort hinder är emellertid att gymnasielärare, som tidigare redovisats, i gällande styrdokument inte fått i uppdrag att göra en grundlig särskiljning av de olika variablerna, eller ens uppmanas att nämna deras existens överhuvudtaget. I någon mån innebär det i dagsläget alltså en risk att tillägna alltför mycket tid åt dessa ansträngningar, liksom alla andra förkunskaper som Skolverket räknar med att eleverna har med sig.

5.4 Framtida forskning

Ytterst lite forskning med särskilt fokus på variabeltyperna och variabelkonceptet tycks ha utförts på svenska elever. Dessutom har det i tidigare avsnitt framkommit att 3UV-modellen använts i mycket liten utsträckning även internationellt sett, vilket har bidragit till att även denna studie i stor utsträckning fått förlita sig på resultat som erhållits i undersökningar om allmänna algebraiska kunskaper snarare än specifika kunskaper om variabler. Vad som efterfrågas i framtiden är således mer forskning i Sverige och i andra länder som har förståelse för variabelkonceptet och variabelns olika användningsområden på agendan. Det efterfrågas även att exempelvis 3UV-modellen eller något liknande system utgör grund vid dessa undersökningars utformande, och att en koncensus nås gällande variabeltypernas benämningar och avgränsningar. Detta för att säkerställa att resultaten i stor grad är jämförbara och inte ger utrymme för tolkningsskiljaktigheter.

Om ingen koncensus kan nås förefaller det knappast oväntat att intresse och engagemang för variabeltypernas skillnader fortsatt hamnar i skymundan hos lärare, elever och myndigheter.

6 Referenser

Alfredsson, L., Bråting, K., Erixon, P. & Heikne, H. (2012). *Matematik 5000: Kurs 2a röd & gul lärobok.* Stockholm: Natur & Kultur.

Alfredsson, L., Bråting, K., Erixon, P. & Heikne, H. (2012). *Matematik 5000: Kurs 2b grön lärobok.* Stockholm: Natur & Kultur.

Alfredsson, L., Erixon, P. & Heikne, H. (2011). *Matematik 5000: Kurs 1a röd lärobok.* Stockholm: Natur & Kultur.

Álvarez, I., & Gómez-Chacón, I. (2015). Understanding the Algebraic Variable: Comparative Study of Mexican and Spanish Students. *EURASIA Journal of Mathematics, Science & Technology Education, 11*(6), 1507-1529. doi: 10.12973/Eurasia.2015.1409a

Björklund, E. & Dalsmyr, H. (2016). *Koll på matematik 6A.* Stockholm: Sanoma Utbildning AB.

Carlsson, S. (2015). *Bryggan Bas.* Stockholm: Sanoma Utbildning AB.

Carlsson, S., Falck, P., Liljegren, G. & Picetti, M. (2012). *Matte direkt borgen 6A*. Stockholm: Sanoma Utbildning AB.

Chazan, D., Yerushalmy, M., & Leikin, R. (2008). An analytic conception of equation and teachers' views of school algebra. *Journal of Mathematical Behavior, 27*(2), 87-100. doi: 10.1016/j.jmathb.2008.07.003

Crawford, A. R. (2001). Developing algebraic thinking: Past, present and future. I H. Chick, K. Stacey, J. Vincent & J. Vincent (Red.), *Proceedings of the 12th Study Conference of the International Commission on Mathematical Instruction: The Future of the Teaching and Learning of Algebra* (s. 192-198). Hämtad från: https://www.researchgate.net/publication/330409545_The_future_of_the_teaching_and_learning_of_algebra_The_12th_ICMI_study_Proceedings_of_the_conference_Melbourne_Australia_volume_1_2001/link/5c3e9aeea6fdccd6b5b05156/download

Domingues, J. (2004). Variables, limits, and infinitesimals in Portugal in the late 18th century. *Historia Mathematica, 31*(1), 15-33. doi: 10.1016/S0315-0860(03)00004-1

Ely, R., & Adams, A. (2012). Unknown, placeholder, or variable: What is x? *Mathematics Education Research Journal, 24*(1), 19-38. doi: 10.1007/s13394-011-0029-9

Gerholm, V., Skarp, J. & Olofsson, K. (2019). *Matematik origo 2A.* Stockholm: Sanoma Utbildning AB.

Hodgen, J., Küchemann, D., & Brown, M. (2010). Textbooks for the teaching of algebra in lower secondary school: Are they informed by research? *Pedagogies: An International Journal, 5*(3), 187-201. doi: 10.1080/1554480X.2010.486154

Kilhamn, C. (2014). When does a variable vary? Identifying mathematical content knowledge for teaching variables. *Nordisk Matematikkdidaktikk - Nordic Studies In Mathematics Education, 19*(3-4), 83-100.

Küchemann, D. (1978). Children's understanding of numerical variables. *Mathematics in School, 7*(4), 23-26.

Marum, T., Isler, I., Stephens, A., Gardiner, A., Blanton, M. & Knuth, E. (2011). From specific value to variable: Developing students' abilities to represent unknowns. I L. R. Wiest & T. Lamberg (Red.), *Proceedings of the 33rd Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (s. 106-113). Reno, Nevada: University of Nevada.

Mathews, S. (1997). The Effect of using two variables when there are two unknowns in solving algebraic word problems. *Mathematics Education Research Journal, 9*(2), 122-135.

Oaks, J. (2007). Medieval Arabic Algebra as an Artificial Language. *Journal of Indian Philosophy, 35*(5), 543-575. doi: 10.1007/s10781-007-9026-4

Philipp, R. A. (1992). The many uses of algebraic variables. *Mathematics Teacher, 85*(7), 557-561.

Pournara, C., Sanders, Y., Adler, J., & Hodgen, J. (2016). Learners' errors in secondary algebra: Insights from tracking a cohort from Grade 9 to Grade 11 on a diagnostic algebra test. *Pythagoras, 37*(1), 1-10. doi: 10.4102/Pythagoras.v37i1.334

Radford, L. (1995). Before the other unknowns were invented: Didactic inquiries on the Methods and Problems of Mediaeval Italian Algebra. *For the Learning of Mathematics*, *15*(3), 28-38.

Sfard, A. (1995). The development of algebra: Confronting historical and psychological perspectives. *Journal of Mathematical Behavior, 14*(1), 15-39. doi: 10.1016/0732-3123(95)90022-5

Skolverket. (2012). Utökad undervisningstid i matematik: Hur en ökning av undervisningstiden kan användas för att stärka elevernas matematikkunskaper. Stockholm: Skolverket.

Skolverket. (2019a). *Läroplan för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet 2011: reviderad 2019.* (6:e uppl.) Hämtad 19 september 2019 från: https://www.skolverket.se/getFile?file=4206

Skolverket. (2019b). *Ämnesplan för matematik på gymnasienivå 2011: reviderad 2019.* Hämtad 17 september 2019 från: https://www.skolverket.se/sitevision/proxy/undervisning/gymnasieskolan/laroplan-program-och-amnen-i-gymnasieskolan/gymnasieprogrammen/amne/svid12_5dfee44715d35a5cdfa92a3/1530314731/syllabuscw/jsp/subject/MAT/9/pdf;jsessionid=39E96B59DC7899BD603872DDB59F560D

Ursini, S. & Trigueros, M. (2001). A model for the uses of variable in elementary algebra. I M. Van den Heuvel-Panhuizen (Red.), *Proceedings of the Twenty-fifth International PME Conference* (s. 327-334). Utrecht, Nederländerna.

Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variables. I A. P. Shulte & A. F. Coxford (Red.), *The Ideas of Algebra, K-12: 1988 Yearbook* (s. 8-19). Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.

Usmanov, Z., & Hodjiev, I. (1998). The legacy of al-Khwarizmi. *Quantum*, *8*(6), 26-27.

7 Appendix

Nedan följer ett lösningsförslag på Diofantos matematiska problem som presenterades i avsnitt 4.1.2. För att problemet ska bli mer aktuellt och lösningen mer allmängiltig tillåts alla reella tal som svar på uppgiften trots att svar innehållande negativa tal sannolikt ej var godtagbara då problemet formulerades.

Uppgift: Finn x, y ∈ **R** sådana att:

$$\begin{cases} x + y = a \\ xy = b \end{cases}$$

Där *a* och *b* utgör godtyckliga reella tal.

Anmärkning: Här är alltså a och b variabler som generella tal medan *x* och *y* utgör variabler som obekanta tal. Målet är således att beskriva de obekanta talen i termer av de generella talen a och b.

Lösning: Vi börjar med att konstatera att *a* alltid är delbar med två eftersom både talet självt och talet som erhålls inte måste vara ett heltal. Sedan införs det obekanta talet *z*, vilket möjliggör följande omskrivning:

$$a = (a/2 + z) + (a/2 - z)$$

En jämförelse med den första ekvationen visar att förslag på nya beteckningar för *x* och *y* alltså har identifierats. Vi använder oss nu av den andra likheten för att beräkna z:

$$(a/2 + z)(a/2 - z) = b \iff a^2/4 - z^2 = b \Rightarrow z = \pm\sqrt{a^2/4 - b}$$

Slutligen skriver vi in ett av värdena för *z* i *a*:s omskrivning för att finna godtagbara värden för *x* och *y*. Med det positiva värdet för *z* blir ett svar på uppgiften alltså:

$$x = a/2 + \sqrt{a^2/4 - b}, \quad y = a/2 - \sqrt{a^2/4 - b}.$$

Det framgår av svaret att det alltså saknas lösningar i de fall då $a^2/4 < b$, samt att det alltid finns lösningar då $b \leq 0$. Då svaret jämförs med pq-formeln framgår även att uppgiftsformuleringen i själva verket är ekvivalent med att lösa ekvationen $x^2 - ax + b = 0$ (för mer om detta samband, se Vietas formler).