



INSTITUTIONEN FÖR PEDAGOGIK OCH SPECIALPEDAGOGIK

LIKHETSTECKNET

Ett lektionsförsök om förståelsen av likhetstecknet
i årskurs 3 och årskurs 6.

Rasid Sacic och Sejla Mahmutovic

Uppsats/Examensarbete:	15 hp
Program och/eller kurs:	LAU 927
Nivå:	Grundnivå
Termin/år:	Ht 2019
Handledare:	Rolf Lander
Examinator:	Caroline Runesdotter

Abstract

Uppsats/Examensarbete: 15 hp
Program och/eller kurs: LAU 927
Nivå: Grundnivå
Termin/år: Ht 2019
Handledare: Rolf Lander
Examinator: Caroline Runesdotter

Nyckelord: Likhetstecknet, kritiska aspekter, learning study, kapacitetsupplevelse

Syftet med studien har varit att undersöka elevernas förståelse av begreppet likhetstecknet inom matematik i årskurs tre och sex. Utifrån syftet kommer fyra frågeställningar där färdigheter, kritiska aspekter och pedagogiska insatser efterfrågas.

Teori: I studien behandlas en del av forskning inom likhetstecknets kritiska aspekter, learning study, prestationstillit och kapacitetsupplevelse.

Metod: Eleverna besvarade först ett test om prestationstillit i matematik, sedan ett test om kapacitetsupplevelse om enbart likhetstecknet. Därefter genomfördes en lektion om likhetstecknet i varje klass, följt inom någon dag av prov 2.

Resultatet i studien visar att flera elever har otillräckliga baskunskaper inom matematik. Det har visat sig att elevernas kunskaper kan förbättras genom att de kritiska aspekterna tas upp under lektionerna. Vi har även registrerat ett positivt samband mellan en god kapacitetupplevelse och en god prestationstillit och goda resultat inom matematik för årskurs 6, däremot enbart med kapacitetsupplevelse för årskurs 3, eftersom testet i prestationstillit var för komplicerat för dem. Vi fann också att det fanns en korrelation mellan goda kunskaper inom svenska och goda resultat när det gäller förståelsen av likhetstecknet.

Förord

Vi vill börja med att tacka vår handledare professor Rolf Lander för hans vägledning och engagemang genom hela vårt arbete. I dessa svåra tider ställde han upp och svarade på alla våra frågor. För att komma fram till det rätta resultatet var vi tvungna att använda oss av olika statistikprogram. I början av arbetet tänkte vi att det skulle vara omöjligt att klara det och komma i mål. Men på grund av vår professors kunnande inom statistik nådde vi vårt mål.

Vi vill även tacka alla våra fantastiska kollegor som stöttade oss och delade med sig sina erfarenheter. Deras erfarenheter inom matematik var av stor betydelse för oss.

Slutligen vill vi tacka våra familjer för allt tålamod och förståelse under våra studier. Utan deras stöd hade vårt mål varit omöjligt.

Innehållsförteckning

1 Inledning.....	3
2 Syfte	4
3. Litteraturoversikt och teoretisk ingång om likhetstecknet och självkänsla inför prestationer.	5
3.1 Pedagogiska försök.....	5
3.2 Likhetstecknets betydelse och vanliga missuppfattningar.....	7
3.3 Learning study och Lesson Study	8
3.4 Variationsteori.....	9
3.4.1 Lärandeobjekt.....	10
3.4.2 Variationsmönster	10
3.4.3. Kritiska aspekter.....	11
3.5 Prestationstillit och kapacitetsupplevelse	11
4 Metod	13
4.1 Urval.....	13
4.2 Undersökningsmetoder.....	14
4.2.1 Beskrivning av provet	15
4.2.2 Beskrivning av testen	16
4.3 Bakgrundsdata om eleverna	17
4.4 Instrumentens reliabilitet.....	18
4.5 Linjära relationer mellan faktorer.....	20
4.5 Forskningsetiska aspekter.....	21
4.4 Genomförandet av lektionerna	23
4.4.1 Lektionen i årskurs 3	23
4.4.2 Lektionen i årskurs 6	25
4.6 Regressionsanalys	27
5. Resultat.....	29
5.1 Resultatet av prov 1	29
5.1.1 Likhetstecknets dynamiska betydelse = som det blir	29
5.1.2 Baskunskaper i matematik.....	30
5.1.3 Olikhetstecknets (\neq) betydelse	32
5.2. Resultatet av prov 2.....	33
5.2.1 Likhetstecknets dynamiska betydelse = som det blir	33
5.2.2 Baskunskaper i matematik.....	34
5.2.3 Olikhetstecknets (\neq) betydelse	35
5.3 Resultatjämförelse prov 1 och 2.....	35
5.3 Måtten på självkänsla	37
5.4. Regressionsanalyser	37

6 Slutdiskussion.....	50
Referenser.....	56
Bilaga 1. Föräldratillstånd.....	58

1 Inledning

Likhetstecknets innebörd är ett problem som är känt bland undervisande lärare i matematik i alla stadier på grundskolan. Detta problem bär många elever med sig redan från lågstadiet till högstadiet, utan att de förstår dess betydelse.

Enlig forskarna Bråting och Madej (2017) har svenska elever haft svårigheter med algebra ur ett historiskt perspektiv, men svårigheterna finns även betraktat ifrån ett internationellt perspektiv. Vidare tycker de att många nybörjarstudenter får problem med matematiken, orsaken är bristande kunskaper i algebra.

Internationella mätningar som PISA och TIMSS (som mäter elevers kunskap i matematik) visar att svenska elever har sämre resultat i algebra när man jämför med elever från andra länder sedan början av 1960-talet upp till 2011. Den bästa resultat som Sverige presterade var år 1995, men även då hade Sverige ett resultat som var sämre än det internationella genomsnittet (Bråting & Madej, 2017)

Detta examensarbete undersöker hur elever i åk 3 respektive åk 6 uppfattar likhetstecknet.

Under VFU:n, som en av oss genomförde i en grundskola i Angered, träffades undervisande lärare på matteinstitutions möte från årskurs 3 till årkurs 9. De lyfte upp frågan om likhetstecknets innebörd och förståelse. Lärarna berättade om likhetstecknets problem som många elever bär med sig under sin studietid. Lärarna redovisade olika svårigheter som de stötte på. Dessa diskussioner väckte vårt intresse så att vi blev intresserade av att ge ett litet bidrag till lärares och elevers förståelse i form av ett examensarbete.

Likhetstecknet nämns i Skolverkets styrdokument som är obligatorisk för alla lärare att följa efter kursplanen.

2 Syfte

Vårt syfte är att undersöka elevernas förståelse av begreppet likhetstecken inom matematiken i årskurs 3 och 6. Syftet uppnås genom ett prov av förmågan att klara kritiska aspekter vad gäller likhetstecknet, följt av en lektion i varje årskurs som försöker förklara innebörden i dessa kritiska aspekter för eleverna samt en eftermätning med samma prov. Provresultatet per individ undersöks även med elevernas självkänsla för matematik, deras kön och ålder samt vana vid svenska under kontroll.

Syftet ska besvaras genom dessa frågeställningar:

1. Vilka är de viktiga kritiska aspekterna om likhetsrelationen hos våra elever och hur kan de mätas i ett prov? Hur skiljde sig utfallet av lektionerna i årskurs 3 och 6 med avseende på elevernas förståelse av kritiska aspekter.
2. Vilka pedagogiska insatser kan göras under en lektion för att förbättra förståelsen av de kritiska aspekterna?
3. Hur utföll lektionen, vilka resultat uppnådde eleverna på provet efter lektionen samt i vilken mån kan lektionsinsatserna sägas vara orsaken till elevernas resultat i sista provet?
4. Hur går det att förstå betydelsen av olika bakgrundsfaktorer som ålder, kön och utländsk bakgrund för resultaten i proven?

3. Litteraturöversikt och teoretisk ingång om likhetstecknet och självkänsla inför prestationer.

3.1 Pedagogiska försök

Vi skall i detta avsnitt se närmare på fenomenet pedagogiska försök. Sakinnehållet har vi först hämtat från Lander & Rosén (2020, kap. 16).

Pedagogiska försök innebär att via lärares professionella färdigheter och metoder åstadkomma effekter på elevers lärande och utveckling. De kan traditionellt ha formen som experiment eller kvasi-experiment. Experiment innebär att deltagarna fördelas på kontroll- och försöksgrupper med hjälp av slumpen, därmed görs grupperna lika i utgångsläget. När man inte kan göra så måste man hålla ev. skillnader mellan grupperna under kontroll genom att mäta dem samtidigt med mätningen av den faktor man försöker påverka. Försöket kallas då kvasi-experiment.

Vi har gjort kvasi-experiment i den meningen att vi förutom förprovet också mätt bakgrundsfaktorer som elevernas prestationstillit och kapacitetsupplevelse, deras ålder och kön och vilket språk de är mest vana vid. Dessa kan vi därmed hålla under kontroll vid analysen av hur mycket man lärt sig. Däremot har vi ingen kontrollgrupp, utan alla eleverna i båda klasserna tillhör försöksgrupper. Man kan säga att det finns en kontrollsituation, dvs elevernas kunskap före lektionen, som ju särskilt syftade till att lära dem mera om likhetstecknet.

På detta fält har forskningsgrenen "teaching effectiveness research" varit aktiv sedan flera decennier. "The process product model" och "the cognitive learning process model" är två breda typer av modeller som Seidel och Shavelson (2007) har urskilt i en metastudie. Den första modelltypen handlar om vad som förändras hos eleverna och om processerna som leder dit (t.ex. "problem-based learning", "time-on-task"). Bakgrundsfaktorer så som kön, socioekonomiska betingelser, ålder etc. är dessutom något detta ställs i relation till, dvs faktorer som hålls under kontroll.

Metodologiskt dominerade först stora enkätstudier med sofistikerade regressionsanalyser. Sedan ökade antalet kvasi-experimentella och experimentella försök samtidigt som man mer och

mer gick över till den andra metodtypen, den om kognitiva läroprocesser. Enkätstudierna visade först på ganska låga effekter på eleverna. Detta beror dels på att metodiken med enkäter endast ger ungefärliga data om lärandet, dels på grund av att designen undersökte effekter på elevers status istället för på deras förändring. Undervisningsmetoder har på kort sikt relativt litet inflytande på elevernas status jämfört med olika bakgrundsfaktorer. Men på sikt leder förändring i kunskaper till förändrad status genom en successiv inverkan av metoderna.

I vårt försök mäter vi förändring i kunskapen genom att vi har både för- och efter prov.

En annan förändring i upplägget av pedagogiska försök har vi läst om hos Nyvaller (2015, kap. 3). De ovan nämnda försöken drevs, och drivs fortfarande, framför allt som centralt planerade insatser där pedagoger genomför försöken i sina klassrum ledda av experter medan forskare tar hand om instrument och analyser. Det nya är mera problemlösande studier, som utgår från de praktiska pedagogernas vardag och där dessa också genomför forskningen ensamma eller i samarbete med forskare. En vanlig form för detta är aktionsforskning. Nyvaller talar om två olika "förändringsstilar".

Den första förändringsstilen är en teknologisk förändringsstil. *Den teknologiska förändringsstilen sätter fortfarande tydliga spår i 2000-talets syn på ledning och administration.* En teknologisk stil dominerade fram till och med sjuttioalet. De sätter fokus på tekniska innovationer, redskap och olika metoder som stimulerar utveckling. Detta leder till förändringsprocesser. I dagens läge är det teknologiska perspektivet inte lika dominant som det var tidigare, men fortfarande spelar det en betydande roll, speciellt i IT-revolutionernas tid (Nyvaller, 2015).

Den andra förändringstilen handlar om självreglering och lärande i team. Det är viktigt för lärare att samarbeta med sina kollegor och återkoppla erfarenheter av undervisningen. Detta kallas för kollegialt lärande. Individets handlingar kan bäst betygsättas och värderas av hennes kollegor. Lärarna sitter med varandra när de utbyter erfarenheter och kunskaper för att utveckla undervisningen och lösa eventuella problem. Det kollegiala lärandet kräver fantasi och att arbetskamrater som i en krets med varandra frågar efter ny kunskap (Nyvaller, 2015).

Utgångspunkten för erfarenhetsutbytet är dels den självvärdering som är gjord på avdelningen, dels yrkeskamraternas erfarenheter i det pedagogiska arbetet. Utbytet av kunskaper avser att fördjupa den pedagogiska färdigheten hos alla parter, men det gäller även att stimulera

kunnandet att kritiskt och produktivt undersöka utveckling, handledning och undervisande (Nyvaller, 2015).

3.2 Likhetstecknets betydelse och vanliga missuppfattningar

En man som blev känd för sin bok om algebra var den arabiske vetenskapsmannen al-Khwari-zmi. Han levde under tiden 680 – 750 e. Kr. Hans bok om algebra hjälpte människor att lära ut mönster, hur man löser vissa praktiska problem (McLeish, 1992). Han är känd också för att infört uttrycket ”algoritm”, en i dagens datasamhälle oundviklig term. Minst från den tiden har människor strävat efter att behärska likhetstecknet.

Nationalencyklopedin beskriver likhetstecknet som en symbol (=) som betecknar att två uttryck har samma värde, till exempel $2x=6$. Där är $2x$ är lika värt som 6 (NE, 2019).

Likhetstecknet skrivs mellan tal och utsagor som är lika. Du skriver = och säger ”är lika med”: $3+1=2+2=5-1=2*2=4$. Alla talkombinationer på var sin sida om likhetstecknen får samma resultat (Marand, 2007).

Likhetstecknet är en symbol som elever ofta tolkar på fel sätt, men de behöver veta att likhetstecknet ska tolkas som lika mycket. Om elever uppfattar likhetstecknet på ett rätt sätt kommer de att lättare lösa ekvationer. En missuppfattning av likhetstecknets betydelse är att "det blir något" och en annan missuppfattning är att det är till "det högra ledet av likhetstecknet" som man ska skriva svaret. (Ahlberg, 2000).

Att elever får en korrekt uppfattning av likhetstecknets betydelse redan från årskurs ett är otroligt viktigt. Därför behöver alla lärare lägga vikt vid att upprepa för sina elever väldigt ofta att likhetstecknet betyder att det ska vara samma värde på båda sidor om likhetstecknet.

För att eleverna skall förstå likhetstecknets betydelse är det viktig att uppgifterna varierar så att kvoten, differensen, summan eller produkten ligger på olika sidor av likhetstecknet. Till exempel: $15-5 = 10$ eller $10 = 15-5$, $10 / 2 = 5$ eller $5 = 10/2$. $5+10 = 15$ eller $15 = 5+10$. $4*2 = 8$ eller $8 = 4*2$.

Om vi skriver en talkedja på tavlan $14 = 6 + 8 = 16 - 2 = 3 + 4 + 7 = 7 * 2 = 14$, så kan vi sedan täcka över med en lapp, så att det ser ut så här: $14 = \quad + 8 = 16 - \quad = 3 + 4 + \quad = 7 * \quad = 14$ (Brorsson, 2012).

En studie som gjordes av Hatikudur, Shanta, Alibali & Martha (2010) visade att det finns ganska många elever på låg- och mellanstadiet som har en dynamisk eller operationell uppfattning att likhetstecknet står för att det blir något och att svaret ska skrivas efter. Forskarna gav eleverna ekvationen, $4+3+5=_ \quad +5$ och märkte att många elever adderar alla talen i ekvationen, eftersom de fick svaren 17 eller 12. Vissa adderade ihop alla talen före likhetstecknet, detta kallade man att eleverna ser likhetstecknet dynamiskt operationellt. De elever som uppfattar likhetstecknet som dynamiskt ("det blir") kommer att ha svårigheter senare när de ska lösa olika ekvationer (Hattikudur, Shanta, Alibali, & Martha, 2010).

Den andra uppfattningen av likhetstecknet, som förekommer hos eleverna, är den strukturella uppfattningen eller en statisk uppfattning. Likhetstecknets betydelse enligt den uppfattningen är statisk, vilket innebär att värden på båda sidor av likhetstecknet är lika mycket t ex $35 + 15 = 55 - 5$ (Bergsten, 1997). Likhetstecknet står för ekvivalens, vilket innebär att vänster och höger led är olika uttryck för samma tal (Bergsten, 1997).

I TIMMS 2007 visar rapporten att eleverna använder dynamiska uppfattningar av likhetstecknet dvs $3+2 = 5+2$ (= som ordet det blir). Det är en uppfattning, som elever kan ha till och med högstadiet.

3.3 Learning study och Lesson Study

Learning study är ett exempel på forskningsmetod där man involverar lärare hela tiden i processen och också en modell som förenar forskning, skolutveckling och lärarfortbildning. Lärare analyserar ämnesdidaktiska kunskaper genom att analysera sina lektioner, de reflekterar, planerar och reviderar lektioner tillsammans.

Vad är syftet med en Learning study? Professor Angelica Kullberg (2019) svarar: -"Öka elevernas lärande / måluppfyllelse. – Kunna använda en tänkt teori. – Få ett kollegialt språk. – Få ett mer kritiskt och vetenskapligt förhållningsätt till undervisning. – Lärarna ska själva

kunna driva utvecklingen". (Kullberg, 2019). Learning study i olika forskningsstudier har fått framgångsrika resultat. Lärarens undervisningsförmåga och ämnesdidaktiska kompetens ökar kontinuerligt genom att en nära förbindelse mellan elevernas lärande och undervisningens innehåll möjliggörs (Skolverket, Utökad undervisningstid i matematik. Rapport 378, 2012).

Enlig professor Ulla Runesson startades Learning study som ett forskningsprojekt (Skolverket, Utökad undervisningstid i matematik rapport 378, 2012) i samarbete med lärare med avsikt att förbättra elevernas lärande utifrån en evig fråga: Hur kan man undervisa på bästa sätt om någonting som är svårt att lära sig? (Runesson, 2012) .

Lesson Study har sitt ursprung i Japan. I kollektivt arbete planerar, arbetar, observerar och utvärderar lärare tillsammans. Skillnaden mellan Lesson Study och Learning Study är att Lesson Study har ingen explicit teori och kan ha olika syften i fokus. Learning Study har i fokus lärandeobjekt som eleverna ska lära sig och variationsteorin som hjälper lärare att utveckla undervisningen, en praktisk teori för att designa undervisningen. (Runesson, 2012).

Likheten mellan Lesson Study och Learning Study är det kollegiala lärandet och den cykliska processen av planering, genomförande, utvärdering och revidering.

Allra viktigast i Learning study är, enligt Pernilla Nilsson, docent på högskolan i Halmstad, att den handlar just om lärandet. Vad innebär det att kunna just det här området om man tar t. ex likhetstecknet? Vilka problem upplever eleverna med att förstå likhetstecknet som begrepp? Vilka är de kritiska aspekterna som gör att det blir lätt eller svårt att lära likhetstecknet som begrepp? Learning study är en arbetsmodell för lärare för att förbättra sina lektioner och visa elevers kunskap genom att på ett metodiskt sätt i en mindre grupp undersöka vad som gör det svårt eller vad som gör lätt att lära ett bestämt lärandeobjekt (Nilsson, 2019).

3.4 Variationsteori

Variationsteori är en relativt ny teori om lärande som har sitt ursprung i fenomenografi. Vad är fenomenografi? Fenomen betyder "som det visar sig" och grafi betyder "beskriva i ord eller bild", båda två orden har ursprung i grekiska språket (Marton, 2000, s. 145). Det viktigaste i fenomenografi är människors sätt att erfara fenomen i sina världar, men i variationsteori är det hur människor sätter fokus på lärandeobjekt. "Fenomenografi är snarare ett sätt, en ansats

för att identifiera, formulera och hantera vissa typer av forskningsfrågor, en specialisering som framför allt uppmärksammar frågor som är relevanta för lärande och förståelse i en pedagogisk miljö” (Marton, 2000, s. 147).

Varje lärandeobjekt har ett visst antal aspekter, men för eleverna är det viktigt att beakta de så kallade kritiska aspekterna. Ryberg (2014), som hänvisar till Marton (2004), säger, att de kritiska aspekterna uppfattas via undersökning av erfarenhetsmässigt material till exempel i form hur själva lektionen genomförs eller på vilket sätt elever ger svar när de får intervjuer eller tester (Ryberg, 2014).

3.4.1 Lärandeobjekt

Den viktigaste termen inom variationsteori är lärandeobjekt, ”the object of learning”. Enligt Ling (2014) kallas det innehåll som eleverna skall lära sig för lärandeobjekt. Den viktigaste inom variationsteorins perspektiv är vad som lärs. Direkta lärandeobjekt riktar sig mot innehållet som det som lärare vill att eleverna ska lära sig, t ex inom algebra, att eleverna ska lära sig begreppet likhetstecken (Vikström, 2005).

3.4.2 Variationsmönster

Lärandeobjektet refererar till variationsmönster. Lärandeobjektet kan skapas genom variationsmönster i den pågående undervisningen, men också genom tidigare kunskap som kan ha gett behövlig variation. Lärandeobjektet utgör begränsningen för vad som är möjligt att lära i en viss situation. Vad är variationsmönster? Variationsmönster används i undervisningen för att lyfta fram det som är kritiskt hos ett lärandeobjekt med hjälp av variation. För att förstå vad något är måste man förstå vad något inte är. I detta sammanhang, när det gäller lärandeobjekt ”likhetstecknet”, lyfter man fram vad som inte är lika mycket på båda sidor av likhetstecknet. T ex $5 + 4 \neq 8$, Olikhetstecknet är kontrasten till likhetstecknet Abramsson (2016). Abramsson skriver att det finns en trio av variationsmönster. Dessa tre är generalisering, kontrast och fusion. Generalisering är att ta upp en enda kritisk aspekt för ett lärandeobjekt på olika sätt, t.ex. att förstå att siffror betyder olika trots att de gäller olika saker. Fusion är att variera flera kritiska aspekter samtidigt. Abramsson fann under en lektion i en klass i årskurs 3 att inte alla i denna trio är nödvändigt för förståelse av en kritisk aspekt, men elevernas förståelse är beroende av att möta de kritiska aspekterna med något av de tre variationsmönstren i sin undervisning (Abramsson, 2016).

3.4.3. Kritiska aspekter

Varför är det viktigt att eleverna behöver veta och urskilja kritiska aspekter? Jo, för att de ska förstå och lära sig likhetstecknet som begrepp. Lärarna måste ta reda på varför och vad som ligger bakom ett felaktigt svar och vad det är som eleverna inte har förstått. Det som är kritiskt för vissa elever behöver inte vara det för andra elever (Maunula, Magnusson, & Echevarría, 2011).

Under en inlärningsprocess är det viktigt att lärare urskiljer de olika kritiska aspekterna. Läraren måste synliggöra hos ett lärandeobjekt de kritiska aspekterna för att eleverna ska kunna förstå det (Lo, 2014).

3.5 Prestationstillit och kapacitetsupplevelse

När du inte granskar dig själv som person utan istället gör en bedömning av vissa av dina förmågor kan det handla om kapacitetsupplevelse eller prestationstillit. Begreppen är översättningar av self efficacy resp. academic self concept. Vi har lånat referenserna i avsnittet från (Lander, 2013).

Prestationstilliten och kapacitetsupplevelsen har en stark anknytning till skolarbete i sin helhet och inom ett specifikt ämne t ex matematiken, men de är inte samma mått på helt och Skolverket (2003). Prestationstillit och kapacitetsupplevelse ska alltid relateras till ett specifikt huvudområde, vilket är en huvudregel.

Lander (2013) hänvisar till Knoblauch och Hoy (2008), som säger att elever med högre kapacitetsupplevelse ger sig in i förändringar med större energi, eftersom de ej känner oro eller rädsla för att misslyckas. Enligt teoretikern Bandura ska jämförelsen med andra hållas utanför måtten på kapacitetsupplevelsen

Det finns framför allt fyra källor som kapacitetsupplevelsen bygger på: social övertalning, känslor och kroppsliga signaler (t.ex. ängslan för matematik, som många hyser), tidigare erfarenheter av att lyckas med sina prestationer och slutligen, social övertalning och särskilt din upplevelse av hur människor du vill likna (modeller) lyckas med vad de företar sig. Lander (2013) hänvisar till Bandura (1997, s 431), som hävdar att tron på sin förmåga präglar människan och dess beteende och påverkar vilka sociala nätverk du väljer att ingå i.

Begreppet ”academic self-concept”, dvs prestationstillit, kan mätas med påståenden så som ”jag är bland de bästa i klassen i matematik” och ”jag brukar vara bra i matematik”. Om du då jämför med ”self – efficacy”, alltså kapacitetsupplevelse, är skillnaden att du i måttet för kapacitetsupplevelse frågar om flera olika och mera specifika matematiska färdigheter och kunskaper och för prestationstillit istället gör en allmän själv bedömning i matte och jämför dig med andra eller vad andra tycker. Själsäkerhet som prestationstillit utgår från teorin om academic self concept (Marsh, Walker & Debus, 1991).

Prestationstilliten innebär en allmän skattning av sin förmåga. Det måttet är ganska jämförbart mellan åldrar och skolor (Skolverket, 2003, s. 48).

Lander (2013) hänvisar till Ferla m.fl. (2006) att kapacitetsupplevelsen ger en bättre prediktion för faktiska prestationer i matematikämnet än prestationstillit, men att elevers prestationstillit ändå påverkar kapacitetsupplevelsen och att prestationstilliten ger en bättre prediktion för intresse och känslor inför ett ämne. Det finns samband mellan ålder och kapacitetsupplevelse. De som är äldre har ofta högre kapacitetsupplevelse.

4 Metod

Studiens undersökningsmetod har inspirerats av Learning study, men den omfattar bara en lektion mot Learning studies normalt tre. Undersökningen utfördes i två olika skolor i Västra Götalandsregionen där eleverna har olika social och etnisk bakgrund. Eleverna testades först med enkätsfrågor om prestationstillit och fick även frågor om sin bakgrund. I nästa steg i undersökningen svarade eleverna på enkätfrågor om kapacitetsupplevelse. Dagen efter löste eleverna prov 1 med tolv uppgifter om likhetstecknets betydelse. Lektionen om likhetstecknets betydelse har eleverna sedan haft med ordinarie matematiklärare medan vi observerade. Efter den genomförda lektionen har eleverna testats igen med samma provuppgifter som i prov nr 1.

4.1 Urval

I studien observerades en lektion i årskurs 3 och en lektion i årskurs 6 på två olika skolor i Västra Götalandsregion. Urvalet av årskurser grundades i syftet att jämföra årskurs 6 med år 3. Om elever i år 6 gör samma misstag när det gäller likhetstecknet som elever i år 3 kan det leda till att elever från år 3 kommer att göra samma fel när de kommer i år 6, om vi inte upptäcker deras fel i rätt tid eller inte försöker att rätta till dem.

Rasid observerade klassen i årskurs 6. Alla elever är födda i Sverige, men deras föräldrar är ursprungligen från olika länder. Detta betyder att deras modersmål inte är svenska och de pratar hemma både svenska och sina föräldrars språk. Sejla observerade i årskurs 3 i en annan skola, där alla elever är födda i Sverige och deras modersmål är svenska.

Urvalet av klasser var ett bekvämlighetsurval. På skolan har Rasid haft VFU-utbildning och elever från detta klassrum känner honom väl. Läraren som undervisar i detta klassrummet är en behörig lärare i matematik och har arbetat med samma elever redan från år 3. Sejla genomförde undersökningen på en annan skola, där hon varit anställd som fritidspedagog och lärarassistent i flera år. Skolorna ligger i två olika områden i Göteborgs kommun.

4.2 Undersökningsmetoder

Första dagen gjorde vi en **enkät om prestationstillit** där vi också ställde några frågor till eleverna om bakgrundsfaktorer:

- Vilken klass går du?
- Är du pojke eller flicka?
- Vilket år och vilken månad föddes du?
- Vilket språk talar du mest hemma hos dig? (1) mest svenska; (2) mest mina föräldrars språk; (3) båda två lika mycket.

Ålder mättes alltså som totala antalet månader man levat fram till den veckan då prov 1 gavs. Även skillnader under ett år kan spela roll för dessa ungdomar, som utvecklas snabbt.

Andra dagen hade vi ett **självskattningstest av kapacitetsupplevelse** för årskurs 3 och 6. Med det här diagnostestet ville vi undersöka hur säkra de kände sig på att lösa tolv matematiska uppgifter. De behövde inte räkna ut uppgifterna, utan bara uppskatta hur de trodde att de klarar av att lösa dessa uppgifter. De fick se samma uppgifter som själva provet hade.

Den tredje dagen fick de göra **prov 1** (diagnostest) med tolv matematiska uppgifter. Eleverna fick max 8 minuter för att göra prov 1. Själva provet är anpassat för deras ålder. Man förväntar sig att eleverna, som har förstått likhetstecknets innebörd, skulle klara lösa uppgifter under 8 minuter. De elever som behöver längre tid, kan tydas som att de inte behärskar begreppet likhetstecknet med flyt. Vi skrev i resultatblanketten poängen 1 om uppgiften var korrekt löst, 0 om den är felaktigt löst och satte en tom cell () om uppgiften var överhoppad. I senare analyser satte vi 0 poäng även för en överhoppad uppgift.

Den fjärde dagen hade vi en **undervisningslektion** om likhetstecknet. Klasslärare undervisade lektionen medan vi observerade, Rasid i årskurs 6 och Sejla i årskurs 3.

Den femte dagen gjorde vi **prov 2**, det var samma prov som prov 1, där vi ville veta om resultatet från det andra provet blivit bättre jämfört med resultatet från första provet. Detta prov tog också c:a 8 minuter. Lektionen om likhetstecknet förväntades påverka till ett bättre resultat i prov 2, eftersom eleverna hade fått undervisning om likhetstecknet grundad i kritiska aspekter.

4.2.1 Beskrivning av provet

Tablå 1 visar de tolv provuppgifterna om likhetstecknet. Alla provuppgifter är anpassade för elevernas ålder. Tre uppgifter är tagna från Matematiklyftet, som byggde på boken av Carpenter, Franke och Levi (2003), översatta och bearbetade av Görel Sterner. Övriga har vi hittat på själva.

Tablå 1. Provuppgifterna om likhetstecknet. Samma prov gavs före och efter lektionen i åk 3 och 6.

		Namn och efternamn _____
Fyll i talen som fattas på rader		
Hjälpmedel: Penna och sudd		Tid: 5 – 8 minuter
Uppgift 1.	$8 + 4 = (\quad) + 5$	
Uppgift 2.	$57 + 86 = (\quad) + 84$	
Uppgift 3.	$7 = 3 + (\quad) + (\quad)$	
Uppgift 4.	$11 = (\quad) - 4$	
Uppgift 5.	$8 = (\quad) - 8$	
Uppgift 6.	$27 + 4 = (\quad) + (9)$	
Uppgift 7.	$9 = 4 + (\quad) + 3$	
Uppgift 8.	$15 \neq 17 - (\quad)$	
Uppgift 9.	$8 = (\quad) + 8$	
Uppgift 10.	$2 + (\quad) + 1 = 6$	
Uppgift 11.	$13 - (\quad) + 12 = 12$	
Uppgift 12.	$31 = 0 + 3 + (\quad)$	
LYCKA TILL		

Enligt skolverkets kommentar till kursplanen i matematik, är eleverna från åk 3 till åk 6 skyldiga att kunna följande om likhetstecknets innebörd: *I kunskapsområdet ingår kunskaper om likhetstecknets innebörd, bokstavsbeteckningar och variabel begreppet. Tillsammans med kunskaper i aritmetik är detta viktiga byggstenar inom det algebraiska området. De ligger till grund för elevernas förståelse av ekvationer, algebraiska uttryck, funktioner, formler och grafer* (Skoverket, 2020).

4.2.2 Beskrivning av testen

I testet om *prestationstillit* kommer alla frågor från den internationella mätningen TIMSS (Skolverket, 2008, i Elfstrand Trigueros, 2018). Se tablå 2.

Tablå 2. Bakgrundsfrågor och frågor om prestationstillit till eleverna i åk 3 och 6.

ENKÄT OM PRESTATIONSTILLIT

Några frågor om dig själv:

Vilken klass går du? _____

Är du pojke eller flicka? _____

Vilket år och vilken månad födes du? _____

Vilket språk talar du mest hemma hos dig? (Kryssa ett svar)

mest svenska

mest mina föräldrars språk

båda två lika mycket

Hur mycket instämmer du i följande om matematik?

Kryssa bara i en kvadrat på varje rad

•	Stämmer precis	Stämmer till en del	Stämmer både och	Stämmer ganska dålig	Stämmer inte alls
1. Matematik är enkelt för mig.					
2. Min lärare säger att jag klarar mig bra i matematik.					
3. Jag är inte bra i matematik.					
4. Jag är bra på att lösa svåra matteuppgifter.					
5. Matematik är svårare för mig än för många av mina klasskamrater.					
6. Matematik är svårare för mig än något annat ämne.					

För testet i *kapacitetsupplevelse* fick eleverna se samma frågor som provet innehöll, men nedanstående instruktion:

Med det här diagnostestet vill jag undersöka hur säkra ni känner er på att lösa matematiska uppgifter. Ni kommer **inte** att räkna ut uppgifterna utan bara uppskatta hur ni tror att ni klarar av att lösa dessa uppgifter.

Hjälpmedel: Penna och sudd. Viktigt: Ingen miniräknare. Tid: 5 – 8 minuter

Ringa in det alternativ som ni tycker passar in bäst.

OBS. Ni får bara ringa in en siffra per fråga!

Jag vet att jag inte klarar uppgiften.	1
Jag tror inte att jag klarar uppgiften	2
Jag är osäker på om jag klarar det eller inte	3
Jag tror att jag klarar det eller inte	4
Jag är absolut säker på att jag klarar uppgiften	5

4.3 Bakgrundsdata om eleverna

Klassen i årskurs 3 hade 26 elever och den i årskurs 6 hade 24 elever, alltså tillsammans 50 elever. När det gäller bakgrundsdata finns inget internt bortfall, dvs det finns uppgifter om alla elever. I årskurs 3 var flickor och pojkar ungefär lika många, men pojkarna i årskurs 6 var dubbelt så många som flickorna. När det gäller språk, alla elever i årskurs 3 pratar mest svenska medan 7 elever i åk 6 pratar mest svenska sammanlagt sex pojkar och en flicka. Sju elever i åk 6 pratar mest föräldrars språk medan 10 elever i åk 6 pratar båda två lika mycket.

		flicka	pojke	totalt
åk 3	mest svenska	12	14	26
åk 6	mest svenska	1	6	7
	mest föräldraspråk	3	4	7
	båda språken lika	4	6	10
	S:a åk 6	8	16	24

4.4 Instrumentens reliabilitet

Vi har alltså använt tre instrument, enkäterna om prestationstillit och kapacitetsupplevelse samt provet. Treorna fick dock problem med att tolka frågorna om prestationstillit.

Fråga 1 om prestationstillit (som vi i datafilen kallat f11) lyder Matematik är enkelt för mig. Svartalternativen går från Stämmer precis! (som fått värdet 1 i datafilen), stämmer till en del (värde 2) etc. till stämmer inte alls (värde 5). Fråga 3 (f13) lyder: Jag är inte bra i matematik. Stämmer precis! får värdet 1, stämmer till en del får värdet 2 etc. Detta är de värden vi knappat in i datafilen, men de båda frågorna är ju vända åt olika håll. Ett högt värde på f11 visar en låg prestationstillit, ett högt värde på f13 visar en hög prestationstillit. Korreleras dessa frågor med varandra blir resultatet negativt och då kan de inte samsas i samma mått. Alltså måste några frågors skala vändas. Det är det vi har gjort i SPSS med r11, r12 och r14. Nu har de fått Stämmer precis med värdet 5, dvs ett högt värde precis som de icke-vända frågorna.

Men när eleverna satt med testet framför sig, så måste de själva lista ut att ibland var Stämmer precis ett positivt svar och ibland ett negativt svar beroende på hur frågan var formulerad.

Detta klarade sexorna, men inte så många treor. Man kan se det på hur de vända frågorna korrelerar med de omvända. De hänger bra samman för sexorna, men inte för treorna.

Därför kunde inte alla frågorna i testet användas. För sexorna hade det gått bra, men då hade testen för de två årskurserna blivit rätt olika. Nu valde vi att sätta ihop prestationstillit med bara de frågor som hade höga korrelationer och klarade Cronbachs alfa-test. Det gjorde f13, f15 och f16 för båda årskurserna, men sexorna behövde tillägget r12 för att bli bra.

Åk 3. Reliabilitet för måttet prestationstillit

Reliability Statistics			Inter-Item Correlation Matrix			
	Cronbach's Alpha Based on Standardized Items	N of Items		F13	F15	F16
Cronbach's Alpha	,838	3	F13	1,000	,508	,606
			F15	,508	1,000	,790
			F16	,606	,790	1,000

Åk 6. Reliabilitet för måttet prestationstillit.

Reliability Statistics			Inter-Item Correlation Matrix			
Cronbach's Alpha	Cronbach's Alpha Based on Standardized Items	N of Items	F13	F15	F16	r12
,758	,774	4	1,000	,558	,473	,596
			F15	1,000	,191	,450
			F16	,473	1,000	,499
			r12	,596	,450	1,000

Här är Cronbachs alfa för kapacitetsupplevelsen i de två årskurserna. Korrelationerna är mycket höga och hoppas över.

Reliability Statistics

årskurs	Cronbach's Alpha	Cronbach's Alpha Based on Standardized Items	N of Items
3	,866	,869	12
6	,942	,946	12

Vi hade vissa problem med Cronbachs alfa när det gällde sexornas provdata. De uppgifterna som eleverna hade löst med alla rätt fick vi inte använda i analysen, enligt SPSS därför att de saknade variation. Då kan man istället använda test-retestreliabilitet, dvs att man låter måtten korrelera med varandra över en viss tid och ser hur nära de ligger varandra. Man vill ha lagom hög korrelation. Eftersom en lektion ägnad åt att förbättra provresultatet låg emellan, så vill man inte ha för hög korrelation, ty det innebär ju att föga har hänt. Vi hävdar att proven är reliabla också med en test-retest korrelation på 0,88 för årskurs 3 och 0,77 för årskurs 6. Här gäller inte samma gränsvärden som för Cronbachs alfa, men under 0,50 hade inte varit bra.

På grundval av dessa analyser av reliabilitet har vi skapat faktorer. För prestationstillit och kapacitetsupplevelse har medelvärdena för de enskilda elevernas resultat lagts samman, så att de blivit mellan 1,0 – 5,0, men för proven har de enskilda värdena bara summerats till ett värde mellan 1 och 12 för resp. individ.

4.5 Linjära relationer mellan faktorer

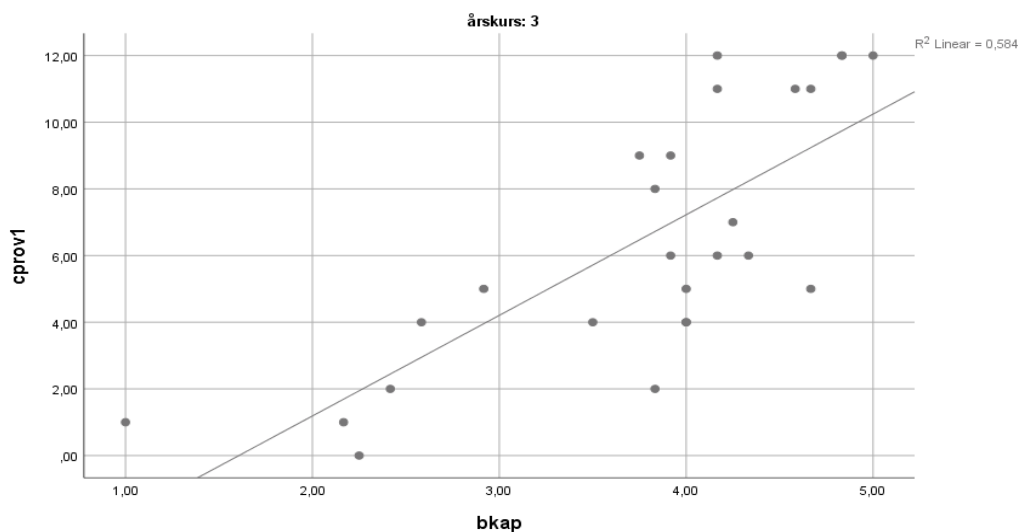
Om man skall göra regressionsanalys eller korrelationsanalys, så måste man ha åtminstone approximativt linjära samband mellan de oberoende faktorerna (X) och den beroende faktorn (Y). Det går att kontrollera genom att låta SPSS göra prickdiagram.

Alla samband mellan prov 1 och 2 samt mellan kapacitetsupplevelse och prov 1 resp. prov 2 är linjära för båda årskurserna.

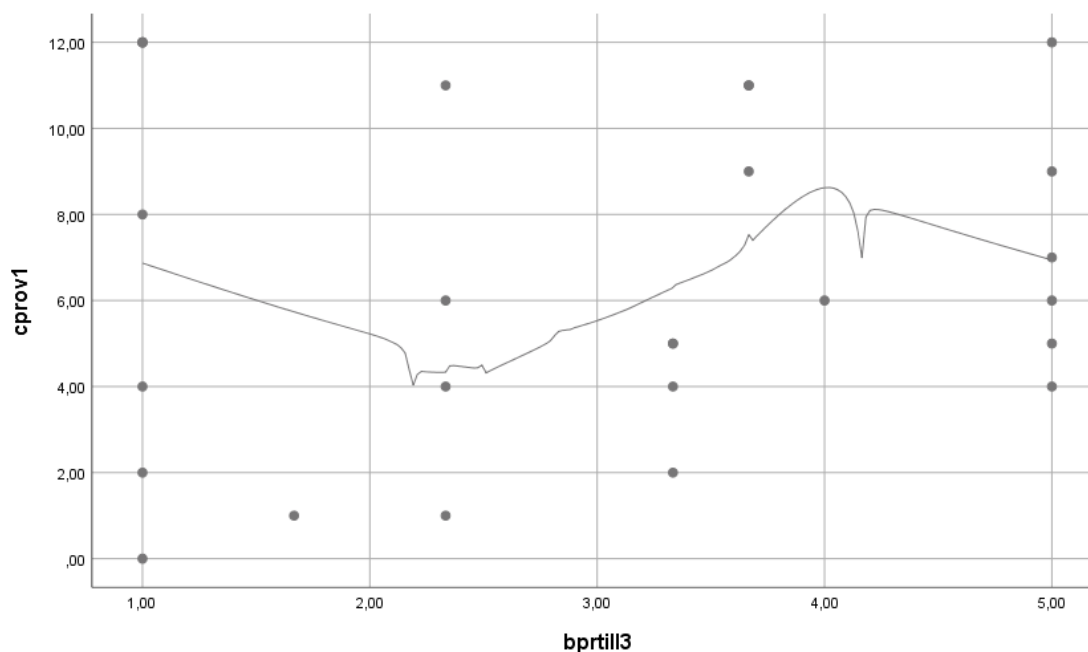
Däremot är sambanden för årskurs 3 mellan prestationstillit och prov 1 och 2 något kurviga. Figur 1 visar sambandet för prov 1 och prestationstillit i trean. Sambandet prov 2 och prestationstillit för årskurs 3 ser ungefär likadant ut. Årskurs 6 har dock linjära samband mellan proven och prestationstillit.

I figur 2 har fyra elever (den översta pricken har tre st) med extremt dålig prestationstillit ändå presterat rätt bra eller mycket bra på provet och tre med mycket bra prestationstillit har presterat sämre än förväntat. Det har fått regressionslinjen att böja av uppåt längst till vänster och nedåt längst till höger. I mitten av figuren är sambandet approximativt linjärt. Detta är inte bra i en vanlig regressionsanalys, det minskar det potentiella sambandet. Det får konsekvenser för hur vi skall genomföra regressionsanalysen. Vi har valt att göra prestationstillit för årskurs 3 till en dummyvariabel. Alla individer med värden $< 3,0$ har fått dummyn 0 och alla med vär-

Figur 1. Prickdiagram mellan kapacitetsupplevelse och prov 1 i årskurs 3. Regressionslinje inlagd.



Figur 2. Prickdiagram mellan prestationstillit och prov 1 i årskurs 3. Regressionslinje inlagd (s.k. loess-linje, som visar "lokala samband", dvs för några näraliggande individer i taget).



värden $\geq 3,0$ har fått dummy 1. I regressionsanalysen visas resultatet för dummy 1 som en jämförelse med dummy 0, vars värden inte visas (Lander & Rosén, 2020, kap.6.5).

4.5 Forskningsetiska aspekter

Det är jätteviktigt när man gör något forskningsarbete, att man tar hänsyn till vissa forskningsetiska aspekter. Enlig Stukat (2012) finns det fyra forskningsetiska aspekter: a) informationskravet b) konfidentialitetskravet c) samtyckeskravet och d) nyttjandekravet.

- a) **Informationskravet** – De som ingick i studien informerades om studiens syfte. Att delta alltid var frivilligt och deltagare hade rätt att när som helst att avbryta sitt deltagande i undersökningen. Undersökningens syfte och tillvägagångssätt presenterades för varje deltagare innan de godkände sitt deltagande.
- b) **Samtyckeskravet** – Ordinarie lärare har informerat (se bilaga 2) elevernas föräldrar om själva undersökningen där vi har fått föräldrarnas och elevernas samtycke för deltagandet i undersökningen. Samtycket gäller både för enkät och

intervjuer. Klasslärare samlade in alla föräldrarnas samtycke. Ingen av föräldrarna nekade samtycke, så det betyder att alla föräldrar godkände samtycke.

- c) **Konfidentialitetskravet** – Vi informerade alla elever att alla uppgifter kommer att bli anonyma. Alla uppgifter kommer att behandlas konfidentiellt.

- d) **Nyttjandekravet** – All information som samlades under undersökningen är i studiesyfte och forskningsändamål. Resultat kommer att återkopplas till deltagande skolor i form av föreliggande uppsats. Resultatet kommer eventuellt att spridas i läroböcker och tidningsartiklar.

4.4 Genomförandet av lektionerna

4.4.1 Lektionen i årskurs 3

Lärare: Vad kommer ni ihåg om likhetstecknets betydelse?

Elev: Det är som en våg. Det ska bli lika mycket på båda sidor. Om man har ett på ena sidan av likhetstecknet då så ska det bli ett på andra sidan av likhetstecknet.

Läraren visade = och \neq tecknet på projektorn och frågade vad det betyder.

Elev: Lika mycket och inte lika mycket.

Lärare: Med olikhetstecknet så ska man se till att det inte ska vara lika mycket på båda sidorna.

1. Läraren visar uppgiften

$$OOOO \neq OOO$$

$$4 \neq 3$$

$$OO \neq OOO$$

$$2 \neq 3$$

Lärare: Det ska inte bli lika mycket på båda två sidor av olikhetstecknet. Fyra bollar på vänster sidan är inte lika mycket tre bollar på höger sidan. I den andra uppgiften visar olikhetstecknet två bollar på vänster sidan inte är lika mycket som 3 bollar på höger sidan.

2. Lärare visade uppgiften

$$1 + _ = 6$$

Lärare: När ni tittar på denna uppgift 1 plus något är lika med 6. För att det blir lika mycket på båda sidor. Hur mycket behöver vi addera på vänster sidan för att få 6? 1 plus 5 = 6 så ska det bli lika mycket på båda två sidor. I denna uppgift måste man först räkna ut den högra sidan för att sedan kunna räkna ut den vänstra sidan.

3. Lärare visade uppgiften

$$12 - () = 6 + 3$$

Lärare: Vad händer nu? Här har vi addition och subtraktion. Går det att lösa uppgiften om vi har både addition och subtraktion i samma uppgift?

Elev: Ja

Lärare: Hur då? Hur kan jag tänka?

Lärare förklarade vidare. Det vi först ska göra är att räkna ut $6+3$ som är lika med 9. Första steget är att räkna ut den högre sidan, därefter räknar vi ut den andra sidan, dvs vänstra sidan. När man ser sådana uppgifter så ska man först tänka på att det ska bli lika mycket värt på båda sidor.

Diskussionen mellan eleverna och läraren fortsatte genom att läraren ställde ytterligare några frågor om likhetstecknet exempelvis: Kan man använda sig av likhetstecknet vid multiplikation och division? Eleverna och läraren kom fram till att man kan använda sig av likhetstecknet när det kommer till alla räknesätt.

4. Lärare visar uppgiften

- $5+A=10$

Lärare: Vad säger ni om dessa uppgifter?

Elev: $A=5$

Lärare: Det som vi måste lista ut är vad A är eller vad som ska stå istället för A. Vi ska räkna ut vad A är. På högersidan av likhetstecknet har vi 10 och på vänstersidan $5+A$. A är lika med 5 därför $5+5=10$.

Läraren visade uppgiften $5+A=10-1$ och sedan frågade hon "hur kan jag tänka?"

Elev: Jag räknar $10-1$ först och det är 9 och sedan går jag till vänster sida av likhetstecknet $5+A$. Därefter räknar jag från 5 till 9 då blir det 4 emellan.

Läraren förklarar att när man arbetar med denna typ av uppgifter måste man först räkna ut det som befinner sig på höger sida av likhetstecknet. Därefter kan man titta på vänster sidan av likhetstecknet.

5. $10 \neq 15 - _$

Lärare: Vad är det för tecknen i uppgiften och vad är det för räknesätt?

Elev: Inte lika med tecknet och räknesättet är subtraktion.

Lärare: Bra. Kan man subtrahera med vilket tal som helst?

Elev: Inte med stora tal.

Läraren visade uppgiften och bad eleverna att förklara inte lika med tecknet en gång till. När läraren fick ett identiskt svar från eleverna som i början av lektionen ställde läraren nästa fråga. Frågan följde: Är det möjligt att från talet 15 subtrahera vilket tal som helst? Eleverna funderade och svarade att det inte är möjligt på grund av att man från ett mindre tal inte kan subtrahera ett större tal.

Följande uppgifter gjorde eleverna själva:

$$5 + _ = 11$$

$$7 = 3 + _ + _$$

$$20 + 5 = 30 - _$$

$$5 = _ + \neq 5$$

$$10 \neq 15 - _$$

Detta är kritiska aspekter som läraren tagit upp under lektionen och som eleverna i klassen har identifierat under lektionen. Eleverna behöver förstå likhetstecknets relationella innebörd. Det innebär att eleverna måste förstå att det ska vara lika mycket på båda sidor av likhetstecknet. Eleverna behöver förstå att alla räknesätt kan användas tillsammans med likhetstecknet. Eleverna behöver uppfatta likhetstecknets innebörd så detta betyder att vänstersidan av likhetstecknet och högersidan av likhetstecknet ska vara lika värda. Det sista eleverna behöver förstå är att en uppgift kan läsas från både höger och vänster sida.

4.4.2 Lektionen i årskurs 6

Läraren började med begreppet likhetstecknet. Han frågade "vad är likhetstecknet?" och skrev på tavlan = lika med eller lika mycket på båda sidor $OOO + OO = OO + O + OO$

Han frågade en elev: Stämmer den här likhetstecknet? Hur många bollar är det på vänster sida och hur många bollar är det på högra sidan? Eleven svarade korrekt, fem bollar på vänster och fem bollar på höger sidan, likhetstecknet är korrekt skrivet. Han skrev igen tre bollar på vänster sidan av likhetstecknet och två bollar på högersidan av likhetstecknet och denna gång olikfärgade bollar.

○○○ = ○○ Lärare frågade om likhetstecknet är skrivet korrekt? En andra elev svarade att likhetstecknet är inte skrivet korrekt därför att på vänstra sidan finns tre bollar och på höger sidan två bollar. Han skrev på tavlan igen ○○○ ≠ ○○ som betyder inte lika mycket.

○○ ≠ ○○○○ $2 \neq 4$ men vad är ○○○○ = ○○○○? Några elever frågar om bollarna är lika stora medan andra frågar hur viktigt färgen är. Storlek är viktigt, men inte i detta sammanhang. På samma sätt som färg. Fyra bollar på vänstra sidan och fyra bollar på högra sidan av likhetstecknet, detta betyder att likhetstecknet stämmer. Lärare frågar om vi har en million bollar på vänster sidan och en million bollar på höger sidan av likhetstecknet. Stämmer då likhetstecknet och alla elever svarade ja.

Lärare skrev på tavlan 1. $4 + 8 = () - 2$ A 12 B 10 C 14 D. 8

Han frågade eleverna: Vilket tal ska stå i den tomma rutan? Välj alternativ. Läraren ställde en fråga till eleven E så att han får resonera, en fråga som kräver att eleven utvecklar sitt svar. Han bad eleven fråga någon kompis i klassrummet om vilket tal som ska stå i denna utsaga. Kompisen svarade 14 och konstaterade att $4 + 8 = 12$ är på vänster sida av likhetstecknet och på höger sida av likhetstecknet är $14 - 2 = 12$. Detta är en av de kritiska aspekterna när det gäller likhetstecknet. Läraren frågade vidare: Vem kan lägga till och resonera mer? En elev svarade att på vänster sida av likhetstecknet är det addition som är räknesättet och på höger sida av likhetstecknet är det subtraktion. En tredje elev svarade "fantastisk, jag har inte tänkt på det". Läraren frågade: Hur blir det om man skriver 12 i utsagan, kan någon resonera mer? En av eleverna svarade att $4 + 8 = 12$ (vänster led) och $12 - 2 = 10$ (höger led) så att $12 \neq 10$ 12 är inte lika med 10. Läraren tog ett nytt exempel:

2. $5 * 4 = () - 4$

A 10 B 20 C 24 D 28

Vem kan ge ett korrekt svar och varför? A, B, C eller D. Vad ville egentligen lärare att eleverna upptäcker? Lärare uppmanade eleverna att våga säga, att visa sina matematiska tankar. Alla tankar är värdefulla, inte bara ”rätta svar”. Läraren och eleverna hade en otroligt bra interaktion. Lärare var absolut medveten om att eleven som svarade att rätt svar är B 20 gav ett felaktigt svar. Han gav hen en möjlighet att inse sitt misstag och omvärdera sin första idé. Våra tankar reviderar vi hela tiden, sa läraren. Är det någon som har ändrat sin tänkande? Hur tänker du nu? Varför? Eleven svarade nu $5*4 = 20$ (vänster led) , $24 - 4 = 20$ (höger led) $20 = 20$. Eleverna testade möjliga svar för att lära sig kritiska aspekter.

Flera elever svarade, att på vänster sida av likhetstecknet är det multiplikation och på högersidan av likhetstecknet är det subtraktion. Kritiska aspekterna är det som elever behöver identifiera för att förstå det som ska läras. De elever som ser likhetstecknet, som att något ska göras, de har en dynamisk eller operationell förståelsen på likhetstecknet. $5*4 = () -4$. De räknar $5 \times 4 = 20$, men glömmer siffran -4 så att resultatet blir fel.

Kritiska aspekter: Likhetstecknet innebär ekvivalens. Det betyder att det går att utföra operationer på båda sidor om tecknet. Det är mycket viktigt för alla elever! De måste ”se” båda leden samtidigt som en helhet för att utföra räkningen på ett korrekt sätt.

En annan kritisk aspekt är att eleverna ser på en uppgift på så sätt, att det kan hända att alla fyra räknesätt kommer att räknas ut. T.ex: $12 = 4*3 = 15 - 3 = 24 : 2 = 5 + 7 = 12$.

4.6 Regressionsanalys

Nedan kan man se variablerna som kommer att användas i regressionsanalysen. Oberoende är som det låter variabler som inte går att påverka i den här modellen. Om vi tar språk som exempel så har man antingen utlandsfödda föräldrar eller så har man svenskfödda föräldrar. I första regressionsanalysen är prov 1 beroende av kapacitetsupplevelsen, ålder, kön och språk. I den andra regressionsanalysen kommer resultaten av prov 1 bli oberoende och i sin tur ha möjlighet att tillsammans med andra faktorer påverka resultaten för prov 2. Detta sätt att binda samman två analysmodeller kallas mediering. Prov 1 medierar mellan övriga variabler och prov 2 (Lander & Rosén, 2020, kap. 13).

Oberoende var.	Beroende var.	Oberoende var.	Beroende var.
Kap upplev. ålder kön språk	prov 1	Kap upplev. ålder kön språk prov 1	prov 2

Vi hade på gränsen till för många variabler. Som mest var det 5 oberoende variabler per analys och det kan godtas i explorativa studier (Lander och Rosén, 2020, kap. 5.6).

Kön och prestationstillit för årskurs 3 är dummyvariabler. Om vi tar kön så kan man antingen vara pojke=0 eller flicka=1. Prestationstillit har vi delat upp i två möjliga värden. Antingen har man under 3 = 1 eller över eller lika med 3 = 0 i den femgradiga skalan. Det beror på den icke-linjära relationen vi såg i kapitel 5.5 (figur 2). För årskurs 6 är frågan om språk hemma en dummy (åk 3 talade bara svenska). Jämförelsegruppen i årskurs 6 är de svensktalande hemma, den första dummy är de som bara talar föräldrarnas språk och den andra dummy är de som talar båda språken lika mycket.

Vi kommer inte använda oss av p-värden som kriterium för vilka variabler som ska vara kvar i olika analyssteg, då vi inte har ett slumpvist urval ur en population eller en slumpvis uppdelning av på undersökningsgrupper. Vi kommer istället använda oss av beta-värdet som är en standardiserad regressionskoefficient. Här är allt under $\pm 0,10$ ointressant. $\pm 0,10$ är ett litet, men i alla fall synligt samband, runt $\pm 0,30$ ett medelstort samband och runt $\pm 0,50$ eller högre ett stort samband. Detta enligt en i forskningen vanlig konvention (Lander & Rosén, 2020, kap. 12). Ett värde vid 0 betyder att samband saknas. Standardiserade betakoefficienter kan variera mellan -1,00 och +1,00.

För varje analyssteg får man reda på hur stor den förklarade variansen är (R^2). Eftersom vi är vid den nedre gränsen för vad som är rekommenderat antal individer, så används Adjusted R-square, dvs en förklarad varians som korrigerats för detta. R^2 -värdet kan tas gånger 100 och ger då procenten förklarad varians.

Toleransmättet i output från SPSS gäller kollinearitet, dvs risken att oberoende variabler är så högt korrelerade med varandra att man inte vet vilken av dem som är den som påverkar den beroende variabeln. Toleranser klart under 0,50 bör man fundera över, men inte annars.

5. Resultat

Resultatet består av två delar. I den första delen analyseras hur eleverna löste uppgifter från prov 1 och prov 2 därefter ser vi på prestationstillit och kapacitetsupplevelse och skillnaden mellan prov 1 och 2 med dessa mått på självkänsla under kontroll tillsammans med bakgrundsfaktorerna om ålder, kön etc.

Enligt elevernas lösningar på prov 1- och prov 2-uppgifterna från både årskurs 3 och 6 kan resultatet kategoriseras inom följande kategorier:

- Likhetstecknets dynamiska betydelse = som det blir
- Baskunskaper i matematik
- Olikhetstecknets (\neq) betydelse

5.1 Resultatet av prov 1

Detta resultat är byggt på elevernas lösningar från prov 1-uppgifter i åk 3 och åk 6. Provet är utfört innan undervisningslektion om likhetstecknet. Provuppgifterna är från tabell 1 i kapitel 5.2.1.

5.1.1 Likhetstecknets dynamiska betydelse = som det blir

Uppgift 1: $8+4 = () + 5$. Denna uppgift visar att flera elever i åk 3 och åk 6 har förstått likhetstecknets dynamiska betydelse som det blir, eftersom de har svarat $8+4 = (12) + 5$. Andelen elever i årskurs 3 som har svarat 12 på den uppgiften var 25%. Andelen elever i årskurs 6 som har haft svaret 12 är 8%.

På uppgift 2: $57+86 = () + 84$ har 7% av eleverna i årskurs 3 och 16% eleverna i årskurs 6 svarat $57+86 = (143) + 84$. Svaret tyder på att eleverna har förstått betydelsen av likhetstecken som dynamisk för att $57 + 86$ blir 143. Det är 48% av eleverna i årskurs 3, som inte alls svarat alls på den uppgiften och man kan tolka det som att uppgiften var för svår eller att de inte har förstått likhetstecknets betydelse.

Uppgift 3: $7 = 3 + () + ()$. På denna fråga har 41% av eleverna i åk 3 svarat $7 = 3 + (4) + (3)$ där de har tänkt att $3 + 4$ det blir 7 samt de har glömt totalt den tredje termen (3) i uträkningen. När det gäller åk 6 var det 12% som svarade fel, dvs på samma sätt som åk 3.

Uppgift 4: $11 = () - 4$. Denna uppgift visar att flera elever i åk 3 och åk 6 har förstått likhetstecknets dynamiska betydelse som det blir, eftersom de har svarat så här, 11 på vänster sidan av likhetstecknet minus 4 på höger sidan av likhetstecknet är lika med 7 men det är absolut fel. I detta fall tittar man först på högra sidan av likhetstecknet $15 - 4 = 11$ och $11 = 11$

Uppgift 5: $8 = () - 8$. Denna uppgift visar att flera elever i åk 3 och åk 6 har svarat 0 i ut-sagan. Svaret tyder på att eleverna har förstått betydelsen av likhetstecken som dynamisk för att de räknar från höger sidan till vänster sidan $8 - 0$ det blir 8. Men man måste titta på båda två sidor samtidigt. På vänster sidan av likhetstecknet har vi 8 och på höger sidan av likhets-tecknet $16 - 8$ för att få rätt.

Uppgift 7: $9 = 4 + () + 3$. Eleverna i åk 3 svarat med $9 = 4 + (13) + 3$. Andelen elever som svarade 13 var 48% i åk 3. Svaret visar att eleverna inte alls har tänkt på likhetstecknet efter 9 utan de adderade talen 9 och 4 där svaret blir 13. De har inte alls visat förståelse för att termen $+3$ finns med i uträkningen, utan de uteslöt den termen totalt.

Uppgift 9: $8 = () + 8$. Här visade elever i åk 3 att de inte har förstått betydelse av likhets-tecknet för att deras svar var $8 = (16) + 8$. Svaret visar att eleverna har tänkt att de skulle ad-dera $8 + 8$ och det blir 16 och därmed visade eleverna att de har missförstått innebörden av likhetstecknet. Det var 26% elever i åk 3 som svarade fel eller hoppade över den uppgiften.

Uppgift 11: $13 - () + 12 = 12$. Eleverna i årskurs 3 har svarat med 67% fel på denna uppgift där deras svar var 1, dvs $13 - (1) + 12 = 12$. De har tänkt att $13 - 1$ det blir 12. De visade att de inte har tänkt på termen $+12$ och därmed visade missförståelse av likhetstecknets innebörd.

5.1.2 Baskunskaper i matematik

När eleverna har svarat på uppgifterna i prov 1 visade det sig att de inte har automatiserat additions- och subtraktionstabellerna och deras svar visade brister i uträkningar där addition, subtraktion blev aktuella. En stor del av eleverna visade att de inte visste något om negativa tal.

Uppgift 1: $8 + 4 = () + 5$. En elev i årskurs 6 har svarat med följande svar: $8 + 4 = (6) + 5$, vilket betyder att den elev har antingen räknat fel på $8 + 4$ eller $6 + 5$.

Uppgift 2: $57 + 86 = () + 84$. Här har elever i årskurs 3 svarat med 55 eller 57 istället 59. De visade brister i addition av $84 + 55$ då det inte är detsamma som $57 + 86$ eller $84 + 57 = 141$, men $57 + 86 = 143$. Det hittades samma svar hos elever i årskurs 6, där 17% svarade fel på uppgiften på grund av brister i uträkningen av addition eller subtraktion. Elevernas svar på denna uppgift från åk 6 var: 55, 56, 57 eller 68.

Uppgift 3: $7 = 3 + () + ()$. Både elever i årskurs 3 och 6 svarade med $7 = 3 + (1) + (4)$ eller med $7 = 3 + (2) + (1)$. Svaret visar att de har räknat fel $7 = 3 + (1) + (4)$ där $7 \neq 8$ och $7 = 3 + (2) + (1)$ där $7 \neq 6$. Det är tydlig att dessa elever har brister i baskunskaper i uträkning av additionsuppgifter.

Uppgift 4: $11 = () - 4$. 55% av eleverna i åk 3 har svarat fel där deras svar var 7. Antingen de har tänkt $7 + 4 = 11$, men de har inte markerat subtraktionstecknet $-$ eller att de inte kunnat subtrahera i uppgiften att $7 - 4 = 3$ och $11 \neq 3$. I åk 6 var bara en elev, motsvarande 4%, som svarade 13, där igen den eleven har brister i subtraktionsuträkningen för att $13 - 4 = 9$ och $11 \neq 9$.

Uppgift 5: $8 = () - 8$. Skrev eleverna 0 i utsagan, så betyder att de har missförståelse av likhetstecknets betydelse. Kritiska aspekter på denna uppgift är att eleverna blandar betydelsen av positiva och negativa tal. Detta tyder på att många elever bär på allvarliga missuppfattningar, så att de kan ha problem när det kommer ekvationslösningar. Det var 59 % av eleverna i årskurs 3 och 21 % av eleverna i årskurs 6 som svarade fel på denna uppgift.

Uppgift 6: $27 + 4 = () + 9$. Det var 48 % elever i åk 3 och 21 % elever i åk 6 som inte har svarat korrekt. Alla dessa elever saknar en djupare förståelse för likhetstecknets innebörd, eftersom likhetstecknet betecknar relationen mellan två tal. De försummar talet 4 och lägger fokus bara på termen 27. Deras svar i utsagan blev 18 eller 31 eller 21.

Uppgift 9: $8 = () + 8$. Bara en elev i årskurs 6 gjorde fel på den här uppgiften, vilket motsvarar 4%. Svaret var 2 i utsagan $8 = (2) + 8$. Man kan konstatera att eleven saknar grundläggande baskunskaper som t ex de fyra räknesätten och missförståelsen av likhetstecknet.

Uppgift 10: $2 + () + 1 = 6$. Två elever svarade fel, sex elever hoppade över uppgiften i årskurs 3, vilket är 30% av undersökningsgruppen. Eleverna skrev i utsagan $2+5+1=6$. Eleverna som gjorde fel räknade inte med tvåan på vänster sida, dvs de missuppfattar likhetstecknet.

Uppgift 11: $13 - () + 12 = 12$. Av 24 elever som gjorde provet i åk 6 svarade 16 elever korrekt och 8 elever svarade fel, vilket motsvarar 34 %. Det finns två grupper elever som svarade på olika sätt. Första gruppen struntar i termen 13. De skrev 0 i utsagan så att $12 = 12$. Den andra gruppen av elever svarar 1 i utsagan så att $13 - 1 = 12 + 12 = 12$ men 24 är inte lika med 12 eftersom vänster sidan av likhetstecknet är 24 medan höger sidan av likhetstecknet är 12. Detta tyder att många elever bär på alvarliga missuppfattningar om likhetstecknets innebörd.

Uppgift 12: $31=0+3+()$. 63% av eleverna i årskurs 3 och 21% av eleverna i årskurs 6 svarade fel eller hoppade över uppgiften. Eleverna som gjorde fel svarade i utsagan 0, 10, 27 eller 29. Detta kan kategoriseras som att eleverna saknar grundläggande baskunskaper inom matematik. Den här uppgiften är väldigt enkelt för de elever som förstår likhetstecknet och behärskar fyrräknesätt med flyt. Vi har 31 på vänster sidan av likhetstecknet och på höger sidan av likhetstecknet $0 + 3 + ()$.

5.1.3 Olikhetstecknets (\neq) betydelse

Uppgift 8: $15 \neq 17 - ()$. Här har eleverna visat att de har missförstått olikhetstecknets betydelse. Det visade sig att den uppgiften var bland de svåraste uppgifter av alla andra uppgifter på prov 1. Eleverna har svarat fel med 41 % i åk 3 och 64% i åk 6. Det är intressant att andelen felsvarade på den uppgiften var större hos elever i åk 6 än elever i åk 3. En sammanställning av felsvaren visas i tabell 2.

Tabell 2. Procent felsvarande (inkl. ej svar) efter feltyp i prov 1 per fråga i årskurs 3 och 6.

Fel	Åk	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Dyn.	3	25	53	41	-	-	-	48	-	26	-	-	-
	6	8	16	12	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Basf.	3	-	-	-	55	51	48	-	-	-	30	-	63
	6	4	17	-	4	21	21	-	-	4	-	34	21
Teckn.	3	-	-	-	-	-	-	-	41	-	-	-	-
	6	-	-	-	-	-	-	-	64	-	-	-	-

5.2. Resultatet av prov 2

Detta resultat är byggd på elevernas lösningar från prov 2-uppgifter. Detta prov är utfört efter undervisningslektion om likhetstecknet. För att kunna analysera effekter av undervisningslektion om likhetstecknet samt besvara på studiens frågeställningar kommer analysen ske under samma kategorier som för resultatet i prov 1.

5.2.1 Likhetstecknets dynamiska betydelse = som det blir

Lösningen på **uppgift 1:** $8+4= () + 5$ visar resultatet att elever i åk 3 har förbättrat sig där andelen elever som har svarat 12 på denna uppgift har minskat från 25% till 15%. När det gäller åk 6 har resultatet förbättrat sig där i prov 2 bara en elev har svarat 12 på denna uppgift, vilket motsvarar 4%. Det är en minskning med 4 procentenheter jämfört med resultat i prov1.

Uppgift 2: $57+86= () + 84$ har elever i åk 3 väldigt svårt med. Det är sju elever som svarade fel och 11 som hoppade över vilket motsvarar att 67% eleverna i åk 3 inte kunde lösa denna uppgift. Det är betydligt bättre resultat i åk 6 där endast en elev har svarat 143 på denna uppgift vilket motsvarar 4%.

Uppgift 3: $7= 3+ () + ()$ På den uppgiften svarade nio elever fel och en elev hoppade över uppgiften i åk 3. Det blir 37% av eleverna i åk som svarade fel eller hoppade över uppgiften. Det är en minskning med 4 procentenheter jämfört med prov1. Däremot har elever i åk 6 betydligt förbättrat sig i denna uppgift för att alla svarade rätt på denna uppgift i prov2.

Uppgift 7: $9 = 4+ () + 3$ har eleverna i åk 3 svarat med $9 = 4+ (13) + 3$. Andel elever som svarade 13 eller hoppade över denna uppgift var 41% i åk 3. Alla elever i åk 6 har svarat rätt på denna uppgift och därmed de har förbättrat resultatet.

Uppgift 9: $8= () + 8$ svarade 4% av eleverna i åk 3 svarade fel eller hoppade över uppgiften. Det är en minskning från 26% till 4%.

Uppgift 11: $13 - () + 12=12$. Av eleverna i åk 3 har 48 % svarat fel på denna uppgift. Det är en minskning från 67% till 48%, men det är fortfarande en stor del av eleverna som inte förstår uppgiften. När det gäller åk 6 det var en elev som svarade $13- (1) +12 = 12$ i prov 2 jämfört med 3 elever i prov1. blir en minskning från 13% till 4%.

5.2.2 Baskunskaper i matematik

Uppgift 1: $8 + 4 = () + 5$ har ingen svarat på det sättet att man kunde tolka att eleven inte behärskar baskunskaper i matematik.

Uppgift 2: $57 + 86 = () + 84$ har elever i åk 6 svarat med 54, 55, 58 och 60 istället 59 där de visade brister i uträkningar med additions uppgifter. Det är 5 elever av 23 som svarade på detta sätt och det blir 22 % . Det blir ingen förbättring när det gäller denna uppgift för att de elever som inte kunde räkna addition i prov 1 kunde inte heller i prov2. Denna uppgift visade sig väldigt svår i åk 3. På grund av att eleverna särskilt saknade baskunskaper inom matematik när det gällde höga tal. Ingen annan uppgift hade så höga tal.

Uppgift 3: $7 = 3 + () + ()$ har elever i åk 6 förbättrat sig där alla elever har svarat rätt denna gång i prov2. Eleverna i åk 3 förbättrade sitt resultat med 4% i prov 2.

Uppgift 4: $11 = () - 4$ har den elev i åk 6 som svarade fel i prov 1 svarat rätt i prov 2. Det finns två som inte svarade alls på denna uppgift. Elver i åk 3 har svårt, det är 41% som svarade fel eller hoppade över denna uppgift i prov 2.

Uppgift 5: $8 = () - 8$ det är fortfarande en svår uppgift för elever i åk 3 medan elever i åk 6 har svarat rätt med $8 = 16 - 8$ i prov 2. Dessa elever har svarat 0 i prov 1 i denna uppgift. Det blir en betydlig förbättring i resultat för elever i åk 6.

Uppgift 6: $27 + 4 = () + 9$ har elever i åk 3 fortfarande svårt för och det är 37% av eleverna som svarade fel eller hoppade över uppgiften. Det är en förbättring i resultat för åk 6 i denna uppgift på prov 2, men det finns fortfarande elever som har svarat på denna uppgift $27 + 4 = (16) + 9$ och $27 + 4 = (20) + 9$. Det motsvarar 9 % av elever i åk 6 som har svarat fel på grund av uträkningen av addition.

Uppgift 9: $8 = () + 8$ Det är fortfarande samma elev i åk 6 som gjorde fel på den här uppgiften som motsvarar 4% av åk 6. Svaret var 4 i utsagan $8 = (4) + 8$. Man kan konstatera att den eleven saknar grundläggande baskunskaper som t ex fyra räknesätt och missförståelsen av likhetstecknet. Elever i åk 3 förbättrade sitt resultat med 23% i prov 2, så att nu nästan alla gjorde rätt. De två elever som svarade fel saknade grundläggande baskunskaper.

Uppgift 10: $2 + () + 1 = 6$ Det är elever i åk 3 som har förbättrat sig i denna uppgift från 30% till 11 % felbesvarade. Alla elever i åk 6 har svarat rätt i prov 2 på denna uppgift.

Uppgift 11: $13 - () + 12 = 12$. Av 24 elever som gjorde provet i åk 6 svarade 2 elever fel vilket motsvarar 9 %. Deras svar var $13 - (1) + 12 = 12$ vilket visar att de har missförstått likhetsteckens betydelse. Resultatet visar att det var 5 elever som har förbättrat sig och det blir från 30% fel till 9% felbesvarade för åk 6 i denna uppgift på prov 2. Elever i åk 3 förbättrade sitt resultat på prov 2 med 16%.

Uppgift 12: $31 = 0 + 3 + ()$ har andelen elever i åk 3 svarat med 22 % fel eller de har hoppat över denna uppgift. De har sedan förbättrat resultaten i prov 2 med 39%. När det gäller åk 6 är det en liten förbättring, dvs 2 elever som har förbättrat sig vilket motsvarar från 22 % fel till 13% fel besvarade. Felsvaren var $31 = 0 + 3 + 29$ och $31 = 0 + 3 + 30$, vilket tyder på att eleverna först har räknat fel i additionsuträkning. Detta kan kategoriseras som att eleverna saknar grundläggande baskunskaper inom matematik och inom beräkningen med additionsuppgifter.

5.2.3 Olikhetstecknets (\neq) betydelse

Vid uträkning av uppgift 8: $15 \neq 17 - ()$ har eleverna i åk 3 visat betydligt bättre resultat där eleverna har minskat andel felsvarade från 41% till 7 %. Elever i åk 6 har också svarat bättre på prov 2 och de har gjort en minskning med felbesvarade från 64% till 30 % .

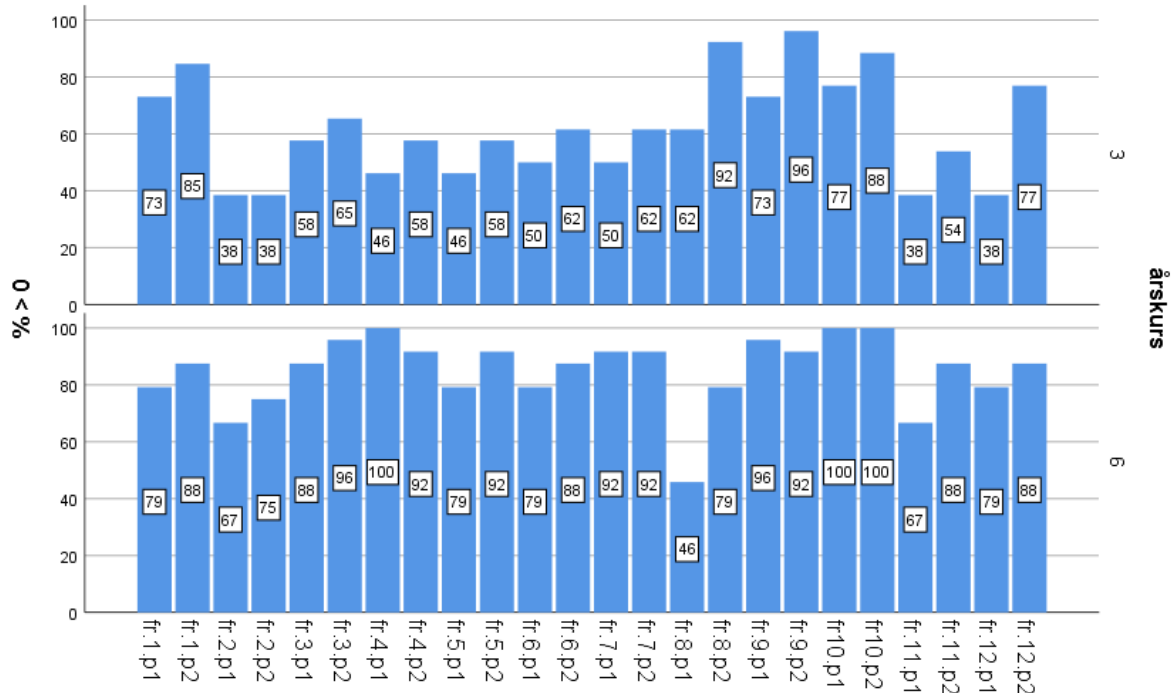
5.3 Resultatjämförelse prov 1 och 2

Antalet rätta svar i de två proven per fråga visas i figur 3.

Tabell 3 sammanfattar resultatet i prov 2 och gör en jämförelse mellan prov 1 och 2 efter kategorierna som använts ovan. När man kommenterar denna tabell 3, märker man att det finns en förbättring mellan prov 1 och prov 2 hos båda klasser med några undantag. Uppgift 2 verkar vara ganska svårt för årskurs 3, eftersom det handlar om höga tal som kanske var svårt för dem att räkna ut, därför de har inte överallt förbättrat sitt resultat i andra provet. Särskilt svårt för treorna var uppgift 2 där resultatet blev oförändrat det lägsta av alla talen (38). Det är också det sämsta för sexorna, fast deras resultat ligger på en högre nivå (75%).

Uppgift 4 var ganska enkelt för årskurs 6, därför att alla elever hade rätt på denna uppgift i prov 1, men i prov två slarvade två elever och på grund av detta försämrades prov 2 med 8

Figur 3. Andel rätta svar (%) per fråga i prov 1 och 2 om likhetstecknet i åk 3 och 6. Jfr tablå 1 för frågornas lydelse. Frågorna i prov 2 står efter motsv. fråga från prov 1.



Tabell 3. Förändringar i provsvaren mellan prov 1 och 2 per årskurs.

	Åk 3 (andel rätt svar i % vid prov 2)	Åk3 (Jämförelse mellan prov1 och prov2)	Åk 6 (andel rätt svar i % vid prov 2)	Åk6 (Jämförelse mellan prov1 och prov2)
Uppg. 1	85	Förbättring med 12 procentenheter	88	Förbättring med 9 procentenheter
Uppg. 2	38	Ingen skillnad	75	Förbättring med 8 procentenheter
Uppg. 3	65	Förbättring med 7 procentenheter	96	Förbättring med 8 procentenheter
Uppg. 4	58	Förbättring med 12 procentenheter	92	Försämring med 8 procentenheter
Uppg. 5	58	Förbättring med 12 procentenheter	92	Förbättring med 13 procentenheter
Uppg. 6	62	Förbättring med 12 procentenheter	88	Förbättring med 9 procentenheter
Uppg. 7	62	Förbättring med 12 procentenheter	92	Ingen skillnad
Uppg. 8	92	Förbättring med 30 procentenheter	79	Förbättring med 33 procentenheter
Uppg. 9	96	Förbättring med 23 procentenheter	92	Försämring med 4 procentenheter
Uppg. 10	88	Förbättring med 11 procentenheter	100	Ingen skillnad
Uppg. 11	54	Förbättring med 16 procentenheter	88	Förbättring med 21 procentenheter
Uppg. 12	77	Förbättring med 39 procentenheter	88	Förbättring med 9 procentenheter

procentenheter. Uppgift 8 handlar om olikhetstecknet som verkar vara svårt för båda klasserna. Efter lektionen har de uppfattat detta begrepp ganska bra och förbättrat sitt resultat i prov 2. Uppgift 9 var en ganska enkel uppgift. I årskurs 6, svarade bara en elev fel på det första provet och på det andra provet svarade två elever fel på samma uppgift, därför försämrades resultat på den andra proven. På grund av att 96 % av alla elever hade rätt på denna uppgift i prov 1 hade vi inte givit mycket tid på samma uppgift under lektionen. Resultatet blev försämring på det andra provet för sexorna. Men treorna förbättrade sitt resultat här rejält.

Uppgift 11 verkar vara intressant för kommentar eftersom båda klasser förbättrat sitt resultat med 16 respektive 21 procentenhet. På den första provet i årskurs 3 var det bara 38 % elever som besvarade rätt medan på det andra provet steg siffran upp till 54 % elever som svarade rätt på samma uppgift. I årskurs 6 hade 67 % av elever rätt på det första provet, men efter genomförd lektion hade de förbättrat sitt resultat med 21 procentenheter till på prov två till 88 %. Vi tycker att eleverna har bättre uppfattat likhetstecknet begrepp efter den genomförda lektionen, därför tror vi att eleverna lyckades förbättrat sitt resultat. Uppgift 12 är intressant för kommentar, eftersom elever i årskurs 3 hade den bästa förbättringen på prov 2 med 39 procentenhet. Den här uppgiften $31 = 0 + 3 + ()$ förstod inte eleverna i årskurs 3, men efter lektionen uppfattade de bättre och klarade uppgiften betydligt bättre på andra provet.

5.3 Måtten på självkänsla

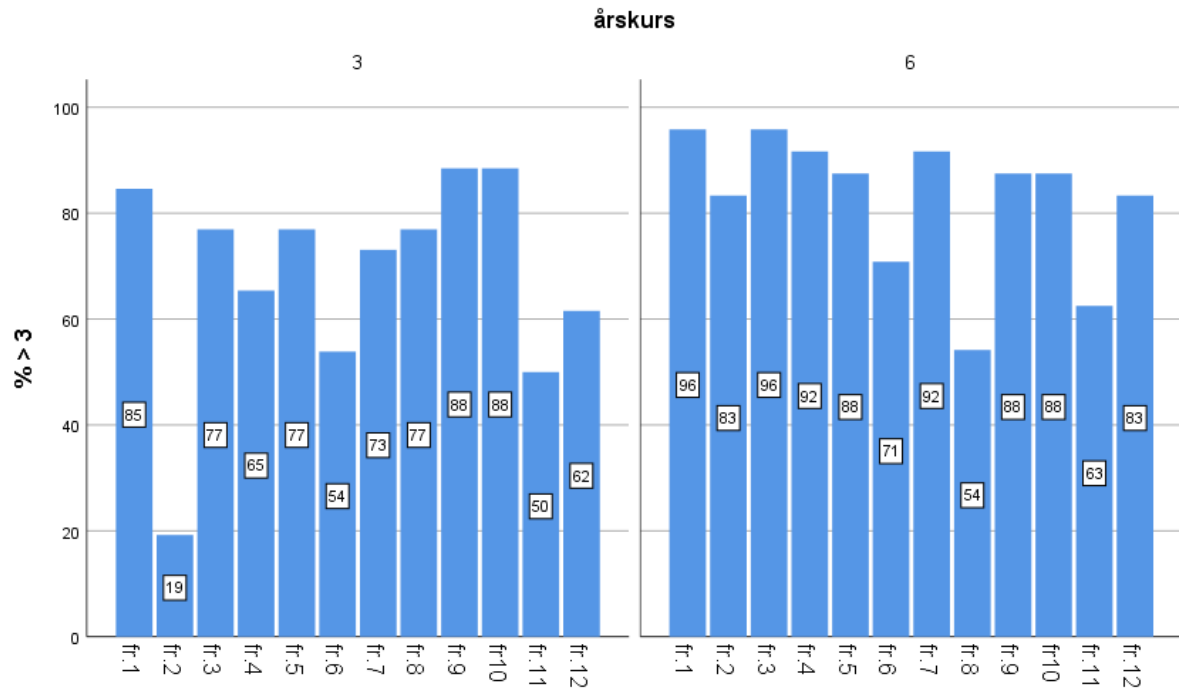
Om man jämför de större förbättringarna i provresultat, så är det med ett undantag dessa frågor som eleverna hade sämst kapacitetsupplevelse i (jfr figur 3 och 4). Det tyder på att flera visste om sina svaga punkter och lyckades förbättra just dessa genom lektionen.

5.4. Regressionsanalyser

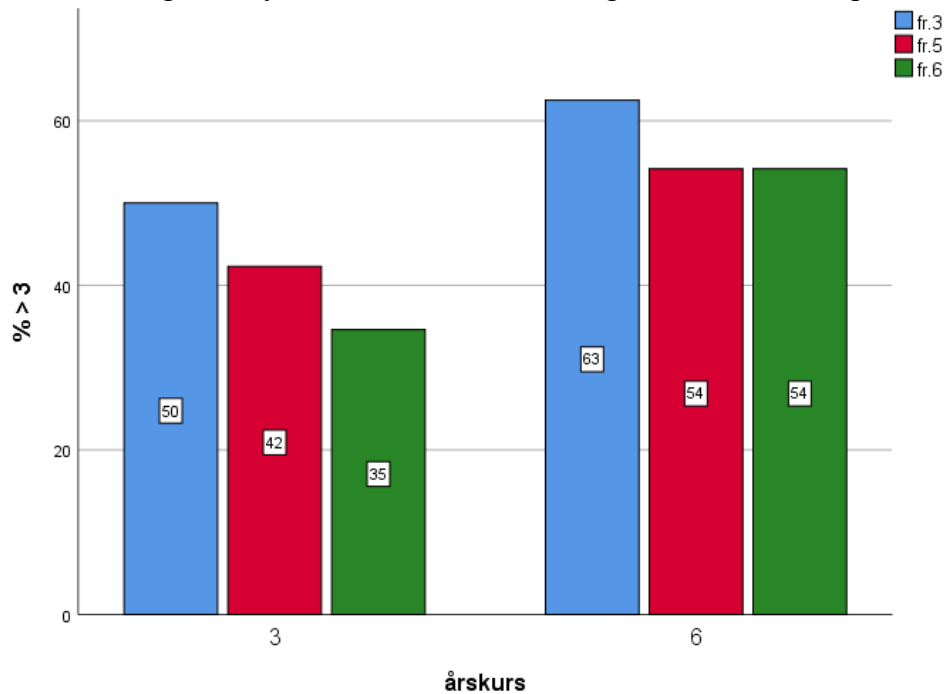
Resultaten av regressionsanalysen kan ses i tabellerna nedan. Vi delade upp årskurserna var för sig och gjorde separata modeller för prestationstillit och kapacitetsupplevelse. Resultaten från årskurs 3 visas först följt av resultaten från årskurs 6.

Vi kommer inte använda oss av t-värden och signifikansvärden. Se kapitel 5.6 (Regressionsanalys) för mer information om detta.

Figur 4. Positiv opinion i procent (>3) om kapacitetsupplevelse om likhetstecknet per fråga i åk 3 och åk 6. Frågelydelsen, se tablå 1 om provfrågorna.



Figur 5. Positiv opinion i procent om prestationstillit i matematik per fråga i åk 3 och åk6. Se tablå 2 för frågornas lydelse. För åk 6 saknas fråga 2, som har 71% positiv opinion.



Åk 3. Enbart kapacitetsupplevelse (språk ej med, eftersom alla talar svenska hemma).

Eftersom vi använder standardkoefficienten beta som kriterium för vilka variabler som ska vara kvar kan vi ta bort åldern då den hade ett värde på under 0,10 vilket gör variabeln ointressant för oss. Här nedan ser vi att beta för kapacitetsupplevelsen är högre än 0.5 vilket innebär att det finns ett stort samband mellan den och provresultat 1. Betavärdet för kön är negativt, vilket betyder att pojkar klarat prov 1 något sämre än flickor, eftersom pojkar hade 1 i dummyn och flickor 0.

Första analysen: $Y = \text{prov 1}$

Coefficients^a

Model		Unstandardized Coefficients		Standardized	t	Sig.	Collinearity
		B	Std. Error	Coefficients			Statistics
				Beta			Tolerance
1	(Constant)	-3,609	2,284		-1,580	,128	
	Kap.uppl	2,857	,536	,723	5,325	,000	,929
	kön	-1,171	1,031	-,154	-1,136	,268	,929

a. Dependent Variable: Prov 1

Model Summary^b

Model	R	R Square	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate
1	,778 ^a	,606	,572	2,52631

a. Predictors: (Constant), kön, Kap.uppl

b. Dependent Variable: Prov 1

Nedan kan vi se resultaten från andra analysen och här kan vi ta bort kön och kapacitetsupplevelse då de har en ett värde på standardkoefficient beta under 0,10. Det innebär att det inte på denna nivå i analysen finns ett samband mellan dessa två variabler och provresultat 2. Här ser vi istället bara ålder och prov 1 som verkar ha ett samband med provresultat 2 och med prov 1 som har ett värde på långt över 0,50, vilket innebär att det finns ett stort samband mellan prov 1 och prov 2.

Andra analysen: $Y = \text{prov 2}$

Coefficients^a

Model		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.	Collinearity Statistics
		B	Std. Error	Beta			
1	(Constant)	-15,704	12,101		-1,298	,207	
	ålder	,169	,105	,151	1,609	,121	,992
	Prov 1	,696	,075	,868	9,255	,000	,992

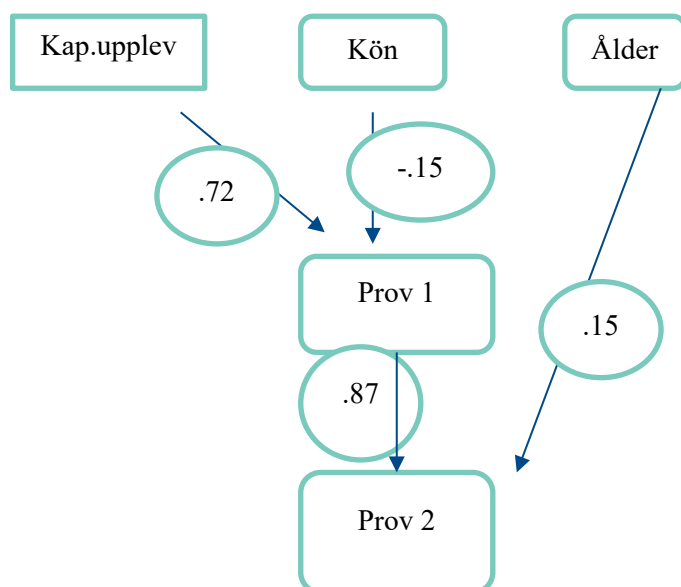
a. Dependent Variable: Prov 2

Model Summary

Model	R	R Square	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate
1	,825 ^a	,681	,654	,13387

a. Predictors: (Constant), bprov1, ålder

Figur 6. Sambanden för kapacitetsupplevelse, kön, ålder och prov 1-resultat på prov 2-resultatet i årskurs 3. Betavikterna utan nollor för utrymmets skull. Adj. R² för prov 1 = 0,57; för prov 2 = 0,65.



I figur 6 ser vi hur resultaten i prov 1 medierar mellan prov 2 och de andra variablerna. Det finns inget inflytande från kapacitetsupplevelse och kön, som inte medieras av prov 1. Ålder däremot har ett direkt inflytande på prov 2. Resultaten i prov 1 skiljer sig inte åt beroende på ålder, men när man håller prov 1 under kontroll, så inverkar ålder för prov 2. Det betyder att

när man jämför elever med samma provresultatgång 1, så presterar de med högre ålder lite bättre i prov 2.

Men den stora effekten på prov 2-resultaten är förstås prov 1-resultaten (beta = 0,87). Kapacitetsupplevelse har den näst största betydelsen. Det kan man räkna ut som den totala effekten, dvs $0,72 \times 0,87 = 0,59$. Det är fortfarande en stor effekt räknat efter den ovan nämnda konventionen. För kön blir den totala effekten $-0,15 \times 0,87 = -0,13$. Det finns alltså en viss fördel för flickorna även i prov 2, men den är liten.

Åk 3. Enbart prestationstillit

Här nedan kan vi se att prestationstillit har ett mycket lågt samband med resultat från prov 1, då den standardiserade koefficienten beta ligger vid -0,11, dvs ganska precis på gränsen. Koefficienten är dessutom negativ, vilket innebär att med bättre prestationstillit blir provresultatet svagt sämre. Det är ett överraskande resultat. När kapacitetsupplevelsen inte är med ökar betydelsen av könet (flickor klart bättre än pojkar) och högre ålder har betydelse, vilket den inte hade tidigare. Den förklarade variansen är mycket låg (10 procent) jämfört med vad den var när kapacitetsupplevelse ingick i modellen (57 procent).

Coefficients^a

Model		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.	Collinearity Statistics
		B	Std. Error	Beta			Tolerance
1	(Constant)	-46,564	34,594		-1,346	,192	
	Pr.tillit åk 3	-,813	1,596	-,107	-,510	,615	,812
	ålder	,484	,306	,346	1,583	,128	,752
	kön	-4,172	1,802	-,549	-2,315	,030	,636

a. Dependent Variable: Prov 1

Model	R	R Square	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate
1	,460 ^a	,211	,104	3,65431

a. Predictors: (Constant), kön, Pr.tillit åk 3, ålder

b. Dependent Variable: Prov 1

I den andra analysen kan vi se att prestationstillit verkar ha ett mycket litet samband med resultatet från prov 2, då betakoefficienten ligger under 0,10 eller alldeles vid 0,10 om man avkortar. Men betakoefficienten är ändå positiv, vilket den inte var i den första analysen. Det är

alltså bara när man jämför elever med samma provresultat, som en högre prestationstillit ger en viss liten, fördel.

Coefficients^a

Model		Unstandardized Coefficients		Standardized	t	Sig.	Collinearity Statistics
		B	Std. Error	Coefficients			
1	(Constant)	-16,341	12,095		-1,351	,190	
	Pr.tillit åk 3	,593	,571	,097	1,039	,310	,989
	ålder	,173	,105	,154	1,642	,115	,991
	Prov 1	,688	,076	,857	9,112	,000	,981

a. Dependent Variable: Prov 2

Vi bedömer inte resultatet för prestationstillit som pålitligt. Även om själva måttet kunde fås att fungera så kan vi betvivla att det har så stor betydelse jämfört med det mycket klarare utfallet när vi använde kapacitetsupplevelse som mått på självkänsla. Vi ritar därför ingen figur för denna modell.

Åk 6. Enbart kapacitetsupplevelse

Eftersom vi använder standardkoefficienten beta som kriterium för vilka variabler som ska vara kvar kan vi först ta bort kön då den hade ett värde på under 0,10. Här nedan ser vi att beta för kapacitetsupplevelsen är högre än 0,30, vilket innebär att det finns ett mer än medelstort samband mellan den och provresultat 1. Betavärdet för åldern är 0,12, vilket är ett litet, men i alla fall synligt samband. Betavärdet för föräldrarnas språk är -0,45 vilket betyder att elever som pratar mest föräldrars språk har sämre provresultat än jämförelsegruppen, dvs de som enbart talar svenska hemma. Även sambandet för gruppen, som talar båda språken lika mycket, är negativt, men svagt (-0,10). Men när vi tar bort kön ur modellen sjunker detta till under 0,10.

Första analysen: $Y = \text{prov 1}$

Coefficients^a

Model		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.	Collinearity Statistics
		B	Std. Error	Beta			Tolerance
1	(Constant)	-2,046	13,579		-,151	,882	
	bkap	1,032	,579	,377	1,782	,092	,612
	ålder	,055	,097	,115	,564	,580	,659
	kön	-,201	,767	-,049	-,261	,797	,778
	(2)språk,föräldr	-1,923	,984	-,454	-1,953	,066	,508
	(3) språk, föräldr+sv	-,394	,840	-,101	-,469	,644	,593

a. Dependent Variable: Prov 1

Tar bort kön:

Coefficients^a

Model		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.	Collinearity Statistics
		B	Std. Error	Beta			Tolerance
1	(Constant)	-3,259	12,444		-,262	,796	
	bkap	1,063	,552	,389	1,925	,069	,640
	ålder	,061	,092	,128	,662	,516	,700
	(2)språk,föräldr	-1,847	,917	-,436	-2,014	,058	,557
	(3) språk, föräldr+sv	-,358	,808	-,092	-,443	,663	,610

a. Dependent Variable: Prov 1

Model Summary^b

Model	R	R Square	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate
1	,710 ^a	,504	,400	1,52334

a. Predictors: (Constant), (3) språk, föräldr+sv, bkap, ålder, (2)språk,föräldr

b. Dependent Variable: Prov 1

Andra analysen, åk 6. Y = prov 2

Här nedan ser vi att betavärdet för elever som pratar föräldrarnas språk lika mycket som svenska är -0,022, vilket gör variabeln ointressant för oss. Alla andra variabler är intressanta för oss då de överstiger 0,10 i betavärde. Det stora betavärdet är för resultatet i prov 1, men

för kapacitetsupplevelse och föräldraspråket har det nu blivit andra tecken på beta än i analysen av prov 1. Ålder har fortfarande positiv och något ökande betydelse.

Coefficients^a

Model		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.	Collinearity Statistics
		B	Std. Error	Beta			Tolerance
1	(Constant)	-11,903	11,068		-1,075	,297	
	bkap	-,749	,512	-,273	-1,465	,161	,520
	ålder	,106	,080	,224	1,337	,199	,648
	(2)språk,föräldr	,693	,883	,163	,786	,443	,419
	(3) språk, föräldr+sv	-,088	,688	-,022	-,128	,900	,586
	kön	,660	,626	,161	1,055	,306	,775
	Prov 1	,984	,192	,982	5,123	,000	,494

a. Dependent Variable: Prov 2

Model Summary^b

Model	R	R Square	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate
1	,832 ^a	,692	,583	1,27244

a. Predictors: (Constant), Prov 1, kön, (3) språk, föräldr+sv, ålder, bkap, (2)språk,föräldr

b. Dependent Variable: Prov 2

Totala effekter för prov 1 = 0,98,

$$\text{kap} = 0,39 \times 0,98 + (-0,27) = 0,11$$

$$\text{ålder} = 0,22 + 0,13 \times 0,98 = 0,35$$

$$\text{språk} = (-0,44 \times 0,98) + 0,16 = 0,07$$

$$\text{kön} = 0,16$$

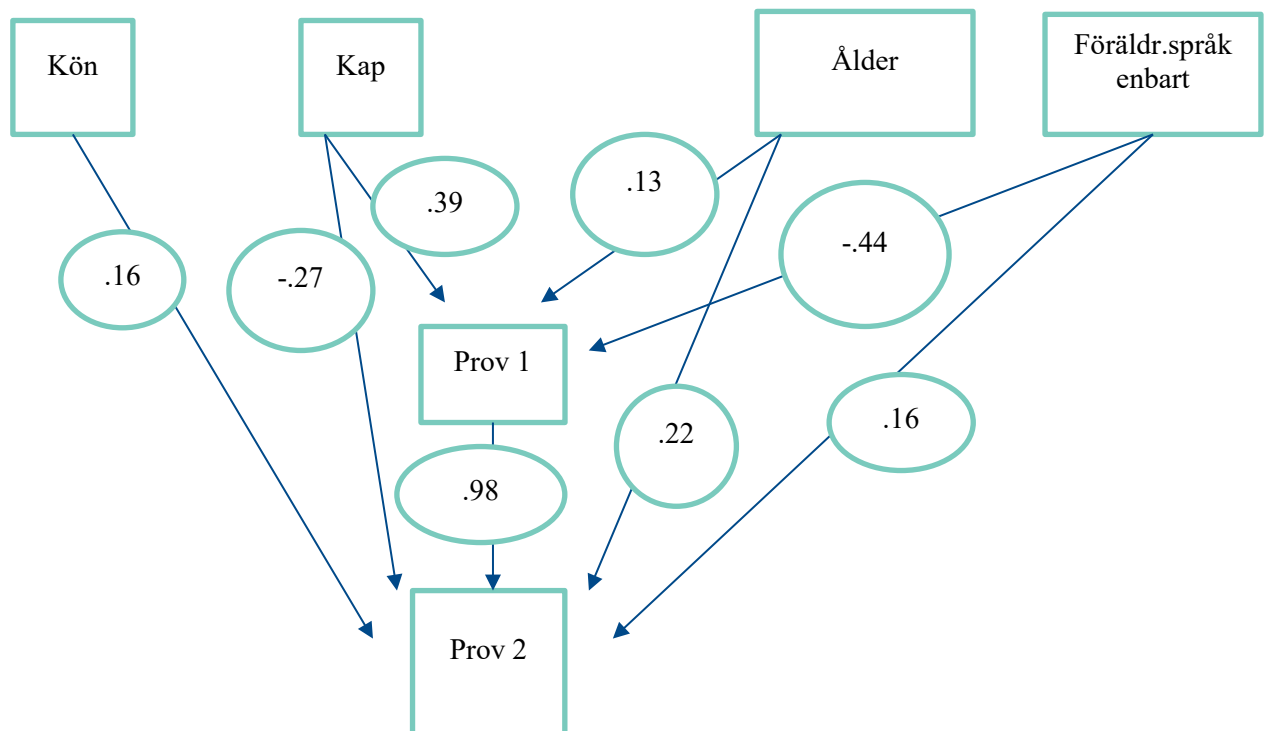
Vi kommenterar nu teckenbytena för kapacitetsupplevelse och språk. Det finns två vägar för kapacitetsupplevelsen i den medierade modellen (figur 7). Vi ser att kapacitetsupplevelsen har drygt medelstor betavikt för prov 1 (0,39), vilket betyder att elever som har högre kapacitetsupplevelse klarar prov 1 bättre. De som klarar prov 1 bättre kommer att klara prov 2 bättre. Den andra vägen kan man räkna så att kapacitetsupplevelsen har en direkt relation med prov 2 med -0.27 som betyder att några elever med högre kapacitetsupplevelse klarar prov 2 sämre och elever med lägre kapacitetsupplevelse klarar prov 2 bättre. Läger man ihop dessa två ”vägar” så kan man se att det totalt finns ett litet positivt samband på 0.11 att personer med hög kapacitetsupplevelse klarar prov 2 bra. De positiva och negativa effekterna

tar nästan ut varandra. Varifrån kommer den negativa effekten? Mycket troligt är det för att vissa elever överskattat sina kunskaper när de fått testet om kapacitetsupplevelse. Som sågs ovan hände detta inte för elever i årskurs 3.

Barn som talar föräldrarnas språk hemma har gjort ett sämre prov 1 (-0,44 i negativt samband). Men när man sedan jämför eleverna efter hur man klarat prov 1, så är relationen positiv. Då är föräldrarnas språk ingen nackdel längre, utan en viss fördel (0,16). Det finns alltså en del ambitiösa elever bland dem som talar föräldrarspråket hemma, som givet sina resultat på prov 1, ändå klarar sig något bättre än de svensktalande.

Ålder har inte bytt tecken genom medieringen. Man kan konstatera att ålder har ett litet samband på 0,13 på prov 1 och via prov 1 klarar de bättre prov 2. Men ålder har också en direkt relation med prov 2 med betakoefficienten 0,22. Multiplicerar man 0,13 x 0,98 plus 0,22 då får man betakoefficient 0,22.

Figur 7. Sambanden för kapacitetsupplevelse, kön, ålder, språk och prov 1-resultat på prov 2-resultatet i årskurs 6. Adj. R² för prov 1 = 0,40; för prov 2 = 0,58.



Åk 6 (enbart prestationstillit)

Här nedan kan vi se att prestationstillit verkar ha ett medelstort samband med resultatet på prov 1, eftersom betakoefficienten ligger vid 0,28. Elever som hemma pratar föräldrarnas språk har ett negativt samband med prov 2 eftersom betakoefficienten ligger vid -0,70, vilken är ett stort samband. Barn som pratar både svenska och föräldrarnas språk hemma har också ett nästan medelstort negativt samband på prov 1, eftersom betakoefficienten ligger vid -0,24 medan kön inte har påverkat mycket på prov 1, eftersom beta koefficient ligger nära 0. Ålder har också ett medelstort, men positivt samband med prov1-resultaten. Den stora skillnaden mot när vi använde kapacitetsupplevelsen i modellen är att föräldraspråket får en mycket större och negativt inflytande över provet. Bara kön kan tas bort ur modellen (eftersom dummies ej skall tas bort om inte alla har för lågt värde). Det förändrar inte analysresultatet särskilt mycket.

Första analysen

Coefficients^a

Model		Unstandardized Coefficients	Standardized Coefficients	t	Sig.	Collinearity Statistics
		B	Beta			Tolerance
1	(Constant)	-12,203		-,880	,391	
	ålder	,143	,301	1,565	,135	,761
	(2)språk,föräldr	-2,977	-,703	-3,391	,003	,654
	(3) språk, föräldr+sv	-,930	-,238	-1,119	,278	,620
	kön	-,289	-,071	-,376	,711	,793
	Pr.tillit åk 6	,615	,283	1,633	,120	,939

a. Dependent Variable: Prov 1

Tar bort kön:

Coefficients^a

Model		Unstandardized Coefficients	Standardized Coefficients	t	Sig.	Collinearity Statistics
		B	Beta			Tolerance
1	(Constant)	-14,395		-1,170	,256	
	ålder	,155	,328	1,880	,076	,883
	(2)språk,föräldr	-2,910	-,687	-3,464	,003	,682
	(3) språk, föräldr+sv	-,899	-,230	-1,113	,280	,626
	Pr.tillit åk 6	,637	,293	1,752	,096	,962

a. Dependent Variable: Prov 1

Model Summary^b

Model	R	R Square	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate
1	,700 ^a	,490	,383	1,54516

a. Predictors: (Constant), Pr.tillit åk 6, (3) språk, föräldr+sv, ålder, (2)språk,föräldr

b. Dependent Variable: Prov 1

Andra analysen:

Coefficients^a

Model		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.	Collinearity Statistics
		B	Std. Error	Beta			Tolerance
1	(Constant)	-6,839	11,938		-,573	,574	
	ålder	,057	,082	,120	,698	,495	,670
	(2)språk,föräldr	1,220	,947	,288	1,288	,215	,399
	(3) språk, föräldr+sv	,194	,724	,050	,268	,792	,580
	Pr.tillit åk 6	-,229	,340	-,105	-,675	,509	,818
	Prov 1	,923	,199	,921	4,646	,000	,506
	kön	,764	,650	,187	1,175	,256	,787

a. Dependent Variable: Prov 2

Model Summary^b

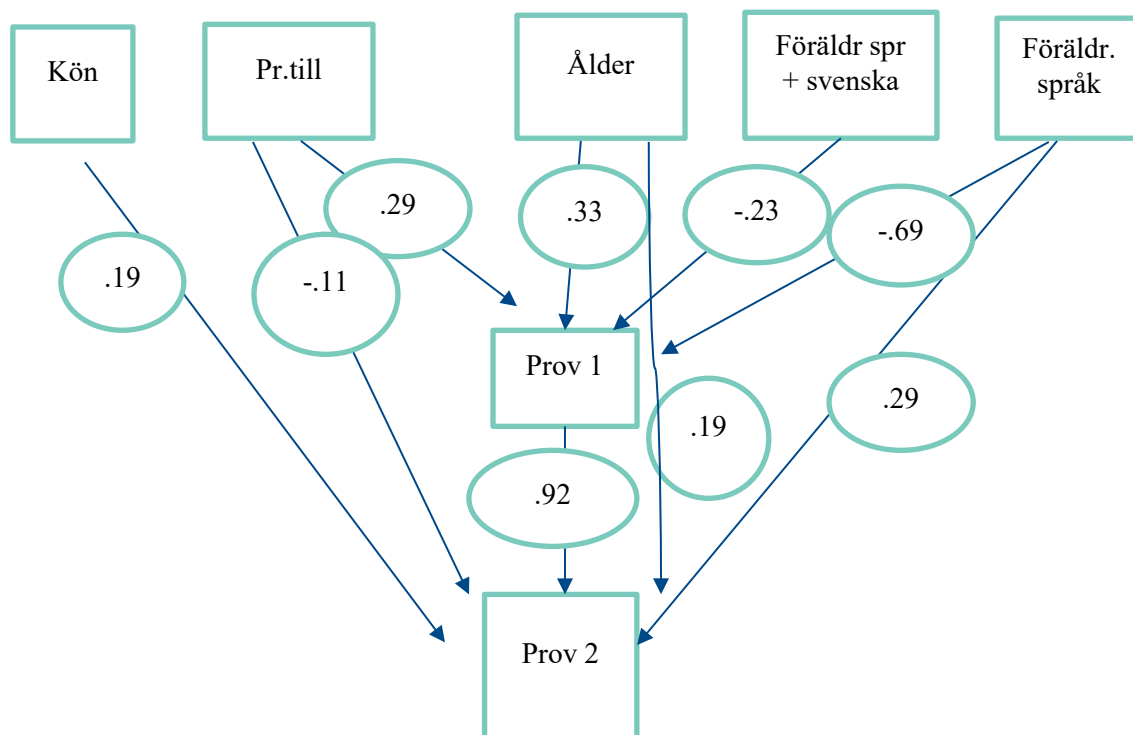
Model	R	R Square	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate
1	,814 ^a	,662	,543	1,33262

a. Predictors: (Constant), kön, Prov 1, Pr.tillit åk 6, (3) språk, föräldr+sv, ålder, (2)språk,föräldr

b. Dependent Variable: Prov 2

Bilden i figur 8 är ganska lik den som modellen med kapacitetsupplevelse har. Vi kan räkna ut de totala effekterna som ovan. Kön har enbart direkt inflytande på prov 2, men inte via prov 1 (0,19, nästan samma). Prestationstillit har ett positivt direkt samband med prov 1, men svagt negativt med prov 2, totalt 0,16 (lite högre, men nära kapacitetsupplevelsens), ålderns samband är positivt till båda proven, men med prestationstillit har den ökat till totalt 0,49

Figur 8. Sambanden för prestationstillit, kön, ålder, språk och prov 1-resultat på prov 2-resultatet i årskurs 6. Adj. R^2 för prov 1 = 0,38; för prov 2 = 0,54.



(mot 0,35 tillsammans med kapacitetsupplevelse). Att tala föräldraspråket enbart hemma är negativt för prov 1, men positivt för prov 2, det är samma övergripande bild som med kapacitetsupplevelse i modellen, men den totala effekten är klart negativt, -0,35, jämfört med 0,07. Sambandet för föräldraspråk+svenska är negativt till prov 1 och via det också negativt som totaleffekt för prov 2 (-0,13). Detta är delvis nytt eftersom sambandet föräldraspråk + svenska med prov 1, visserligen var negativt, men precis under gränsen för $\pm 1,00$. Den allra största effekten på prov 2 hade resultaten i prov 1 (0,92), vilket är nästan lika mycket som med kapacitetsupplevelse i modellen.

Det som verkar hända när prestationstillit är med i modellen istället för kapacitetsupplevelse är att det blir större utrymme för de andra faktorerna. De ökar i betydelse som total effekt vare sig det är positivt eller negativt. Den förklarade variansen (adj R^2) är dock ganska lika för årskurs 3 och 6 i de två modellerna.

Vad förklarar kapacitetsupplevelse för årskurs 3 jämfört med årskurs 6?

Elever i årskurs 3 har betakoefficienten 0,72 för kapacitetsupplevelse mot prov 1-resultatet, som är ett stort samband, och prov 1 har också betakoefficienten 0,87, som betyder ett stort

samband med prov 2. Den totala effekten för kapacitetsupplevelse är 0,63 som också är ett stort samband. För eleverna i årskurs 6, såg det inte så ut, eftersom de både hade ett positivt samband med prov 2 medierat via prov 1, men också ett direkt negativt samband. Detta är den stora skillnaden mellan de två årskursernas modeller när kapacitetsupplevelsen är med. Treorna har inte överskattat sina kunskaper om likhetstecknet, som en del sexor gjorde. Den lilla skillnaden är att pojkarna i årskurs 6 har något bättre resultat än flickorna medan det i årskurs 3 tvärtom är flickorna som har ett litet bättre resultat än pojkarna. Flickornas fördel i trean fanns redan före lektionen om likhetstecknet medan pojkarnas fördel uppstod efter lektionen.

Den förklarade variansen ($\text{adj } R^2$) är något högre för årskurs 3 än för årskurs 6, särskilt inför första omgången då prov1-resultaten var den beroende variabeln.

6 Slutdiskussion

En sammanfattning av vad analysen gav.

I den första delen av analysen fick vi följande resultat:

Vissa elever har bristande baskunskaper i matematik. De har svårigheter med multiplikationstabellerna, elever saknar generellt sagt grundläggande baskunskaper inom matematik. Men det som är viktigt att säga, är att forskning (Hatikudur, Shanta, Alibali & Martha, 2010) har visat att det finns ganska många elever på låg- och mellanstadiet som har en dynamisk eller operationell uppfattning, dvs att likhetstecknet står för att det blir något och att svaret ska skrivas efter. De elever som uppfattar likhetstecknet som dynamiskt ("det blir") kommer att ha svårigheter senare när de ska lösa olika ekvationer.

Tabell 3 på sidan 37 visar förändringar i provsvaren mellan prov 1 och 2 per årskurs. Denna tabell ger en bra överblick över hur våra elever lyckades att förbättra sin förståelsen av likhetstecknet i matematik efter den genomförda lektionen.

Vår första frågeställning var:

ska besvaras genom dessa frågeställningar:

1. Vilka är de viktiga kritiska aspekterna om likhetsrelationen hos våra elever och hur kan de mätas i ett prov? Hur skiljde sig utfallet av lektionerna i årskurs 3 och 6 med avseende på elevernas förståelse av kritiska aspekter.

De viktiga kritiska aspekterna om likhetsrelation är att eleverna förstår likhetstecknets innebörd och betydelse. Det betyder att eleverna förstår att värden på högersidan av likhetstecknet måste vara lika värden på vänster sidan om likhetstecknet gör att likhetstecknet ska gälla. Att de förstår att man kan ha olika räknesätten på både led, men värden eller resultat på både sidor måste vara detsamma.

Att mäta kritiska aspekter om likhetsrelation i ett prov kan genomföras där man konstruerar sådana uppgifter där eleverna testas i förståelse av innebörden av likhetstecknet från de vanliga uppgifter som $45 + = 90$ till och med att använda flera räknesätten på både led. Enligt

Brorson (2012) är det, för att eleverna skall förstå likhetstecknets betydelse, viktig att uppgifterna varierar så att kvoten, differensen, summan eller produkten ligger på olika sidor av likhetstecknet, t. ex: $12 = 4 \cdot 3 = 15 - 3 = 24 : 2 = 5 + 7 = 12$.

Om resultatet kan sägas:

Vid prov 2 hade treorna minst 75 procent rätta svar på fem av de 12 frågorna medan sexorna hade alla uppgifterna med minst 75 procent rätta svar. Anledningen att eleverna i årskurs 3 har presterat sämre i jämförelse med eleverna i årskurs 6 när det gäller resultat i prov 1 och prov 2 kan vara följande:

- Eleverna i åk 3 går på lågstadiet och de har inte hunnit arbeta så mycket med innehållet i algebra som t.ex. att lösa flera uppgifter där likhetstecknets betydelse testas.
- Man ser märkligt nog att de saknar förståelse i vissa uppgifter där likhetstecknets betydelse testas, t.ex. i uppgift nr 2 när man har flera termer i en och samma uppgift på både höger och vänster led. De har inte hunnit träna uppgifter med att flera räknesätt finns med i både höger och vänster led.
- Den andra orsaken kan vara att eleverna i åk 3 inte behärskar fullständigt de fyra räknesätten med flyt samt särskilt de fyra räknesätten med höga tal.

Enligt tabell 3 ovan var vissa resultat särskilt anmärkningsvärda: Uppgift 2, 8, 9, 11 och 12.

De kommenteras här:

- **Uppgift 2:** $57 + 86 = () + 84$ har elever i åk 6 svarat med 54, 55, 58 och 60 istället 59 där de visade brister i uträkningar med additionsuppgifter. Det är 5 elever av 23 som svarade på detta sätt och det blir 22%. Det blir ingen förbättring när det gäller denna uppgift för att de elever som inte kunde räkna addition i prov 1, kunde inte heller i prov 2. Denna uppgift visade sig väldigt svår för åk 3. På grund av att eleverna särskilt saknade baskunskaper inom matematik när det gällde höga tal. Ingen annan uppgift hade så höga tal.
- **Uppgift 8 med olikhetstecknet** hade höga förbättringar för båda årskurserna, cirka 30 procent. Eleverna har i prov 1 svarat fel med 41% i åk 3 och 64% i åk 6. Det är intressant att andelen felsvarade på den uppgiften var större hos elever i åk 6 än elever i åk 3. På prov 2 har eleverna i åk 3 visat betydligt bättre resultat, där eleverna har

minskat andel felsvarade från 41% till 7%. Elever i åk 6 har också svarat bättre på prov 2 och de har gjort en minskning med felbesvarande från 64% till 30%.

- **Fråga 11:** $13 - () + 12 = 12$ innebar förbättringar på 16-21 procent för årskurs 3 och 6, men det är trots det treornas näst sämsta resultat i prov 2 (54% rätt). Felsvaren i åk 6 var t.ex. $13 - (1) + 12 = 12$ vilket visar att de har missförstått likhetstecknets betydelse. Men sexorna hade vid prov 2 ändå 88% rätt svar.
- **Fråga 12:** $31 = 0 + 3 + ()$ innebar den kraftigaste förbättringen (39 procentenheter) för treorna och de kom totalt upp i 77 procents rätt i prov 2. Sexorna hade 88% rätt i prov 2. Det måste tolkas som att elever i båda klasserna gjorde fel på grund av brister inom matematiska grundläggande färdigheter. Den här uppgiften är väldigt enkelt för de elever som förstår likhetstecknet och behärskar de fyra räknesätten med flyt.

En andra frågeställning var:

2. Vilka pedagogiska insatser kan göras under en lektion för att förbättra förståelsen av de kritiska aspekterna?

Enlig Maunula, Magnusson, & Echevarria (2011) måste lärarna ta reda på varför och vad som ligger bakom ett felaktigt svar och vad det är som eleverna inte har förstått. Det som är kritiskt för vissa elever behöver inte vara det för andra elever. Läraren i åk 3 började förklara olikhetstecknet betydelsen för att eleverna skulle förstå likhetstecknet betydelsen bättre, vilket visade sig vara en bra metod där hon lyfte fram kritiska aspekterna i första plan.

$0000 \neq 000$

$4 \neq 3$

$00 \neq 000$

$2 \neq 3$

3. Hur utföll lektionen, vilka resultat uppnådde eleverna på provet efter lektionen samt i vilken mån kan lektionsinsatserna sägas vara orsaken till elevernas resultat i sista provet?

Pedagogiska insatser i de två årskurserna var ganska lika. Den som var olika är att läraren i årskurs 3 började lektion med olikhetstecknet som lyfte upp den viktigaste kritiska aspekten, skillnaden mellan likhetstecknet och olikhetstecknet, som tycker vi var bra. Läraren i årskurs 6 hade mera dialog med sina elever, där eleverna kunde få mera möjlighet att resonera och utveckla sitt svar. Läraren och eleverna i årskurs 6 hade en otroligt bra interaktion. Även elever som gav felaktigt svar (som inte förstår de kritiska aspekterna) fick möjlighet att inse sitt misstag och omvärdera sin första idé.

4. Hur går det förstå betides av olika bakgrundsfaktorer som ålder, kön och utländsk bakgrund för resultaten i proven?

Om man jämför de större förbättringarna i provresultat i tabell 3, så är det med ett undantag i dessa frågor som eleverna hade sämst kapacitetsupplevelse. Det tyder på att flera visste om sina svaga punkter och lyckades förbättra just dessa genom lektionen.

Regressionsanalyserna för årskurs 3 med enbart kapacitetsupplevelse visar att beta för kapacitetsupplevelsen är högre än 0.5 vilket innebär att det finns ett stort samband mellan den och provresultat 1. Betavärdet för kön är negativt, vilket betyder att pojkar klarat prov 1 något sämre än flickor, eftersom pojkar hade 1 i dummys och flickor 0. Analysen visar att när man jämför elever med samma provresultatgång 1, så presterar de med högre ålder (i månader) lite bättre i prov 2. Men resultatet på prov 1 är den allra viktigaste förklaringen till resultatet i prov 2.

Analysen i åk 3 med enbart prestationstillit visade att detta test inte fungerat tillfredsställande på grund av att många elever måste ha missförstått det.

Analysen i åk 6 gav ett intressant resultat och som var ganska lika för prestationstillit och kapacitetsupplevelse. De resultatet vi kom fram till var att barn som talar föräldrarnas språk hemma har gjort ett sämre prov 1 (-0.44 i negativt samband). Men när man sedan jämför dem som har samma resultat på prov 1, så är relationen positiv, dvs då är föräldrarnas språk ingen nackdel längre, utan en viss fördel (0,16). Det finns alltså en del ambitiösa elever bland dem som talar föräldrarspråket hemma som, givet sina resultat på prov 1, ändå klarar sig något bättre än de enbart svensktalande. Pojkarna förbättrade sina resultat på prov 2 något mera än

flickorna. Kapacitetsupplevelsen är dock långt ifrån så viktig som resultatet beroende på prov 1, eftersom det blev motstridande resultat. För de flesta fick en positiv kapacitetsupplevelse ett bra provresultat första gången och sedan andra gången. Men vissa elever trodde fel om sin kapacitet och fick sämre resultat i prov 2. Detta hände inte med prestationstillit.

På grund av de små gruppstorlekarna är dessa resultat explorativa. Det är i alla fall intressant att kapacitetsupplevelse inte var mycket bättre än prestationstillit (för åk 6) till att bidra till modellerna, eftersom det fanns forskningsresultat som pekade på att kapacitetsupplevelse var bättre på att predicera mätresultat (Ferla m.fl., 2006). Utrymmet för ålder och kön i modellerna var dock mindre när kapacitetsupplevelsen användes, vilket tyder på en högre precision med det senare måttet.

En kort diskussion om metoderna och vad som kunde förbättras till nästa gång.

Det som kunde förbättras till nästa gång är, tycker vi, att testet i prestationstillit inte borde haft både positivt och negativt formulerade frågor och att elever i årskurs 3 säkert behövde en mera ingående instruktion. Vi funderar över om lektionen hade blivit mera effektiv om vi hade analyserat resultaten från prov 1 djupare före undervisningen, så att vi kunde ha fokuserat särskilt på uppgifterna som gick dåligt. Vi har också övervägt om det var bra med en rätt snäv tidsgräns för provuppgifterna. Fler kanske hade klarat sig med mera tid. Men det som vi är absolut övertygade om är att resultatet i prov 2 kunnat bli mycket bättre om vi hade följt Learning study-metoden med tre lektioner i rad. Learning study är en arbetsmodell för lärare för att förbättra sina lektioner och visa elevers kunskap genom att på ett metodiskt sätt i en mindre grupp undersöka vad som gör det svårt eller vad som gör det lätt att lära ett bestämt lärandeobjekt (Nilsson, 2019).

Slutord

Eftersom undersökningen utfördes i två olika skolor i Västra Götalandsregionen, där eleverna har olika social och etnisk bakgrund, så har vårt resultat visat att elever som pratar mest föräldrars språk har sämre resultat i första provet än jämförelsegruppen, dvs de som enbart talar svenska hemma. Även sambandet för gruppen, som talar båda språken lika mycket, är negativt, men svagt (-0,10). Att en del elever med föräldrarnas språk hemma ändå kunde klara sig bra när väl prov 1 var passerat, betyder inte att ett utländskt språk var fördelaktigt. Denna studie visar tvärtom att lärarna måste ta hänsyn till vikten av svenska språket i undervisningen.

För att eleverna skall kunna lösa matematiska uppgifter korrekt måste de behärska svenska språket väl.

Referenser

- Abrahamsson, M. (2016). Elevers förståelse av likhetstecknet: En studie i årskurs 3. Jönköping University.
- Ahlberg, A. (2000). *Matematik från början*. Göteborg: Göteborgs universitet.
- Bergsten, C. (1997). *Algebra för alla*. Göteborg: Göteborgs universitet.
- Booth, f. M. (2000). *Om lärande*. Lund: Studentlitteratur AB.
- Brorsson, Å. (2012). Algebra för lågstadier. *Nämnamnaren nr 3*, s. 5.
- Bråting, K., & Madej, L. (den 02 12 2017). Generaliserad Aritmetik. *Nämnamnaren, tidskrift för matematik undervisning*, s. 81.
- Hattikudur, Shanta, Alibali, & Martha, W. (2010). Learning about the equal sign: Does comparing with inequality symbols help?. *Journal of experimental child psychology*, 107(1), 15-30.
- Kajsa Bråting, o. L. (2017). Generaliserad Aritmetik. *Nämnamnaren*.
- Kullberg, A. (den 09 10 2019). *Forskning i praktiken*. Hämtat från filmer från lärarnas forskningskonferens: <http://pedagogblogg.stockholm.se/forskning-i-praktiken/tag/variationsteori/>
- Lander, R. (2013). Nyblivna lärares upplevda kapacitet i arbetet ...|. *Pedagogisk Forskning i Sverige årg 18 nr 3-4 2013 issn 1401-6788*, ss. från 216 - 237.
- Ling, L. M. (2014). *Variationsteori - för bättre undervisning och lärande*. Lund: studentlitteratur AB.
- Lo, M. L. (2014). *Variationsteori: för bättre undervisning och lärande*. Lund: Studentlitteratur.
- Marand, N. (2007). *Viktiga ord i matematik*. Stockholm: Natur och Kultur.
- Marton, F. S. (2000). *Om lärande*. Lund: Studentlitteratur.
- Matilda, A. (2016). *Elevers förståelse av likhetstecknet: En studie av i årskurs 3*. Jönköping: Högskolan i Jönköping.
- Maunula, T., Magnusson, J., & Echevarría, C. (2011). Learning Study - Undervisning gör skillnad. i M. J. Maunula, *Variationsteori ur en undervisningsperspektiv* (ss. (s. 35 - 50)). Lund: Studentlitteratur.
- McLeish, J. (1992). *Matematikens kulturhistoria*. Falkenberg: Bokförlaget förum AB.
- NE, N. (den 09 10 2019). *Likhetstecken*. Hämtat från <https://www.ne.se/uppslagsverk/ordbok/svensk/likhetstecken>
- Nilsson, P. (den 02 12 2019). Learning study hjälper lärare undervisa effektivare.
- Nyvaller, M. (2015). *Pedagogisk utveckling genom kollegial granskning*. Göteborg: Ineko AB, Källered.
- Runesson, U. (den 20 06 2012). Ulla Runesson om learning study på lärardagarna 2012.
- Ryberg, U. (2014). *Variationens betydelse för lärande*. Göteborg: Göteborgs universitet.

- Skolverket. (2003). *Nationella kvalitetsgranskningar 2001–2002*. Hämtat från <https://www.skolverket.se/download/18.6bfaca41169863e6a658081/1553961499748/pdf1163.pdf>: www.skolverket.se
- Skolverket. (2012). *Utökad undervisningstid i matematik rapport 378*. stockholm 2012: Skolverket.
- Skolverket. (2012). *Utökad undervisningstid i matematik. Rapport 378*. Stockholm: Skolverket.
- Skolverket. (den 15 januari 2020). Kursplan - matematik centralt innehåll. Stockholm.
- Skolverket. (den 06 04 2020). *Kommentarmaterial till kursplanen i matematik (reviderad 2017)*. Hämtat från skolverket.se
- Stukát, S. (2012). *Att skriva examensarbete inom utbildningsvetenskap*. Lund: Studentlitteratur.
- Vikström, A. (2005). *Ett frö för lärande - En variationsteoretisk studie av undervisning*. Luleå: Luleå tekniska universitet.

Bilaga 1. Föräldratillstånd

Anhållan om tillstånd för att ert barn kan delta i en undersökning inom ramen för ett examensarbete vid lärarutbildningen vid Göteborgs universitet.

Vi är studenter som utbildar oss till lärare vid Göteborgs Universitet. Vi skall nu skriva den avslutande uppgiften inom lärarutbildningen som är vårt examensarbete och som ger oss vår lärarbehörighet. Examensarbetets syfte är att undersöka och förbättra elevernas förståelse av likhetsbegreppet inom matematik i årskurs 3 och 6.

De viktigaste frågorna vi behöver få svar på är:

- Vilka pedagogiska insatser kan göras under lektionstid för att öka förståelse av likhetsbegreppet?
- Vilka effekter hade lektionen på förståelsen enligt ett diagnosprov?
- Finns det några samband mellan diagnosresultat och elevernas självkänsla för matematik?

För att kunna besvara dessa frågor behöver vi samla in material genom diagnoser/observation/frågeenkät med elever i årskurs 3 och 6. På er skola kommer undersökningen att genomföras under oktober och november månad. Vi vill med detta brev be er som vårdnadshavare om tillåtelse att ert barn deltar i den observation/diagnos/frågeenkät/annat som ingår i examensarbetet.

Alla elever kommer att garanteras anonymitet. De skolor/enheter/klasser som finns med i undersökningen kommer inte att nämnas vid namn eller på annat sätt kunna vara möjliga att urskilja i undersökningen. I enlighet med de etiska regler som gäller är deltagandet i enkäten helt frivilligt. Ert barn har rättigheten att när som helst välja att avbryta deltagandet i enkätundersökningen. Diagnosprov och undervisning ingår däremot enligt läroplanen i den normala undervisningen och lärarnas förbättring av den.. Materialet behandlas strikt konfidentiellt och kommer inte att finnas tillgängligt för annat än akademiska ändamål, dvs som exempel i undervisning och annan forskning. För detta gäller också full anonymitet för elever, klasser och skolor.

Vad vi behöver från er är att ni som elevens vårdnadshavare skriver under detta brev och så snart som möjligt skickar det med eleven tillbaka till skolan så att ansvarig lärare kan samla in svaret vid tillfälle. Sätt således ett kryss i den ruta som gäller för er del:

- Som vårdnadshavare **ger jag tillstånd** att mitt barn deltar i undersökningen
- Som vårdnadshavare **ger jag inte tillstånd** att mitt barn deltar i undersökningen

Datum

.....
vårdnadshavares underskrift/er elevens namn

Har ni ytterligare frågor ber vi er kontakta oss på nedanstående adresser eller telefonnummer:

Med vänliga hälsningar

Sejla Mahmutovic (gusmahmse@student.gu.se) och Rasid Saric(rsacic@yahoo.se)

Handledare för undersökningen är professor Rolf Lander (rolf.lander@ped.gu.se)