

Uppsats/Examensarbete: 15 hp
Kurs: SLM601
Nivå: Avancerad nivå
Termin/år: HT/2020
Handledare: Lena Knutsson
Examinator: Eva Myrberg

Nyckelord: matematik, läromedel, lärarhandledning, undervisningskulturer, centrala idéer, sociokulturellt perspektiv, medierande redskap, representationsformer

Abstract

Studiens syfte var att utifrån en specialpedagogisk synvinkel utforska två matematikläromedel för årskurs 4, med ursprung i undervisningskulturer som till viss del skiljer sig åt. Läromedlens teoretiska utgångspunkter studerades, samt hur olika representationsformer används och hur elever i behov av stöd och utmaningar stöttas. Utifrån detta utforskades hur lärarhandledningar kan vara en resurs för lärare under planering och genomförande av undervisningen.

Studiens teori har utgått från det sociokulturella perspektivet vilket innebär att individens lärande sker i samspel med omgivningen, i olika sammanhang och med stöd av olika redskap. Lärarhandledningar samt läroböcker kan ses som medierande artefakter; verktyg för lärande som är resultat av vår kulturella utveckling. Läraren är viktig för elevernas appropriering av ny kunskap.

Studien är en textanalys med inriktningen innehållsanalys i kombination med semistrukturerade intervjuer. Texterna som analyserats är två matematikläromedel för årskurs 4, med fokus på lärarhandledningarna. Intervjuer har gjorts med fyra lärare, av vilka två arbetade med *Mattespanarna* och två med *Sigma matematik*. Tolkningen har skett utifrån ett hermeneutiskt förhållningssätt och undersökningen har en kvalitativ ansats.

Studiens resultat visar på skillnader mellan läromedlen när det gäller hur tydliga de är med den forskning och de centrala idéer de lutar sig mot. Vissa likheter finns dock; exempelvis betonar båda läromedlen betydelsen av gemensamma matematiska samtal. Läromedlen fokuserar på representationsformer, på till viss del olika sätt. I *Sigma* ingår både visuella och laborativa redskap som en naturlig del av varje lektion, och den viktiga kopplingen mellan olika representationsformer betonas. *Mattespanarna* fokuserar i större utsträckning på endast visuella redskap, som stöd för att öka elevernas förståelse för det mer abstrakta.

Lärarhandledningarna ger lärarna stöttning på delvis olika sätt, vilket kan leda till olika undervisningsstrategier. *Mattespanarna* "talar med läraren" genom att i större utsträckning vara en inspirationskälla och en tipsbank. *Sigma matematik* "talar genom läraren" med tydliga instruktioner kring lektionsupplägg, material och hur elever i behov av stöd eller utmaningar bör mötas.

Specialläraren har en viktig uppgift i det kollegiala arbetet med att utveckla matematikundervisningen och i att samverka kring hur läromedel kan användas som stöd för lärare och elever, för att alla ska få känna att de kan få lyckas inom matematiken.

Förord

Under en längre period har jag arbetat med detta examensarbete, som avslutning på min utbildning till speciallärare med inriktning matematikutveckling. Genom denna studie har jag fått möjlighet att fördjupa mig i matematikläromedel och deras möjligheter att vara resurser för lärare på olika sätt, samt hur de kan möta elever och stötta deras lärande. Att jämföra olika undervisningskulturer har varit intressant i kombination med detta. Det har varit en arbetsam och lärorik process, och jag ser idag på läromedel och deras möjligheter med helt andra ögon.

Under denna periodvis mycket intensiva process har jag hela tiden känt ett stort stöd från min närmaste omgivning. Utan ert tålamod, era uppmuntrande tillrop och er tilltro till min förmåga att lyckas ro detta i land, hade detta varit mycket svårare att genomföra.

Jag vill även tacka de lärare som ställde upp på att bli intervjuade och gav av sin värdefulla tid för att hjälpa mig i mitt arbete och på så sätt göra min studie bättre.

Avslutningsvis vill jag rikta ett stort tack till min handledare Lena Knutsson, som har stöttat och utmanat mig i detta arbete.

Tack!

Catrin Lindehag Ahlqvist

Innehåll

1	Inledning	1
2	Bakgrund	2
3	Syfte samt forskningsfrågor	4
4	Teoretiska utgångspunkter	5
4.1	Sociokulturellt perspektiv	5
4.1.1	Medierande redskap.....	5
4.1.2	Lärande.....	6
5	Litteraturgenomgång / tidigare forskning	7
5.1	Lärande i matematik	7
5.1.1	Matematiksvårigheter.....	10
5.1.2	Representationsformer	12
5.2	Läroboken	14
5.3	Undervisningskulturer	16
5.4	Sammanfattning av litteraturgenomgång.....	19
6	Metod	20
6.1	Hermeneutik	20
6.2	Urval	21
6.3	Textanalys.....	21
6.3.1	Genomförande av textanalys	22
6.4	Intervjuer.....	23
6.4.1	Genomförande av intervjuer samt etiska aspekter	24
6.5	Etiska överväganden	25
6.6	Metoddiskussion	25
7	Resultat	26
7.1	Läromedel	27
7.1.1	Presentation av två läromedel.....	27
7.1.2	Centrala idéer	29
7.1.3	Begrepp, fakta och strategier	32
7.1.4	Att möta elever och stötta lärandet.....	33
7.1.5	Representationsformer	36
7.2	Intervjuer.....	38
7.2.1	Centrala idéer samt möjlighet som lärarresurs	38

7.2.2	Fördelar med läromedlen.....	39
7.2.3	Nackdelar med läromedlen	40
7.2.4	Att möta elever och stötta lärandet.....	41
7.2.5	Representationsformer	42
8	Resultatdiskussion.....	44
8.1	Centrala idéer samt möjlighet som lärarresurs	44
8.2	Att möta elever och stötta lärandet	47
8.3	Representationsformer	48
8.4	Ur specialpedagogisk synvinkel	50
8.5	Studiens kunskapsbidrag samt förslag till vidare forskning	52
	Referenser	53
	Läromedel	58
	Bilaga 1 Analysverktyg	59
	Bilaga 2 Intervjuguide	60

1 Inledning

”När ska vi börja arbeta?” Den frågan har nog många lärare i matematik fått höra från elever efter en stunds genomgång eller gemensamt arbete i inledningen av en matematiklektion. Att ”prata” matematik, eller att tillsammans experimentera med matematiska uppgifter, upplevs inte av alla elever som att man verkligen arbetar med matematik. För att det ska vara ”på riktigt” krävs en lärobok, som eleverna enskilt kan räkna i. Det är tydligt att läroboken har, och under en lång tid har haft, en viktig roll i den svenska matematikundervisningen.

Samtidigt har det i Sverige, enligt Ryve, Hemmi och Kornhall (2016) samt Hoelgaard (2015), rått en läromedelsfientlig diskurs under många år, där man har setts som en ”duktig” lärare om man klarat sig utan traditionella läromedel i sin undervisning. Även Oates (2014) beskriver en liknande inställning i England, där läromedelsdiskussionen i många fall har handlat om att använda läromedel eller att *inte* använda läromedel. Under mina år som lärare i grundskolan har jag vid några tillfällen tydligt märkt av denna diskurs, exempelvis när en rektor uppmanade sin personal att arbeta lärobokslöst, och lät förstå att detta var ett sätt att visa sin skicklighet som lärare. Ryve m.fl. (2016) menar att många studenter under lärarutbildningen fått en negativ syn på användandet av läroböcker, vilket har kunnat leda till en ”krock” när studenterna sedan kommit ut i skolorna och där mött en verksamhet som av olika anledningar ser läromedel och läroböcker som en viktig del av verksamheten. Synen på läromedel som något negativt kan bidra till att lärare upplever sig själva som dåliga om de använder läromedel eller följer ett läromedel i någon större omfattning. Trots detta används alltså läromedel, framför allt inom matematik, i stor utsträckning inom den svenska skolan. Ryve m.fl. (2016) menar dock att svenska lärare inte använder lärarhandledningar (som kan ha skiftande kvaliteter) till olika läromedel särskilt mycket. När lärare väljer läromedel händer det att man endast tittar igenom elevboken för att se om den kan upplevas som motiverande ur ett elevperspektiv, utan att överhuvudtaget titta på lärarhandledningen ur ett lärarperspektiv (Hoelgaard, 2015).

Lärarhandledningar har möjligheter att, om de är utformade på ett genomtänkt sätt, vara resurser för undervisning och för kompetensutveckling, och möjligtvis har en till viss del förändrad syn på läromedel och lärarhandledningar som resurser börjat växa fram. En bidragande orsak kan vara diskussioner kring och analyser av elevers resultat i matematik på PISA- och TIMSS-undersökningar, samt jämförelser mellan olika länder. En del läromedelsförfattare tittar på hur läromedel utformas och används i andra länder och inspireras av detta; till exempel *Favorit Matematik* som har ett finskt läromedel som förlaga samt *Sigma matematik* som bygger på ett läromedel från Singapore. Mälardalens högskola har under några år bedrivit ett projekt i samarbete med Eskilstuna kommun, där forskare, lärare och elever utvecklar ett nytt läromedel i matematik; *Rik matematik*. Syftet är att ge lärare bättre resurser för undervisning i matematik, med hjälp av bland annat en väl genomarbetad lärarhandledning, och på så vis ge eleverna bättre förutsättningar att nå kunskapsmålen (Eskilstuna kommun, 2019).

Sverige har, i motsats till många andra länder, ingen officiell granskning eller godkännande av läromedel. Den enskilda rektorn har ansvar för att ”alla elever ... får tillgång till och förutsättningar att använda läromedel av god kvalitet samt andra lärverktyg för en tidsenlig utbildning” (Skolverket, 2018, s.17). I praktiken är det ofta läraren eller arbetslaget som beslutar vilka läromedel som ska köpas in, inom ramen för skolans budget (Johansson, 2011).

Hur statens roll bör se ut när det gäller läromedel i den svenska skolan ses nu över i en utredning. Den 28 november 2019 gick utbildningsdepartementet ut med ett pressmeddelande där uppdraget kortfattat beskrevs (Regeringskansliet, 2019). Utbildningsminister Anna Ekström menade att bristfälliga läromedel är ett problem på många skolor och att kontrollen av läro-

medel i Sverige har stora brister. För att varje elev ska få möjlighet att nå kunskapskraven är det viktigt att både elever och lärare har tillgång till läromedel av hög och jämn kvalitet, anpassade efter undervisningen och elevernas behov. Utbudet är svårt att överblicka och stora krav ställs på de som beställer, och använder, läromedel. I dagsläget har staten ett ytterst begränsat inflytande över läromedel eftersom produktionen huvudsakligen hanteras av privata företag. Utredningen ska föreslå hur val av tillgängliga, funktionella och högkvalitativa läromedel ska kunna underlättas, samt hur statens roll bör se ut när det gäller läromedel.

I mitt arbete som speciallärare i matematik träffar jag många elever som tycker att matematik är tråkigt och svårt, särskilt från årskurs 4 och uppåt. Enligt Berggren och Lindroth (2011) finns det flera förklaringar till detta. Vissa elever kanske känner att de inte längre hänger med och andra tappar intresset på grund av för få utmaningar. En anledning till detta är att matematikundervisningen ofta blir mer teoretisk i denna ålder, vilket kan göra att exempelvis missuppfattningar eller osäkerhet kring förståelsen av matematiska principer visar sig. Textmängderna blir ofta större i läromedlen och användningen av laborativt/konkretiserande material i undervisningen minskar (Berggren & Lindroth, 2011; Lunde, 2011). Bruce (2018) lyfter fram den stora utmaningen som består av en skillnad som visar sig i mötet mellan en elevs lärandeförutsättningar samt skolans krav respektive pedagogiska möjligheter. Skillnaden kan beskrivas som en sårbarhet som kan ses både i elevens lärande och i lärarens undervisning.

En del av mitt uppdrag som speciallärare är att hjälpa till att överbrygga skillnaden, få de båda sidorna att mötas och därmed minska sårbarheten. Detta arbete bör i så stor utsträckning som möjligt vara proaktivt, genom att arbeta för att förebygga och förekomma sårbara lärande- och undervisningssituationer. Enligt examensordningen ska en speciallärare ”analysera och medverka i förebyggande arbete och bidra till att undanröja hinder och svårigheter i olika lärmiljöer” (SFS 2011:688, s.10). Förutom att stötta elever i sårbarhet inom matematikområdet och hitta individuella lösningar, ska alltså en speciallärare arbeta med att stödja *alla* elevers matematikutveckling och på så sätt förebygga att elever hamnar i framtida matematiksvårigheter (Holgerson & Wästerlid, 2018). Eftersom läromedel i form av läroböcker och lärarhandledningar kan vara viktiga redskap inom matematikundervisningen, vill jag i denna uppsats fokusera på hur de kan inspirera och utveckla lärare och deras undervisning i matematik.

2 Bakgrund

Undervisning innebär en relation mellan elever och lärare, i mötet med ett undervisningsstoff (Holgerson & Wästerlid, 2018). Elever möter ofta matematiken genom ett läromedel men framför allt genom lärarens sätt att visa/beskriva matematik samt val av uppgifter och organisation av aktiviteter. Detta kan ge eleven erfarenheter som bidrar till förståelse av matematiska begrepp och idéer. En lärare behöver god ämneskunskap, vilket innebär en egen god förståelse och förmåga att hantera skilda matematikområden. Läraren behöver även god didaktisk kunskap, vilket innefattar kunskap om till exempel olika material och aktiviteter som ger eleverna goda förutsättningar för lärande, samt kring elevers varierande sätt att exempelvis uppfatta, genomföra, förstå och resonera kring olika matematiska delar. Även Matematikdelegationen (2004) betonade i sitt betänkande ”Att lyfta matematik: intresse, lärande, kompetens” betydelsen av lärares beprövande erfarenhet samt yrkeskunnande inom dessa områden, och lyfte fram vikten av kollegialt lärande och fortlöpande kompetensutveckling. Man menade även att den alltmer utbredda tysta räkningen hade en negativ påverkan på svenska elevers kunskapsutveckling i matematik och förordade istället att lärares kompetens borde användas bättre, genom att lärare i större utsträckning aktivt ska leda undervisningen i klass-

rummen, med variation och kreativitet som nyckelord för att öka intresset för att lära sig matematik. Skolverkets (2020) granskning av matematikundervisningen i årskurserna 4–6, med inriktning på interaktion i klassrummet, bekräftar att tyst räkning förekommer under en relativt stor del av lektionstiden, även om mängden varierar mycket mellan skolor och klasser. Man menar också att interaktion är ett återkommande inslag i undervisningen fastän omfattning och kvalitet varierar. Skolinspektionen trycker på att god interaktion är viktig för utvecklingen av elevernas matematiska tänkande, och att detta område behöver förbättras så att alla elever, oavsett behov och förutsättningar, blir utmanade i utforskande samtal. God interaktion beskrivs som ”lärarledda samtal i vilka elever använder och analyserar matematiska begrepp och argumenterar matematiskt” (Skolinspektionen, 2020, s.13).

”För att kunna beskriva ett matematiskt innehåll behöver man ha förståelse för att tal kan uttryckas med olika *representationsformer*, till exempel med hjälp av konkret material, bilder och symboler för tal. I förståelsen för tal ingår även att kunna växla mellan olika representationsformer.” (Skolverket, 2017, s.14). Elever behöver alltså ha förståelse för olika representationsformer samt ha förmågan att kunna använda dem för att kommunicera; på ett alltmer precist och välutvecklat sätt och med en ökande grad av anpassning till sammanhang och syfte. Genom att erövra olika representationsformer och kunna växla mellan dem får vi en djupare förståelse av matematiska begrepp. I denna process har det talade språket en betydelsefull funktion. Vi använder språket för att successivt bygga upp representationer från det konkreta till det mer abstrakta men även för att utforska och se samband mellan representationer (Zippert, Gustafsson, Nilsson, Jakobsson, Lingefjärd, Svingby & Jönsson, 2011).

Ämnet matematik är komplext och innefattar många olika delar. Även om denna uppsats ofta låter matematiken som helhet vara i centrum, har ändå valet gjorts att lägga störst fokus på *taluppfattning* samt *tals användning*. Skolverket (2017, s.12) beskriver området på detta sätt: ”Innehållet i kunskapsområdet ‘Taluppfattning och tals användning’ omfattar kunskaper om tal och hantering av tal, beräkningsmetoder samt hur dessa kunskaper kan användas i matematiska och vardagliga sammanhang. Taluppfattning, som handlar om förståelse för tals betydelse, relationer och storlek, är grundläggande för att kunna utveckla kunskaper i matematik. Genom att eleverna successivt får möta tal och beräkningar av tal i ett utvidgat talområde, fördjupas deras förståelse och uppfattning av tal och olika räknesätt.” Skolverket (2017) menar vidare att eleverna behöver förståelse för räknesättens egenskaper och samband, och deras användning och effektivitet i skilda situationer. Det är viktigt att kunna välja och använda en metod som är utvecklingsbar och lämplig för den aktuella situationen och därmed behövs kunskaper om centrala metoder för beräkningar, både vid huvudräkning, överslagsräkning, med skriftliga metoder och digitala verktyg.

En fördjupad analys av data från den internationella studien TIMSS från år 2007 visade att vissa matematiska kunskaper behöver utvecklas hos svenska elever i årskurs 8 (Bentley, 2008). Något som utmärkte sig var att de svenska eleverna hade en mer *procedurell* än *konceptuell* kunskap och förståelse i matematik. Detta innebar att de kunde lösa uppgifter som de var vana vid men hade svårare att använda sina kunskaper i nya situationer. En procedurellt inriktad undervisning fokuserar på beräkningar utan begreppsligt fäste och inte på att visa hur olika moment i matematiken förståelsemässigt bygger på varandra. I flera asiatiska länder, exempelvis i Hong Kong och Singapore, sker en mer konceptuellt inriktad undervisning, där begreppsförståelsen samt förståelsen av generella matematiska principer har en viktig roll, vilket stödjer uppbyggnaden av den hierarkiska kunskapsstrukturen. Kunskaperna visar sig genom en konceptuell undervisning i ett mer sammanhängande mönster istället för som isole-

rade öar, menar Bentley (2008). Detta innebär att överföring av kunskaper från en kontext till en annan underlättas.

År 2018 genomförde OECD för sjunde gången den internationella undersökningen PISA. Studien undersöker bland annat 15-åriga elevers kunskaper i matematik. Efter nedslående resultat framför allt år 2012, vad gällde de svenska elevernas matematikkunskaper, har den senaste PISA-undersökningen, som presenterades i december 2019, visat på en positiv utveckling av de svenska 15-åringarnas prestationer inom matematik, och är nu tillbaka på samma nivåer som 2006, innan nedgången började (Skolverket, 2019). Matematik i PISA (*Mathematical literacy*) ”handlar om elevers förmåga att formulera, använda och tolka matematik i en mängd olika sammanhang. Detta inkluderar matematiska resonemang och att använda matematiska begrepp, procedurer, fakta och verktyg för att beskriva, förklara och förutsäga fenomen” (Skolverket, 2019, s.10). Analysen av resultatet från PISA visar på stora skillnader mellan olika länder. Flera länder i Asien har mycket höga medelpoäng och har en stor andel elever som presterar på hög nivå samt få elever på de lägsta nivåerna. De länder/regioner som ligger överlägset i topp vad gäller matematikresultat är B.S.J.Z.-Kina (Beijing, Shanghai, Jiangsu och Zhejiang) samt Singapore. Sverige och de andra nordiska länderna ligger strax över genomsnittet för OECD-länderna (Skolverket, 2019). Resultat från exempelvis en PISA-undersökning kan dock alltid diskuteras och det finns många intressanta delar att fundera över; kanske både att ifrågasätta och dra lärdom av. Uppenbart är att olika förutsättningar och undervisningskulturer påverkar elevernas resultat på olika sätt.

Funderingar kring läromedels användning och påverkan, samt en nyfikenhet kring olika traditioner och idéer inom matematikundervisningen i olika länder, ledde fram till mitt val av inriktning i denna uppsats, där matematikläromedlen *Mattespanarna* och *Singma matematik* för årskurs 4 studeras.

3 Syfte samt forskningsfrågor

Syftet är att i denna studie, utifrån en specialpedagogisk synvinkel, utforska två matematikläromedel för årskurs 4, med inriktning framför allt på taluppfattning samt tals användning. Syftet är att studera läromedlens centrala idéer, hur olika representationsformer används i läromedlen samt hur elever i behov av stöd och utmaningar stöttas. Vidare utforskas hur lärarhandledningen kan vara en resurs för lärare under planering och genomförande av undervisningen. Detta görs med hjälp av följande forskningsfrågor:

- Vilka centrala idéer utgår läromedlen ifrån? Ger lärarhandledningarna läraren stöd vid planering och genomförande av undervisningen, och i så fall på vilket sätt?
- Hur används olika representationsformer i de två läromedlen? På vilka sätt kan representationsformerna underlätta och stötta lärandet för eleverna?
- Hur beskriver några lärare sina erfarenheter av att arbeta med dessa läromedel?

4 Teoretiska utgångspunkter

Lärande är en process som sker i samspel med andra, i olika sammanhang, med stöd av olika medierande resurser och redskap. På så sätt kan kunskap och förståelse växa fram. I skolan kan lärande ske med stöd av exempelvis resurser som lärare och klasskamrater, samt redskap som läroboken och olika laborativa och visuella material. Med utgångspunkt i detta har jag valt att göra en studie med sociokulturellt perspektiv som inriktning. Aktuella begrepp såsom *medierande redskap* och *appropriering* förklaras och utvecklas i kapitlet.

4.1 Sociokulturellt perspektiv

Den sovjetiske psykologen Lev Vygotskij (1896–1934) ses som grundaren till *det sociokulturella perspektivet*, vilket har vuxit fram ur hans tankar och arbeten kring språk, utveckling och lärande (Phillip & Soltis, 2014; Säljö, 2017). Vygotskij var intresserad av undervisning och lärande, framför allt bland barn med olika varianter av inlärningssvårigheter och kommunikativa svårigheter (Säljö, 2015). Han hade ett stort intresse av människans utveckling både ur ett biologiskt och ett sociokulturellt perspektiv, och av hur dessa samverkar. Det sociokulturella perspektivet utvecklades på 1920-talet men fick sitt stora genomslag under 1980–1990-talen, då intresset för hur detta kunde användas inom skola och förskola återuppväcktes. Detta perspektiv betonar vikten av sociala samspel för lärande och utveckling och är en socialpsykologisk teoribildning som ger förståelse för hur individer utvecklar kunskap genom samspel med andra människor i olika aktiviteter. Kommunikation och interaktion är av stor betydelse (Säljö, 2017). Juter och Nilsson (2011) beskriver det som att lärprocesser inte ska ses som något som endast sker inuti den lärande. För att vi ska förstå hur lärande går till och vilka pedagogiska insatser som behövs för att lärande ska stimuleras, bör vi noga studera det kulturella och praktiska sammanhang och den situation som lärandet sker inom. Det mänskliga tänkandet sker utifrån det perspektiv som människan är en del av och beror på situationen eller sammanhanget. Ett barn är aktivt i sitt utforskande av världen och ökar hela tiden sin förmåga att interagera med andra i alltmer sammansatta kontexter (Säljö, 2015).

4.1.1 Medierande redskap

Ett grundläggande begrepp inom det sociokulturella perspektivet är *mediering*, vilket innebär att människan använder redskap för att förstå och verka i sin omvärld (Säljö, 2017; Wertsch, 2007). Redskapen medierar våra handlingar; de utgör instrument som vi använder och är beroende av, samt gör att vi ser och förstår världen på vissa sätt. Vårt tänkande och vårt handlande utövas genom och formas av medierande redskap som möter oss i våra sociala gemenskaper (Säljö, 2015). Juter och Nilsson (2011) lyfter fram hur olika former av redskap kan användas för kommunikation och tänkande i samspel med andra, och hur dessa kan hjälpa människor att ta del av och kommunicera kunskap som är socialt och kulturellt genererad. Genom att använda redskap som medierande resurser kan vi göra sådant som vi inte skulle kunna klara av med endast de förmågor vi bär med oss från början. Vår relation till omvärlden förändras genom vår förmåga att skapa redskap (Säljö, 2015).

Genom den sociokulturella utvecklingen har människan skapat otaliga redskap som hjälper oss i vårt dagliga liv. Vygotskij skiljer på två sorters redskap: de *fysiska* och de *psykologiska* (Säljö, 2018). Fysiska redskap kallas ofta även för *artefakter*, vilket innebär föremål som människan tillverkat (ibland kan dock begreppet artefakt användas både för fysiska och psykologiska redskap men jag väljer här Säljö's uppdelning). Exempel på artefakter är penna, tallinje, tiobasmaterial, dator, bok och mätinstrument. Dessa redskap är tillverkade av människor för att kunna användas i olika praktiker och för att ha specifika egenskaper. Antalet red-

skap har ökat stort genom historien och dessa har mycket stor betydelse för människornas lärande och utveckling. Exempelvis har utvecklingen av skrift och medier förändrat våra sätt att lagra information, lära samt kommunicera.

De psykologiska redskapen är verktyg som används vid tänkande och kommunikation, exempelvis alfabetet, vårt siffersystem, formler, tecken och symboler (Säljö, 2017; Säljö, 2018). Dessa skapas, förändras och utvecklas inom en kulturell gemenskap. Stor vikt läggs vid psykologiska redskap inom den *semiotiska* medieringen, vilket innebär mediering med stöd av symbolsystem och meningsbärande tecken. Semiotiska system binder samman det sociala och det individuella, samt ger möjlighet till kommunikation och meningsskapande. Några exempel på semiotiska system i matematik är matematiska uttryck och symboler, tabeller, diagram, tal- och räknesystem, men även *språket* (Juter & Nilsson, 2011). Vygotskij menade att språket är det övergripande psykologiska redskapet och han kallade det mänskliga språket för ”redskapens redskap”. Han såg på språket som ett flexibelt och utvecklingsbart teckensystem med vars hjälp vi kan tolka, analysera och beskriva världen på olika sätt. Språket medierar världen för oss (Säljö, 2015). Genom språket blir människan delaktig i andras perspektiv och sociokulturella erfarenheter förmedlas. På så sätt är språket en länk mellan individen och samhället (de kollektiva erfarenheterna). Språket fungerar som ett redskap för kommunikation både *mellan* människor och *inom* människan (Säljö, 2018). Vygotskij vände sig mot att se tänkande och språk som två oberoende företeelser. Han såg istället dessa som nära besläktade och menade att det är genom kommunikation, framför allt språklig sådan, som vi utformas som tänkande varelser. Språket finns mellan människor men även inom en människa eftersom vi tänker med språkliga/psykologiska redskap, exempelvis bilder, modeller och begrepp (Säljö, 2017).

Inom den sociokulturella traditionen menar man att fysiska och psykologiska redskap inte kan ses som helt separata delar. De förekommer tillsammans och utgör varandras förutsättningar. Istället för att dela upp redskapen kan den mer allmänna termen *kulturella* redskap användas. Exempelvis krävs det för att kunna använda en tumstock, att man kan hantera den fysiskt, behärskar de språkliga redskapen i form av siffror och symboler, samt vet hur man ska tolka och använda detta (Säljö, 2017). Människan bygger således in idéer, kunskap och begrepp i fysiska artefakter. Ett fysiskt föremål är inte längre ett ”dött objekt” när det med stöd av ett eller flera andra redskap, ofta språket, kan fungera som en resurs i en social praktik, där lärande kan ske (Säljö, 2014).

4.1.2 Lärande

Vygotskij menade att lärande sker i sociala sammanhang och intresserade sig för barns ”inlärningspotential”; alltså vad ett barn kan prestera med stöd och ledning av exempelvis en lärare. Han skapade begreppet *den proximala utvecklingszonen* som ett sätt att beskriva en individs möjliga potential för utveckling (Säljö, 2017). Han menade att när en människa behärskar en färdighet eller ett begrepp så finns även andra begrepp och färdigheter inom räckhåll. Dessa kan man nå genom att man får stöttning av en kunnig person och vägleds i användandet av kulturella redskap. Inledningsvis ges mycket stöd men efterhand kan stödet minska, och kan till slut helt tas bort när den lärande behärskar detta helt själv. Det är viktigt att den kunnige personen (exempelvis en lärare) hittar elevens proximala utvecklingszon och låter eleven aktivt ställas inför och ta sig an utmaningarna, istället för att själv göra för mycket av jobbet och lotsa eleven vidare utan att den behöver ta ett allt större ansvar (Säljö, 2017). Det är inom ramen för den proximala utvecklingszonen som man är mottaglig för undervisning och har tillräcklig förståelse för att kunna följa med i en genomgång eller en förklaring, och kan ta till sig det, grundat i det man förstår/behärskar sedan tidigare (Säljö, 2015).

Appropriering är ett begrepp som används för att förstå och beskriva lärande, och innebär att man blir bekant med, lär sig att använda och behärska kulturella redskap samt förstår hur de medierar omvärlden. Appropriering sker genom att man själv använder redskap men även genom att man ser eller hör andra använda dem på specifika sätt. I det dagliga samspelet med sin omgivning lär sig barnet exempelvis att tala och att förstå socialt samspel. Detta sker med hjälp av olika *vardagliga begrepp*, det vill säga grundläggande språkliga redskap som man tar till sig genom det vardagliga samspelet. *Vetenskapliga begrepp* är, enligt Vygotskij, abstrakta och har sitt ursprung i vetenskapen, exempelvis *substantiv* och *Pythagoras sats*. Eftersom dessa begrepp inte möter oss i vardagen och det inte är lätt att tillägna sig dem utan att få dem förklarade, så menade Vygotskij att det är i skolan som man ska få möta och tillägna sig dessa. ”Det är här det finns möjligheter att låta barn möta och appropriera det slags kunskaper som låter dem förstå världen utanför den egna erfarenheten. Läraren och undervisningen blir nyckeln till kunskaper som ger förutsättningar för att förstå processer i natur och samhälle på ett mer principiellt sätt.” (Säljö, 2017, s.259). Läraren blir en medierande resurs som kan hjälpa individen att se samband mellan abstrakta begrepp och egna tidigare erfarenheter (Säljö, 2018).

Skolans uppgift är att ge eleverna de redskap och det stöd de behöver för att de ska kunna få tillgång till samhällets gemensamma kunskaper. Tanken att lärande sker i en process där kunskap växer fram ur ett samspel mellan lärare och elev, samt mellan elever, är inte kopplat till någon särskild pedagogik, utan handlar i praktiken om att de lärande ges möjligheter att delta i olika situationer där möjligheter att appropriera kunskaper och färdigheter skapas (Säljö, 2017). Den sociokulturella synen på appropriering och utveckling kan användas för att förstå hur människan tar till sig erfarenheter och klarar av att använda dem i andra sammanhang (Säljö, 2015).

5 Litteraturgenomgång / tidigare forskning

Detta avsnitt tar upp forskning och litteratur som styrker studiens relevans. Inledningsvis presenteras forskning kring lärande inom matematik samt matematiksvårigheter, vilket även kopplas till arbete med olika representationsformer. Därefter belyses forskning kring lärobokens/lärrarhandledningens användning och betydelse. Avslutningsvis beskrivs några olika undervisningskulturer, framför allt i Sverige och i Ostasien.

5.1 Lärande i matematik

Den grundläggande utvecklingen av taluppfattningen börjar med att ett barn lär sig att rabbla talraden, mer eller mindre mekaniskt. Så småningom kan varje talord förknippas med ett precist objekt. Eleven kan sedan urskilja en *ordinal* egenskap hos talen (att talen kommer i en given ordning), en *kardinal* egenskap (antal, ”hur många?”) samt en *del-helhets-egenskap* (i talet finns summan av flera andra tal och talet ingår i summor för andra tal). En kvalitativ skillnad när det gäller taluppfattning kan bestå av *vilka* egenskaper eleven uppfattar och om aspekterna uppfattas var för sig eller simultant (Bentley & Bentley, 2011).

Matematikundervisningen har ofta genom åren inneburit att man arbetat från de mindre delarna till helheten, vilket kallas *syntesmetoden*. Risken med detta är att de små delarna enbart blir enskilda moment som inte kopplas ihop till en helhet. Ljungblad (2012) menar att man ibland måste arbeta med helheten först, för att sedan kunna se dess mindre beståndsdelar och relationen mellan dem. Att tillsammans utgå från helheten, och utifrån detta bestämma delarna,

innebär att barnet får till viss del andra tankeprocesser. Detta kallas för *analysmetoden*. Ett barn bör få arbeta både med syntes och analys när hen utforskar matematiken, betonar Ljungblad (2012). Ma (1999) visade i en studie på grundläggande skillnader mellan matematikundervisningen i USA och i Kina. I USA ses exempelvis $12-7=5$ som basfakta, vilket eleven ska memorera tills hen kan det utantill. I Kina ses addition och subtraktion som ett komplext nätverk, där tal sätts samman och delas upp, med stöd av undervisningen, för att ge en djupare förståelse av den grundläggande aritmetiken. Antalsuppfattningen ses som primär och grundläggande.

En diskussion som periodvis varit aktuell inom skolan är vilka beräkningsstrategier eleverna ska få lära sig. En *algoritm* är en skriftlig räknemetod, till skillnad från huvudräkningsstrategier. Det finns ett antal olika sorters algoritmer och ett par av de vanligare är *uppställning* (kallas även lodrät algoritm) och *omgruppering*. Dessa har i analyser av TIMMS 2007 visat sig vara de mest framgångsrika. Omgruppering kan exempelvis räknas på detta sätt: $6+7=6+6+1=12+1=13$. Det kan även användas för att förklara den vanliga standarduppställningen med växling (Bentley & Bentley, 2011). Båda sätten har sina för- och nackdelar. Med hjälp av uppställning kan man i addition räkna ut vilket högt tal som helst utan att behöva räkna högre än till 20 och man behöver inte ha lika god känsla för likhetstecknets betydelse. Nackdelen kan vara att man inte utmanar sin taluppfattning. Med omgruppering eller liknande skriftlig räknemetod tränas taluppfattningen och samtidigt behöver man ha en grundläggande taluppfattning för att kunna utföra beräkningen, samt behärska positionssystemet. Ljungblad (2012) vill se dessa som komplement till varandra och menar dessutom att miniräknare och överslagsräkning är ytterligare komplement till huvudräkning när det gäller tal över 200.

Svenska elevers förståelse av *begrepp* är något som behöver utvecklas, enligt analysen av TIMMS 2007 (Bentley & Bentley, 2011; Bentley, 2008). Att lära sig ett nytt begrepp innebär att man utgår från de begrepp som man tidigare lärt sig och med hjälp av särskiljande attribut eller en specificering kan det nya begreppet särskiljas från de tidigare. För att undvika osäkerhet kring om ett attribut tillhör begreppet eller om det är en del av kontexten som det presenteras i, bör kontexten varieras. Transfer av kunskaper från en kontext till en annan obekant kontext, underlättas om undervisningen inriktas på förståelse av matematiska begrepp. Genom att eleverna tränas på att lösa problem i olika kontexter och på att modifiera procedurer för att passa in i olika kontexter, kan denna transfer underlättas och en mer konceptuell kunskap utvecklas.

Den ungerskfödde matematikern George Pólya (1887–1985) betonade att matematiken har två sidor; å ena sidan standardiserade lösningsmetoder och exakt argumentation, å andra sidan undersökande och experimenterande. Pólya utvecklade en metod för matematisk problemlösning, bestående av fyra faser. Den första fasen innebär att sätta sig in i problemet (exempelvis att förstå begrepp, försöka visualisera problemet, se om all nödvändig information finns och att återge problemet med egna ord). Den andra fasen handlar om att göra en preliminär plan för vilken metod som ska användas (rita en figur, sök efter mönster, arbeta baklänges, lös ett likartat men enklare problem, och så vidare). Den tredje fasen består av att genomföra planen och den fjärde av att kontrollera resultatet, reflektera över rimligheten och ta med sig lärdomar till nästa gång. För att bli en duktig problemlösare måste man lösa många problem, i olika kontexter, så att procedurer och regler kan "få liv" och upplevas som meningsfulla (Pólya, 2003).

Den brittiska matematikern Richard Skemp (1919–1995) lyfte fram skillnaden mellan undervisning med hjälp av ett *relationellt* synsätt samt ett som använder en *instrumentell* metod

(Skemp, 1976). Relationell förståelse innebär att man både förstår hur man ska göra och varför man ska göra det, vilket innebär förståelse för delarna, hur de förhåller sig och varför de tillämpas på det sätt de gör. Att ha instrumentell förståelse betyder att man har lärt sig regler och procedurer; att kunna tillämpa en serie steg utan att veta varför de tillämpas på det sättet. Ofta när elever lär sig matematik kan de uppleva en kortvarig framgång genom att en instrumentell förståelse för ämnet skapas. Dock innebär en relationell förståelse matematiska kunskaper och förmågor som håller i längden.

Pólyas och Skemps beskrivningar av de två synsätten på undervisning och lärande kan även kopplas till begreppen *procedurrell* och *konceptuell*, vilka tidigare redogjorts för. Skott, Jess, Hansen och Lundin (2010) menar på liknande sätt att matematik består av produkter i form av färdigutvecklade procedurer och begrepp, samt är en aktivitet/process. Matematiskt lärande beskrivs som ”en process som leder till förändringar av ens sätt att förstå, behandla och ingå i arbetet med matematiska processer och produkter” (Skott m.fl., 2010, s. 36). Synen på matematik som en process har stärkts inom matematikdidaktiken sedan 1990-talet och mer fokus har lagts på exempelvis kommunikation, samband och representation. Traditionellt sett har dock skolmatematiken lagt mest vikt vid resultat och produkter, vilket har inneburit att eleverna har lagt mycket tid på att öva in exempelvis multiplikationstabeller och algoritmer. Skott m.fl. (2010) menar att en ensidig fokusering på produkter kan leda till lärandeproblem. Om eleverna endast arbetar med färdiga algoritmer leder detta inte till insikt och förståelse, vilket däremot följer av arbete med processer. Vid en undervisning som endast fokuserar på produkten kan eleverna se matematik som något man ska komma ihåg istället för att det handlar om att komma underfund med vad man ska göra. En mer processororienterad undervisning innebär undersökande aktiviteter och diskussioner, där begrepp och procedurer ingår som en naturlig del.

Olika perspektiv eller teoribildningar ger olika syn på lärande och därmed olika sätt att undervisa. *Lärande som tillägnande* och *lärande som deltagande* är två skilda perspektiv som beskrivs av Skott m.fl. (2010). Lärande som tillägnande förklaras som säkerställande, förändring eller en utvidgning av tidigare uppnådd färdighet och förståelse. Den enskilda elevens aktiva uppbyggande av kunskap, vilket bygger på det man redan kan, samt att lära sig med förståelse, är viktiga delar inom detta perspektiv. Genom att eleven får möjlighet att hitta och konstruera samband mellan olika metoder och begrepp kan matematiken upplevas som sammanhängande istället för som isolerade öar. Även om tillägnande bygger på att kunskap är resultatet av den enskildes konstruktion, ingår social interaktion och kommunikation som ett komplement till enskilt arbete i ett senare skede när den individuella förståelsen har byggts upp. Lärandet startar alltså genom uppbyggnad av individuell förståelse av procedurer och begrepp för att sedan gå vidare till att samarbeta med andra kring dem. Denna syn på lärande har ifrågasatts eftersom den inte lägger någon avgörande vikt vid den sociala interaktionen.

Lärande som deltagande kan beskrivas som något som sker när man är en del av sociala gemenskaper. Genom deltagande i en social praxis tar man gradvis till sig gemenskapens syn och kunskaper, och kan utifrån detta bygga upp individuell förståelse och kunskap. Även matematiska diskurser och rutiner byggs upp som en del av detta perspektiv, i form av normer för vad som är matematiska aktiviteter och ömsesidiga förväntningar. Vygotskij och det *sociokulturella perspektivet* är tydligt kopplat till detta. Språket har en viktig roll för utvecklingen av de högre mentala funktionerna. Vygotskij menade att begreppsbildning är en målinriktad aktivitet som bygger på intellektuella funktioner och är beroende av språklig mediering (Skott m.fl., 2010).

Kommunikation och samtal i matematikundervisningen är av stor betydelse, enligt Knutsson (2019). Detta överensstämmer väl med det sociokulturella perspektivets syn på lärande som deltagande. I ett matematiskt samtal utforskas och fördjupas matematikens samband och idéer, och eleverna får möjlighet att använda begrepp samt representationer för att utveckla det matematiska tänkandet samt undersöka och förstå världen omkring sig. Även Malmer (2002) betonar vikten av att skapa inlärningssituationer där ord behövs och blir efterfrågade, för att hjälpa eleverna att bygga upp ett väl fungerande ordförråd. När eleverna undersöker och laborerar får de tillfällen att själva berätta och beskriva sina iakttagelser och upptäckter. Genom detta kommer de i kontakt med sitt tänkande och de kan bli medvetna om inte bara *vad* de vet utan även *hur* de vet det. Vid bildandet av *tankestrukturer* har både skriftligt och muntligt språk stor betydelse. Att tala är ett sätt att lära, menar Malmer (2002).

Det mest avgörande för en framgångsrik inlärning är kommunikationens didaktiska kvalitet, enligt Löwing (2006). Den består av tre beståndsdelar och den första handlar om lärarens egen kunskap om det hen ska undervisa om, vilket exempelvis kan påverkas av osäkerhet kring matematikämnet didaktik och en omedvetenhet om hur läromedelsförfattarna tänker sig att ämnesinnehållet kan byggas ut och förklaras. Nästa del är lärarens förmåga att lyfta fram poängerna i det som hen ska undervisa om. Det finns till exempel en risk att en genomgång handlar mer om vad eleverna ska göra (rita, klippa, skriva svaret) istället för om vad man ska lära sig (strategier för hur man kan tänka när man arbetar med uppgifterna), vilket gör att många elever behöver kompletterande förklaringar under lektionen. Den tredje delen handlar om att beakta elevernas förståelse och abstraktionsförmåga. Då krävs att läraren ägnar tid till att ta reda på vad som är elevernas egentliga svårigheter samt anpassar undervisningen till deras varierande förförståelse, för att lyckas möta eleverna på rätt nivå.

5.1.1 Matematiksvårigheter

Olika begrepp med varierande definitioner har använts genom åren för att beskriva matematiksvårigheter. Övergripande begrepp är exempelvis "elever i behov av särskilt didaktiskt stöd i matematik" och "elever med särskilda utbildningsbehov i matematik". En uppdelning kan göras i "allmänna matematiksvårigheter", vilket är ett brett begrepp som kännetecknas av svaga prestationer inom matematikens samtliga delar, samt "specifika matematiksvårigheter", vilket syftar på mer avgränsade svårigheter inom en del av matematiken, exempelvis antalsuppfattning (Roos & Ljungblad, 2018). Det finns många orsaker till matematiksvårigheter: perceptionsproblem, språksvårigheter, uppmärksamhetsproblem, koncentrationssvårigheter, dåligt självförtroende, svårighet att styra sin abstraktionsförmåga, resursbrist och så vidare (Ljungblad, 2012). Ofta kan flera svårigheter samverka. Lunde (2011) delar in orsaker till svårigheter i matematik i fyra grupper: sociologiska, kognitiva, neurologiska samt didaktiska. Denna uppsats går inte in på djupet varken när det gäller definitioner eller bakomliggande orsaker till svårigheter, utan använder oftast det generella begreppet *matematiksvårigheter*, för att beteckna sårbarheten som uppstår i mötet mellan en elevs lärandeförutsättningar och skolans krav respektive pedagogiska möjligheter. Lunde (2011) menar att ett brett begrepp kan vara mest funktionellt ur ett specialpedagogiskt perspektiv. Då ses matematiksvårigheter som ett multifaktoriellt problem, vilket uppstår i samverkan mellan elevens lärostil och emotionella/kognitiva förhållanden samt matematikens innehåll och undervisningsformer.

Många elever behöver extra tid och stöd för att utveckla förståelse inom olika delar av matematiken. Det kan till exempel handla om elever som inte förstått användningen av bokstäver i formler och uttryck eller inte blivit förtrogen med att dela upp de grundläggande talen 1–10 i mindre delar utan istället räknar uppåt eller nedåt med hjälp av fingrarna. För att utveckla förståelse inom ett område är det viktigt att ha konkreta erfarenheter av operationer inom detta

men det är även av stor betydelse att eleverna muntligt, och med ett språk som de behärskar och förstår, får sätta ord på det som de gör (Holgersson & Wästerlid, 2018). Neuman (2013) kallar talen 1–10 för bastal och beskriver hur viktigt det är att lära sig dessa tals del-del-helhetsrelationer (exempelvis $2/2/4$ och $3/1/4$). Bastalen kan delas i två delar, på sammanlagt 25 olika sätt och dessa byggbitar gör det möjligt att sätta ihop och foga samman alla övriga tal. Denna förtrogenhet har man stor hjälp av när man till exempel adderar eller subtraherar över tiotalgränser; att se talen istället för att behöva räkna ut svaret. Bristande talföreställningar samt förståelse för sambandet mellan de fyra räknesätten tycks förorsaka grava eller specifika matematiksvårigheter, och dessa begrepp och föreställningar utvecklas inte genom tabellträning, enligt Neuman (2013). Undervisningen bör istället spegla barns sätt att spontant och i samspel med närmiljön utveckla förståelse, utifrån en vagt uppfattad helhet som efterhand blir tydligare och de olika delarna framträder, vilket kan ske med stöd av laborativt material och varierande undervisningsmetoder.

Ett barn som har en svag antalsuppfattning kan påverkas av detta i många situationer, vilket kan vara svårt för oss vuxna att se och förstå, och kanske tar vi ibland för givet att vissa grundläggande delar inom matematiken fungerar för eleven. Ljungblad (2012) menar att barnets grund till matematisk medvetenhet måste formos i lek, laborerande och utforskande. Detta ger upplevda erfarenheter, vilka skapar inre bilder som eleven kan plocka fram. När man kan ta fram och hålla kvar en inre bild, samt har kraft kvar att lägga på reflektion, utvecklas den matematiska förståelsen. Elever i specifika matematiksvårigheter saknar ofta inre bilder på konkreta saker eller på abstrakta matematiska delar. De har alltså inte dessa viktiga verktyg att plocka fram vid diskussioner eller självständigt arbete. För att deras inre bilder och modeller som stödjer tänkandet så småningom ska automatiseras behövs medveten träning och stöttning av olika verktyg. Mötet med matematiken måste få präglas av att barnet får lyckas i sitt arbete och får känna framgång.

Lärandet gynnas av att sinnena aktiveras, menade den tjeckiske pedagogen Comenius redan på 1600-talet. Han var övertygad om att undervisning behöver utgå från grundläggande begrepp samtidigt som dessa åskådliggörs genom en progression från det konkreta till det abstrakta, och framhöll därför att konkretisering och samtal är undervisningens grundpelare (Kroksmark, 1989). Karlsson och Kilborn (2015) framhåller vikten av konkretisering för att belysa och skapa förståelse för matematiska metoder, formler och modeller, och på så sätt närma sig matematikens abstrakta natur. För elever i matematiksvårigheter är därför matematiska samtal och en undervisning där olika material ingår, av stor betydelse. Tanken med användningen av konkret material är att det ska vara ett stöd för elevens lärande, i både resonemang och förklaringar, enligt Karlsson och Kilborn (2015). Genom detta stöd får eleven bättre förutsättningar att kunna göra generaliseringar och se mönster, istället för att endast lösa enkla uppgifter utan reflektion.

Tidiga insatser är betydelsefulla när bristande kunskaper eller svårigheter upptäcks, för att dessa inte ska förstärkas och växa ytterligare. Neuman (1989) menar att det är viktigt att se varje elevs räknande och hitta de tidiga missförstånd som kan leda till senare svårigheter. Dessa elever behöver stöttning för att hitta strukturer som de kan bygga vidare på samt strategier som de kan använda för att behärska ett nytt område och kunna utvecklas vidare. Ljungblad (2016) betonar betydelsen av en väl fungerande samverkan mellan skolans personal, exempelvis matematiklärare, speciallärare och specialpedagoger, samt en kvalitativ kartläggning av matematikens grunder som fortsätter under elevens hela skoltid. För elever i specifika matematiksvårigheter är det av stor betydelse, menar Ljungblad (2012), att de får förtroende för samt möjlighet till många matematiska samtal med engagerade lärare.

5.1.2 Representationsformer

Tillgång till flera olika representationsformer för samma matematiska begrepp ger en mer utvecklad och funktionell begreppskunskap, och förmågan att växla mellan dessa kan starkt bidra till en förbättrad problemlösningsförmåga (Karlsson & Kilborn, 2015). Tankarna om att det matematiska lärandet stärks genom användandet av olika representationsformer eller representationsnivåer är inte nya. Den amerikanske psykologen Jerome Bruners (1915–2016) idéer om tre representationsnivåer har lyfts fram i många studier sedan 1960-talet. Den *handlingsbaserade* nivån innebär att omvärlden uppfattas och hanteras genom fysiska handlingar. På den *ikoniska/bildmässiga* nivån representeras händelser och information i form av mentala bilder men även verbala formuleringar. Den *symboliska* nivån utvecklas sist och här hanteras information i form av koder eller symbolsystem, såsom språket och matematiska symboler (McLeod, 2019; Rystedt & Trygg, 2010). Bruner menade att effektivt lärande kan ske genom en progression från handlingsbaserad representation, till bildmässig och sedan till symbolisk (McLeod, 2019). Han lyfte även att det finns risker med att hoppa över exempelvis den bildmässiga nivån, fastän eleven redan har en väl utvecklad symbolisk förståelse, eftersom eleven då inte har någon bildmässig representation att falla tillbaka på, om det senare skulle uppstå svårigheter på den symboliska nivån (Rystedt & Trygg, 2010). Enligt Bruner är språket viktigt för den ökande möjligheten att hantera abstrakta representationer och hjälper oss att utveckla våra kognitiva förmågor (McLeod, 2019).

Även matematikern Zoltan Dienes (1916–2014) förespråkade redan i början av 1960-talet ett arbetssätt som var elevaktivt, med användning av många laborativa material. Han menade att barn lär bäst när de får arbeta aktivt med olika konkreta modeller. Dienes skapade flera principer för matematikundervisning, varav några berör laborativa material. ”Mathematical variability principle” betyder att förståelse för ett begrepp kan skapas genom att variablerna varieras för att tydligt visa vad som är konstant och vad som kan varieras inom begreppet. ”Perceptual variability principle” innebär att en elev ska få möta ett begrepp i olika fysiska former men med liknande svårighetsgrad, för att kunna förstå det som är viktigt i ett abstrakt matematiskt begrepp. Laborativa material kan således användas för att lyfta variationen i det som ska läras och på så sätt öka förståelsen (Rystedt & Trygg, 2010). Materialet kan fungera som ett verktyg för att översätta abstraktioner till en form som gör det möjligt för elever att relatera ny kunskap till sin tidigare kunskap (Moyer, 2002).

Det laborativa materialets styrka är att det ger möjlighet för fler elever att förstå matematiska begrepp och samband, istället för utantillinlärning eller ingen inlärning alls. Genom att utgå från ett konkret problem för eleverna att utforska, uppstår diskussioner med nya frågor och tankar. Lärarens uppgift är att leda och stötta eleverna vidare fram mot det abstrakta, som formuleras med ett formellt matematiskt symbolspråk. Med hjälp av laborativt material kan detta göras i flera steg (Berggren & Lindroth, 2011). Det finns olika modeller för hur detta kan gå till, ofta inspirerade av Bruners representationsnivåer. Representationsformer kan således benämnas och delas in på till viss del olika sätt. *CRA* är ett vanligt förekommande sätt att beskriva de tre huvudsakliga delarna: *concrete – representative – abstract* (Lundberg & Sterner, 2006). En variant som används i exempelvis Singapore är *CPA*, där *pictorial* används istället för *representative* (Agardh & Rejler, 2019). Den konkreta fasen innebär att eleverna arbetar laborativt med olika material, i kombination med muntlig kommunikation. I den representativa fasen arbetar eleverna med visuella representationer; genom att rita egna enkla bilder eller använda färdiga illustrationer. Den abstrakta fasen innebär att eleverna fördjupar förståelsen och tankeformerna som de tidigare utvecklat, och nu tänker och löser uppgifter

genom att använda siffror och andra matematiska symboler. I alla tre faser är det reflekterande samtalet viktigt (Lundberg & Sterner, 2006; Witzel, Riccomini & Schneider, 2008).

Visuella representationer är viktiga som stöd vid utforskande matematiksamtal, menar Frisk (2019). Detta innebär ett konkret material eller en bild, vilken kan synliggöra ett matematiskt innehåll. I och med det blir det ett redskap för tänkande. Kommunikationen i klassrummet underlättas med hjälp av visuella representationer och de kan exempelvis användas som underlag för att jämföra beräkningsstrategier. På så sätt bidrar representationen till att ge eleverna ökad möjlighet att utveckla ett rikt språk för att kommunicera det matematiska tänkandet. En *tallinje* är ett exempel på en visuell representation; en bild av ett abstrakt matematiskt innehåll, och kan användas som ett verktyg för att visualisera elevernas tankar. Tallinjen kan antingen vara mental eller visualiseras för att kunna kommuniceras med andra samt vara ett stöd för elevens matematiska tänkande genom att till exempel hjälpa till att strukturera tal. Syftet med en visuell modell är att stötta elevernas matematiska utveckling samt överbygga gapet mellan den informella och den mer abstrakta matematiken.

I Singapore lär sig eleverna att använda *blockmodellen* (*model method* eller *bar modeling* på engelska), en visuell strategi för att lösa aritmetiska och algebraiska uppgifter (Fong & Lee, 2009). Blockmodellen innebär en visuell representation av ett problem eller ett begrepp, där rektangulära block används för att representera kända och okända kvantiteter. Tanken är att elever ska ges ett verktyg för att visualisera textuppgifter, så att underliggande strukturer lättare synliggörs. Elevernas kunskap om relationen mellan delar och helhet av tal ligger till grund för blockmodellen. I de lägre åldrarna används material, exempelvis klossar, för att representera uppbyggnaden av tal och de något äldre eleverna lär sig att rita rektanglar som representerar informationen i uppgiften. En studie av Fong och Lee (2009), där blockmodellen användes, bekräftade att undervisning i att använda representationer ger eleverna stöd i arbetet med textuppgifter. Användandet av modellen gör att elever måste reflektera över hur de kan representera informationen som presenteras i texten; först i form av en blockritning och sedan som en serie matematiska symboler.

Olika begrepp kan användas för att beskriva material som används i den konkreta representationsfasen. *Laborativa material* är ett omfattande begrepp och i engelskspråkig litteratur används ofta begreppet *manipulatives*. Det handlar oftast om fysiska/konkreta material som kan hanteras på olika sätt, till exempel genom att omfördelas, ordnas, sättas samman, plockas isär eller vridas. Begreppet *konkret* material används ofta och kan ibland bytas ut mot *konkretiserande* material, för att tydliggöra att ett material i sig är "dött". Konkret material ger inte automatiskt matematiska insikter och bidrar heller inte i sig till förståelse. Matematiken måste lyftas fram eller tillföras materialet av läraren och på så sätt kan materialet användas för att konkretisera något och den språkliga förståelsen kan underlättas (Rystedt & Trygg, 2010). Även Clements (1999) menade att *manipulatives* i sig inte är tillräckliga. De måste användas i en kontext med lämpliga uppgifter för att aktivt fånga barns tänkande under ledning av en lärare, som kan vägleda barnen för att de ska kunna se och förstå hur olika representationer hänger samman. Han poängterade att materialen inte ska användas som ett *mål* utan som ett *medel* för att nå ett mål. Scherer, Beswick, DeBlois, Healy och Moser Opitz (2016) bekräftar att det finns en risk att laborativa material används som en kortsiktig lösning för att hjälpa eleverna så att de kan lösa en uppgift och ge ett svar, istället för att stötta dem så att de kan utveckla förståelse och kunna gå vidare till nästa nivå.

Att ett barn klarar av att lösa en uppgift med laborativt eller konkret material innebär inte per automatik att barnet kan lösa en liknande uppgift med det abstrakta, matematiska språket,

menar även Ljungblad (2012). Arbete med laborativt eller konkret material kan utföras mekaniskt, utan förståelse för vad man egentligen gör och varför. Det är en utmaning att ta steget från det konkreta arbetet till att förstå att det även representerar något abstrakt. Därför är det viktigt att reflektera kring hur vi kan stötta barn i att ta steget mellan det konkreta och det abstrakta, så att det kan förankras i barnets tankar. Moyer (2002) menar att risken finns att material inte används på ett meningsfullt sätt om man använder laborativt material för att ha ”rolig matte”. Det kan även ge eleverna uppfattningen att utforskande med representationer inte har något med ”vanlig” matematik att göra. Det är en utmaning att använda laborativt material på ett effektivt sätt, vilket kräver att matematiska kopplingar måste ges till materialet och att elevernas egna inre representationer av en idé måste kopplas ihop med de yttre representationerna/materialet.

Med hjälp av stöttande material, exempelvis miniräknare, bilder, laborativt material och mer samtalstid med läraren, kan många elever som tycker att matematik är svårt, arbeta med samma läromedel som resten av klassen, istället för med läromedel för yngre årskurser. Detta innebär att olika elever arbetar på olika sätt och på olika svårighetsnivåer, med samma läromedel (Ljungblad, 2012).

5.2 Läroboken

Läroboken har en betydelsefull och komplex roll inom matematikundervisningen, både i Sverige och internationellt sett. Den är ett viktigt redskap som bevarar och sprider kunskap, bidrar till likvärdighet och kan ses som en garanti för att eleverna får nödvändiga baskunskaper och övning inför nästa nivå (Johansson, 2006). Dessutom kan läroboken och övriga delar av ett läromedel stötta och underlätta lärarens arbete, exempelvis som stöd vid lektionsplanering och genom att erbjuda uppgifter att arbeta med, samt kan vara stöttande för eleverna genom att ge struktur i matematikinläringen (Johansson, 2009).

Ett par anledningar till lärobokens stora inflytande i Sverige kan vara att vi har en målstyrd läroplan med fokus på resultat samt att elevgrupperna är heterogena och behov finns av att individualisera (Johansson, 2011). Många läromedel ger stöd åt lärarna i detta genom att erbjuda uppgifter på olika nivåer, eller genom att erbjuda kompletterande material. Uppgifter i läroboken ordnas vanligtvis utifrån en ökande svårighetsgrad. Antingen graderas uppgifterna i en serie av uppgifter som blir allt svårare eller som parallella spår anpassade efter olika nivåer. Det kan även finnas en gemensam plattform att starta med, för att sedan ett ”spår” ska väljas, exempelvis efter en diagnos. Detta bygger på synen att man lär sig bäst genom att få gå framåt i väldefinierade och små steg. Ett argument för att använda nivåindelade läromedel är att elever har olika behov och förutsättningar. Man kan hävda att vissa elever har större behov av mer utmanande uppgifter på en ”högre” nivå och att andra elever har större behov av att få fokusera på kontexten eller uppgifter som är mer ”rakt på” (Johansson, 2011). En nackdel med olika spår kan vara att en elev lätt fastnar på en nivå och sällan får möjlighet att försöka lösa uppgifter på en högre nivå. Det kan även göra det svårare för läraren att ge instruktioner och ha genomgångar i helklass, som känns meningsfulla för alla. Hastighetsindividualisering innebär att eleverna arbetar i boken i sin egen takt. Detta kan även ses som en dold nivågruppering. En nackdel kan vara att vissa elever inte hinner komma fram till en del moment eller missar viktigt innehåll (Johansson, 2011).

Spiralprincipen (*Spiral Curriculum*) är en strategi som kan användas i undervisning och enligt vilken läromedel kan vara upplagda. Begreppet beskrevs år 1960 av den amerikanske psykologen Jerome Bruner (1915–2016) och handlar om hur ämnen och undervisningsområden

organiseras (Harden & Stamper, 1999). Detta koncept innebär att man återkommer till samma ämne/område vid flera tillfällen, med ökande svårighetsgrad och i små, genomtänkta steg. På så sätt sker lärandet i en uppåtgående spiral. Nytt lärande relateras till lärande i tidigare faser i spiralen eftersom det är nödvändigt att bygga på det man redan lärt sig för att lära sig något nytt.

Även i ett internationellt perspektiv har läroboken stor betydelse inom ämnet matematik. Enligt en metaanalys av tidigare läromedelsforskning, som har genomförts av Fan, Zhu och Miao (2013) kan syftet med att använda en lärobok exempelvis vara att läroboken ger struktur kring undervisning, samt att den är en brygga mellan verkligheten i klassrummet och den övergripande läroplanen. I denna analys hänvisar man även till Fan och Kaeley (2000) som i sin studie kom fram till att lärare som använde olika sorters läromedel visade upp olika undervisningsstrategier, påverkade av deras pedagogiska budskap. Man funderade även över om en överensstämmelse mellan undervisningen och en läroboks upplägg beror på att lärare följer läroboken eller om det beror på att lärare väljer läromedel som passar in på den undervisningsstil som de föredrar.

Läroboken påverkar undervisningen på flera sätt; vilka sorters uppgifter eleverna arbetar med, vilka exempel läraren presenterar på tavlan, vilka matematiska begrepp som introduceras och på vilket sätt de introduceras (Johansson, 2006). Samtidigt påverkar lärarens kunskaper, färdigheter och övertygelser hur materialet uppfattas, tolkas och används (Brown, 2009). Lärare interagerar med läromedel på flera olika sätt. Först väljs materialet ut av läraren. Även om valet av själva läromedlet många gånger görs av någon annan, så gör läraren dagliga val av vilka delar av materialet som ska användas och på vilket sätt. Sedan tolkas materialet, både vid planering och undervisning. Hur läraren uppfattar och förstår olika funktioner i materialet bestäms både av designens kvalitet, den egna kompetensen samt kontexten. Nästa steg är att sammanjämka sina uppfattningar av de tilltänkta målen med sina egna mål och förmågor, samt med miljöns begränsningar. Därefter görs anpassningar utifrån elevernas styrkor, svagheter, intressen och erfarenheter. Slutligen avviker man ofta från den tilltänkta planen genom att göra egna tillägg, modifiera befintliga strukturer och utelämna delar som inte intresserar läraren eller ligger utanför hens, eller elevernas, förmågor. Vart och ett av dessa steg – val, tolkning, sammanjämkning, anpassning samt modifikation – påverkar relationen mellan läraren och läromedlet, och i slutänden undervisningen (Brown, 2009).

Valet av läromedel i matematik beror på flera faktorer och görs mer eller mindre medvetet (Johansson, 2011). Detta val påverkas av lärarens handlingsutrymme och förmågan att analysera läromedlen utifrån olika perspektiv. Läromedel kan analyseras utifrån exempelvis layout, extramaterial, medföljande digitala verktyg, anpassning till en aktuell elevgrupp, vilka arbetsformer och uppgifter som presenteras och hur/när innehållet läggs fram. En lärobok i matematik speglar en syn på lärande, dvs en föreställning om vad det innebär att lära sig (Johansson, 2006). Utformningen av läroböcker påverkas även av författarens uppfattningar om ämnet. Matematik kan betraktas som formell kunskap bestående av begrepp, regler och strukturer, vilka ska förmedlas till eleverna. Motsatt perspektiv är att se matematik som en aktivitet som eleverna ska engageras i, för att upptäcka, generalisera, klassificera och ordna (Johansson, 2011).

Studier har visat på stora skillnader mellan läroböcker i olika läroboksserier men framför allt mellan olika länder, exempelvis vad gäller presentation av matematiskt innehåll och problemlösning (Fan m.fl., 2013). Skillnaderna kan kopplas till olika pedagogiska sammanhang och traditioner, eftersom en lärobok är ett resultat av sin kulturella och sociala bakgrund. Varia-

tionen är stor mellan olika läromedel i olika länder när det gäller hur stor del som läggs på till exempel förklaringar av lösningsförfaranden, uppgifter att lösa samt illustrationer (Fan m.fl., 2013).

Lärrarhandledningar kan vara resurser för läraren på olika sätt, beroende på utformningen och på hur läraren väljer att tolka och använda dem. En lärrarhandledning kan "tala *med* läraren" och kommunicera de grundläggande idéerna, vilket innebär att läraren blir ledd och "coachad" samt erbjuden en källa att ta idéer och aktiviteter från. En annan lärrarhandledning kan "tala *genom* läraren" och fokuserar på mer precisa handlingar och ord, och på så sätt implementerar läraren de förutbestämda lektionerna (Koljonen, 2014). Den senare lärrarhandledningen ses som utbildande/utvecklande för läraren eftersom den ger direkt stöd vid nya pedagogiska tankar och strategier samt låter läraren reflektera kring och prova nya frågor, begrepp och sätt att instruera och undervisa (Van Steenbrugge & Ryve, 2018).

5.3 Undervisningskulturer

I olika tider och i olika länder har skilda undervisningskulturer vuxit fram. En stark tradition att bedriva undervisning i matematik på är att läraren introducerar ett nytt innehåll genom att presentera ett "problem" och därefter visar hur man gör för att lösa denna uppgift (Holgersson & Wästerlid, 2018). Sedan får eleverna enskilt träna på att lösa liknande problem. Detta undervisningssätt innebär att läraren förmedlar matematiken till eleverna, vilka tar emot det som läraren förmedlar. Eleverna inbjuds inte i någon större utsträckning till att aktivt fundera över uppgiften eller till att försöka utveckla ett sätt att lösa den på. En fördel med arbetssättet kan vara att det är läraren, som på ett "korrekt" sätt, introducerar och undervisar kring de abstrakta matematiska begreppen och sambanden, vilket fungerar för många elever. Den elev som inte förstår problemet eller sättet att lösa det, kan dock ha svårt att komma vidare, vilket kan påverka självkänslan negativt (Holgersson & Wästerlid, 2018).

I början av 1990-talet fick en variant av konstruktivismen genomslag i svenska lärarutbildningar och läroplaner, enligt Ryve m.fl. (2016). Konstruktivismen förklaras som "en teori om inläring, där man fastställer att all inläring består i att den som lär sig något konstruerar denna kunskap själv, vilket i någon mening naturligtvis alltid är sant" (s.23). Dock menar Ryve m.fl. (2016) att den tolkning som gjordes var att "ingen kan lära ut något", vilket innebär att lärarens undervisande roll tonades ner, för att istället bli mer stödjande och handledande. Ansvar för kunskapsutvecklingen lades i större utsträckning på den enskilde eleven. Möjligtvis har detta bidragit till att ensamräkningen har tagit stort utrymme i svenska matematikklassrum de senaste decennierna, vilket leder till att eleverna ges få möjligheter att få utveckla sitt matematiska tänkande. Enskild räkning i en lärobok innebär till stor del inövande av procedurer som hjälper eleverna att lösa enklare standarduppgifter.

I den svenska grundskolan består matematikundervisningen till stor del av eget arbete. En mindre del av lektionstiden ägnas åt helklassundervisning och grupparbete. Håkansson och Sundberg (2012) menar att situationen i Norge är liknande, och orsakerna till utvecklingen där tycks vara de stora krav som ställs på lärare och elever i grupparbeten, vilka kan leda till svårkontrollerade processer i klassrummet, samt en stor skillnad i elevernas förförståelse som kan innebära att det är lättare för läraren att ge individuella uppgifter.

Undervisningssituationer på olika skolor kan se väldigt olika ut och förutsättningen för att arbeta med olika undervisningsansatser varierar. Bentley och Bentley (2016) skiljer på tre huvudsakliga ansatser: *helklassundervisning*, *smågruppsundervisning* och *handledad undervis-*

ning. Inom helklassundervisningen förekommer olika varianter av ansatser, som exempelvis främjar individualisering på olika sätt. *Hastighetsindividualisering* är det vanligaste i stora klasser i Sverige, och innebär att eleverna arbetar i egen takt, löser olika antal uppgifter under lektionen och hinner olika långt i boken. *Fördjupningsindividualisering* betyder att uppgifterna anpassas efter elevernas förutsättningar. Utifrån resultaten i TIMMS 2007 har den *reaktiva* handledda undervisningen fått mest kritik, enligt Bentley och Bentley (2016). Den innebär att eleverna endast arbetar självständigt med läromedlet och lärarens roll är att finnas tillgänglig för att svara på frågor. De ansatser i vilka lärarna följer upp elevernas förståelse på ett aktivt sätt är de mest framgångsrika. Elevernas inläring bör innehålla både korrekta procedurer och korrekt förståelse, och för detta krävs kvalificerad uppföljning.

I Japan utvecklades under 1970-talet ett alternativt sätt till matematikundervisning. Användandet av *öppna uppgifter* låg i fokus (Holgersson & Wästerlid, 2018). Detta innebar ”problem” där flera olika korrekta lösningar och metoder kunde finnas. Dessa formulerades i en konkret och vardaglig kontext. Tanken var att eleverna skulle stimuleras till att exempelvis se mönster, diskutera likheter, skillnader, begränsningar och fördelar, vilket skulle utveckla tänkandet. Traditionen med öppna uppgifter har sedan spridit sig till exempelvis Australien men även till viss del till Sverige. En viktig fördel med öppna uppgifter är att det kan leda till att det fokus på *rätt* och *fel* som traditionellt sett finns i klassrummen, minskar. Detta kan vara till stor fördel för svagpresterande elever eftersom det kan innebära att eleverna kan fokusera på att lösa problemen på ett mycket mer avslappnat sätt (Holgersson & Wästerlid, 2018).

I de ostasiatiska länderna betraktas misstag som något som ingår i en pågående inlärningsprocess. Att en elev har gjort ett misstag uppfattas som att eleven kämpar med förståelsen av något nytt (Bentley & Bentley, 2011). Den asiatiska kulturen ser inte elever som svaga räknare utan snarast som att ingen lärare ännu lärt eleven räkna (Ljungblad, 2016). Undervisningen i de ostasiatiska länderna koncentreras ofta kring ett ”rikt problem” som är nytt för eleverna. Problemet introduceras för eleverna på ett väl utprovat sätt, för att leda vidare till ett planerat scenario med lösningar och diskussioner. Eleverna arbetar individuellt en kort stund under uppsikt av läraren och sedan återgår man till lärarledd undervisning. Olika elevlösningar presenteras på tavlan och man inleder med den minst matematiskt utvecklade lösningen för att alla ska ha möjlighet att förstå, för att sedan visa mer avancerade lösningar. De olika lösningarna diskuteras och nya begrepp introduceras. Undervisningen fokuserar på konceptuell förståelse och eleverna tränas i att använda matematisk kunskap i olika kontexter samt tillämpa dem i nya obekanta sammanhang. Lektionerna genomförs ofta på förmiddagen och lärarna träffas senare för att diskutera förbättringar; för att utveckla undervisningen och som en fortlöpande fortbildning. Läroböckerna är skrivna tillsammans av erfarna lärare och forskare, istället för som i exempelvis Sverige; ofta endast av erfarna lärare (Bentley & Bentley, 2011).

I en jämförande studie mellan matematikundervisningen i Kina och USA hittades signifikanta skillnader (Ma, 1999). Studien visade bland annat att kinesiska lärare började sitt yrkesliv med en bättre förståelse av elementär matematik än de amerikanska, samt att skillnaderna höll i sig. De kinesiska lärarnas förståelse av matematiken de undervisade kring och den viktiga förståelsen av hur denna kan presenteras för eleverna fortsatte att utvecklas under åren. I studien fick lärarna lösa ett antal matematiska uppgifter samt ge förslag på hur de skulle kunna läggas fram i undervisningen för att kännas meningsfulla för eleverna. Många av de amerikanska lärarna hade stora svårigheter med detta och fokuserade oftare på procedurell kunskap. De kinesiska lärarna löste uppgifterna genom att använda en mängd olika metoder och menade även att det var viktigt att eleverna fick möjlighet att göra samma sak: lösa problem med

hjälp av olika metoder samt att utvärdera effektiviteten hos olika metoder. De visade en betydligt större konceptuell kunskap. Detta utvecklades alltså vidare under de kinesiska lärarnas hela yrkesliv, och de lyfte betydelsen av kollegialt lärande samt att man lär sig genom att noga studera läromedel. I Kina anses läroböcker inte bara vara till för eleverna, utan även för att lärarna ska utveckla sin matematiska kunskap kring det som de ska undervisa om, enligt Ma (1999). Lärarna studerar läromedlen noggrant, både enskilt och i grupp, och diskuterar innehåll och uppgifter. En skillnad i förutsättningar för de amerikanska och de kinesiska lärarna var att de amerikanska hade mer undervisningstid och många andra uppgifter att utföra under sin lektionsfria tid, medan de kinesiska hade mer tid till att förbereda och utvärdera sina lektioner, ofta tillsammans med kollegor. Trots att undervisningen i Kina kan se ut att vara mycket "traditionell": med eleverna sittande i rader, vända mot läraren som leder lektionen, och med läromedel som en viktig del, förekommer det i många klassrum undervisning som utvecklar en god konceptuell förståelse parallellt med den procedurella, med delaktighet hos eleverna vad gäller den egna inlärningsprocessen.

Ma (1999) menar således att även lärarnas kunskap inom den matematik som de undervisar i behöver förbättras, för att kunna förbättra elevers utbildning i matematik. Kvaliteten på lärarnas ämneskunskaper, men även didaktiska kunskap, påverkar direkt elevernas inläring. Detta innebär att det behövs ett undervisningssammanhang, i vilket det finns möjlighet för lärare att utveckla sin kunskap om skolmatematik samtidigt som de arbetar, för att förbättra matematikundervisningen.

Under de senaste decennierna har stora förändringar skett inom Singapores utbildningssystem och inom matematikundervisningen (Kaur, 2014; Kent, 2017). Sedan ett antal år tillbaka ligger Singapore i topp när det gäller mätningar som exempelvis PISA och TIMSS. Efter att landet grundades på 1960-talet insåg man att Singapores nästintill enda tillgång var befolkningen, och valde att satsa på utbildningen i landet eftersom man såg det som vägen mot utveckling och ekonomisk framgång. Skolor byggdes, läroplaner skrevs och utvärderades med ett antal års mellanrum, andra länders utbildningssystem samt forskning studerades, lärare utbildades och anställdes, och man satsade mycket på att skapa en attityd i samhället där utbildning ses som viktigt, både för den enskilde eleven men även som enande för nationen och som en bro mellan kulturer. Efter att ha haft olika skolsystem med olika språk, skapades ett gemensamt skolsystem med engelska som undervisningsspråk, för att öka likvärdigheten. Under de första åren i skolan får eleverna undervisning i engelska, modersmål och matematik, vilket senare byggs på med fler ämnen. För att ge alla barn möjlighet att utbilda sig finns olika varianter av ekonomiskt stöd och bidrag till exempelvis skolavgifter, läromedel och måltider.

För att ge alla barn möjlighet att utvecklas och utmanas i sin egen takt och utifrån sin egen förmåga, har olika "kurser" skapats där matematik undervisas på olika nivåer. Singapores läroplan i matematik grundar sig i ett ramverk som har problemlösning i fokus, omgivet av andra byggstenar: metakognition, processer (exempelvis resonemang, kommunikation och mönster), begrepp (te x numeriska och algebraiska), förmågor (numeriskt räknande, användandet av matematiska redskap med mera) samt inställning till ämnet och sitt eget lärande. Läroplanen är uppbyggd enligt spiralprincipen (*Spiral Curriculum*), och läromedel, som kvalitetsgranskas och godkänns av utbildningsdepartementet innan de får användas i landets skolor, är en viktig del i undervisningen. Läraren ses som en mycket betydelsefull del i Singapores skolsystem och utbildning av lärare prioriteras. För att en hög standard inom utbildningssystemet ska kunna bibehållas har lärare i Singapore rätt till 100 timmars utbildning och utvecklingstid varje år, så att läraren kan hålla sig uppdaterad kring ny forskning och uppgradera sin kunskap (Kaur, 2014).

Ibland förekommer kritik mot utbildningssystemet i Singapore med motiveringen att stor vikt läggs på utantillärande och vid större, avgörande examinationer. Andra menar att skolkulturen skapar stor emotionell och mental stress för eleverna. Ytterligare kritik är att ett utbildningssystem, där en uppdelning av olika talanger och förmågor görs, kan förstärka de sociala strukturerna och ge segregerande effekter istället för att minska detta och öka likvärdigheten. Trots dessa utmaningar är det tydligt att Singapore har gått från att vara ett utvecklingsland till att bli ett av de starkaste länderna inom utbildning (Kent, 2017).

5.4 Sammanfattning av litteraturgenomgång

Svenska elevers förståelse av begrepp och hur kunskap kan överföras mellan olika kontexter är något som behöver utvecklas, visar analysen av TIMMS 2007 (Bentley, 2008). Den *procedurrella/instrumentella* kunskapen (att kunna regler och procedurer) måste kompletteras med ökad *konceptuell/relationell* kunskap/förståelse (att förstå hur begrepp och generella principer kan överföras mellan olika situationer) (Skemp, 1976; Bentley & Bentley, 2011). Konceptuellt inriktad matematikundervisning är vanligt i länder i Ostasien, där undervisningen ofta fokuserar på gemensamt arbete kring utprovade uppgifter (Bentley & Bentley, 2011).

I den svenska skolan består matematikundervisningen till relativt stor del av tyst räkning och till mindre del av helklassundervisning och grupparbete (Håkansson & Sundberg, 2012; Skolverket, 2020). Dock är kommunikation och samtal av stor betydelse i matematikundervisningen (Knutsson, 2019). Framför allt är kommunikationens didaktiska kvalitet avgörande för en framgångsrik inläring (Löwing, 2006).

Barnets grund till matematisk medvetenhet måste utformas i lek och utforskande (Ljungblad, 2012) och tidiga insatser är viktiga när bristande kunskaper/förståelse upptäcks (Neuman, 1989). Medveten träning och stöttning av olika verktyg behövs för att hjälpa elever i matematiksvårigheter att automatisera inre bilder och modeller, vilka stödjer tänkandet (Ljungblad, 2012). Tillgång till olika representationsformer för samma begrepp, och förmågan att växla mellan dessa, ger en djupare förståelse och bidrar till en förbättrad problemlösningsförmåga (Karlsson & Kilborn, 2015). En modell för uppdelning i olika representationsformer är *CRA*. *Concrete* innebär arbete med laborativt material och *representative* innebär visuella representationer. *Abstract* innebär användandet av siffror och andra matematiska symboler (Lundberg & Sterner, 2006). *Representative* kan även benämnas *pictorial* och förkortningen blir då *CPA* (Agardh & Rejler, 2019).

Läroboken/läromedlet har en betydelsefull och komplex roll i undervisningen. Den kan ge stöd till både läraren och eleverna (Johansson, 2006; Johansson, 2009). Valet av läromedel påverkar undervisningen, samtidigt som läraren påverkar hur läromedlet tolkas och används (Brown, 2009; Johansson, 2006). Lärarhandledningar kan vara resurser för lärare på olika sätt. En lärarhandledning kan ”tala med läraren” genom att erbjuda idéer och aktiviteter. En annan lärarhandledning kan ”tala genom läraren” för att de förutbestämda lektionerna ska implementeras av läraren (Koljonen, 2014). Den senare ger ett ökat stöd vid exempelvis nya pedagogiska tankar och strategier, vilket innebär en större möjlighet till lärande och utveckling även för läraren (Van Steenbrugge & Ryve, 2018). Studier har visat på stora skillnader mellan läroböcker i olika länder, enligt Fan m.fl. (2013).

Utifrån detta avser denna uppsats att undersöka hur två matematikläromedel med rötter i olika undervisningskulturer kan vara resurser för lärare under planering och genomförande av

undervisningen, vilka centrala idéer som uttalas och kan ses, hur olika representationsformer används samt hur elevernas lärande stöts och underlättas.

6 Metod

I detta avsnitt redogörs för de metodval som har gjorts i studien. Urval och genomförande kommer att beskrivas, samt hur bearbetning och analys har gått till. Etiska forskningsaspekter samt studiens tillförlitlighet och pålitlighet kommer att tas upp. Syftet med denna uppsats är att utforska två matematikläromedel för årskurs 4. Detta görs med hjälp av en textanalys med inriktningen innehållsanalys, vilken kompletteras av semistrukturerade intervjuer. Tolkningsen sker utifrån ett hermeneutiskt förhållningssätt och undersökningen har en kvalitativ ansats.

6.1 Hermeneutik

Hermeneutik handlar om hur vardaglig förståelse av verkligheten kan uppstå när en ny text förstås, blir tillgänglig och meningsfull. Detta sker i en tolkningsprocess där den tolkandes *förförståelse* är av stor betydelse. Texten i en lärobok kan därmed ge mening när den kan orientera läsaren i tillvaron samt göra denna hanterbar och begriplig i relation till personens egna kunskaper och erfarenheter. En central idé inom hermeneutiken är att verkligheten alltid är förmedlad, vilket innebär att den är kopplad till överföring av föreställningar. Mening och förståelse är alltid avhängiga språkliga, historiska och kulturella sammanhang (Karlsson, 2011). Vi förstår alltid något mot bakgrund av vissa förutsättningar; dessa bestämmer vad vi förstår och hur vi förstår det. I försöken att tolka ett fenomen tar tolkaren med sig sin förförståelse, vilken påverkas av exempelvis personliga erfarenheter samt tillgång till språk och begrepp (Gilje & Grimen, 2007). Eftersom vi inte kan frigöra oss från det som vi bär med oss i "ryggsäcken" så är det viktigt att vi arbetar *med* det istället för *mot* det, genom att försöka vara medvetna om vad vi bär med oss och om hur det kan påverka det vi tolkar. Hermeneutiken innebär ett öppet och förutsättningslöst, men ändå medvetet, förhållningssätt, enligt Lundin (2008).

Hermeneutiken vill utforska sociala fenomen för att skapa en fördjupad och förnyad förståelse kring dem. Nya tolkningar frambringas genom att de grundar sig på de tidigare. Upplevelser kan fångas och tolkas med hjälp av intervjuer, observationer och texter. *Den hermeneutiska spiralen* är ett begrepp som används för att beskriva tolkningsprocessen. Forskaren inleder med en del och sätter den i relation till helheten, vilken då kan ses på ett nytt sätt. Sedan återkommer forskaren till delen för att tolka den vidare och växlar på så sätt i en spiralförmad rörelse mellan del och helhet, vilket gör att forskaren kommer allt djupare in i fenomenet och förståelsen ökar (Lundin, 2008). Gilje och Grimen (2007) beskriver hur forskning består av rörelser mellan det som ska tolkas, vår förförståelse och sammanhanget som det ska tolkas i. Inom hermeneutiken ses inte förståelsen som något färdigt och helt uppnått, då den ständigt omtolkas och förstås ur nya förhållanden (Bergström & Boréus, 2018).

Ambitionen med studien har varit att försöka tolka och förstå två läromedel i matematik, utifrån vissa kriterier, samt hur de kan tolkas och förstås av tänkta mottagare, det vill säga undervisande lärare i första hand, men till viss del även elever. I detta arbete har en medvetenhet kring den egna förförståelsens betydelse hela tiden funnits med.

6.2 Urval

I studien har jag valt att granska två svenska matematikläromedel för årskurs 4, samt som komplement till detta intervjuar fyra lärare som arbetar med läromedlen. Anledningen till valet av årskurs är att textmängderna ofta ökar och arbetet med olika representationsformer ofta minskar när eleverna börjar i årskurs 4 (Berggren & Lindroth, 2011; Lunde, 2011) vilket kan innebära att fler elever upplever matematik som svårt.

I olika sammanhang har jag träffat på dessa läromedel och min nyfikenhet väcktes kring de skillnader som de vid första anblicken visade. ”Mattespanarna” är ett mer traditionellt svenskt läromedel som utgavs efter införandet av den nya läroplanen Lgr11. ”Singma matematik” bygger på ett läromedel från Singapore och under hösten 2019 kom materialet för årskurs 4 ut i Sverige. De två läromedlen uppvisar vid en första anblick skillnader vad gäller illustrationer, format och lektionsupplägg. Dessa skillnader var avgörande för urvalet av läromedel i denna studie. På så sätt var urvalet målstyrt samtidigt som det till viss del innebar ett bekvämlighetsurval.

Urval kan göras på olika sätt, exempelvis *målstyrt*, *randomiserat* eller som *bekvämlighetsurval* (Bryman, 2018). Målstyrt urval innebär att texterna eller intervjudeltagarna är utvalda för att de är relevanta för studiens forskningsfrågor, vilket betyder att de inte är slumpmässigt utvalda. Randomiserat urval är däremot ett urval slumpmässigt uttaget ur en större grupp. Bekvämlighetsurval beskrivs av Bryman (2018) som ett urval bland personer eller texter vilka råkar finnas tillgängliga. De kan finnas i den geografiska närheten av forskaren, men även vara tillgängliga på annat vis.

I undersökningen har även ett målstyrt bekvämlighetsurval av informanterna använts. Urvalskriterierna för att hitta lämpliga lärare att intervjuar var att de arbetade med något av läromedlen som ansvariga ämneslärare, och hade gjort detta under en period. Jag önskade även lärare som arbetat som matematiklärare under flertalet år och därmed hade relativt stor erfarenhet av matematikundervisning och av olika läromedel. I första hand letades informanter i närområdet för att möjlighet skulle finnas till att intervjun skulle kunna ske vid ett personligt möte. För att hitta lämpliga informanter behövde dock området utökas vilket ledde till att tre lärare intervjuades via telefon. Två av lärarna arbetade med ”Mattespanarna” och två av lärarna hade ”Singma matematik” som läromedel. De fyra lärarna arbetade på fyra olika skolor, i olika kommuner.

6.3 Textanalys

Olika sorters texter är viktiga analysföremål eftersom de har och har haft inflytande på samhället och på människors liv vid olika tider och i olika delar av världen (Bergström & Boréus, 2018). På varierande sätt relaterar texter till enskilda människor och till grupper av människor. Texterna har skapats av människor, deras adressater är människor och de speglar både medvetna och omedvetna idéer. De är resultat av kommunikation mellan grupper och individer, och är viktiga för hur vi förstår och agerar i samhället.

Inom textanalys finns olika inriktningar och i denna uppsats har jag valt att göra en *innehållsanalys* av två matematikläromedel i årskurs fyra. En innehållsanalys kan användas för att systematiskt kategorisera, räkna eller mäta inslag i ett större textmaterial; för att exempelvis finna mönster, studera omfattningen av något eller för att jämföra (Boréus & Kohl, 2018). Analysen görs för att ge en bredare förståelse av textinnehållet. Den *kvalitativa* innehållsanalysen kan beskrivas som en metod som planmässigt och systematiskt skildrar innebörden av kvalitativa

data genom att efter hand kategorisera delar av material med stöd av analysverktyget, som skapats inledningsvis, anpassat till studiens inriktning. Forskaren kan prova sig fram genom att använda analysverktyget på en mindre del av materialet för att ha möjlighet att förbättra det, exempelvis genom att snäva in eller bredda i sorteringskategorierna, skapa nya teman eller kombinera med andra tekniker eller metoder. Metoden är delvis induktiv, vilket innebär att forskaren låter kategorier växa fram ur arbetet med kodningen, trots att forskningen inledningsvis haft breda och förutbestämda teman/forskningsfrågor (Schreier, 2014). Studier av texters innebördsaspekt är vanliga, i vilka man försöker svara på frågan "Vad säger texten?" En kvalitativ analys kan innehålla enkel räkning/mätning, medan tolkningarna är mer komplexa och endast kan göras av människor (Boréus & Kohl, 2018).

Att texten tolkas innebär att den måste förstås och innebörden måste tas fram. Tolkningen kan vara mer eller mindre komplex, beroende på den analytiska ansatsen, textens karaktär och det forskningsproblem man arbetar med. Bergström och Boréus (2018) beskriver olika tolkningsstrategier, exempelvis att tolkningen relateras i första hand till uttolkaren (det som läsaren tolkar in i den utifrån sin förförståelse), till textens avsändare (vad producenten av texten avsåg) eller till huvudadressaterna/mottagarna (betydelsen en text kan ha för sin tilltänkta publik). Författarna kopplar dessa till *hermeneutiken*, vilken beskrivs som "konsten och teorin om att läsa och tolka" (s.31).

Oftast används flera av dessa strategier samtidigt, fast med olika tonvikt, enligt Bergström och Boréus (2018). Även i denna uppsats ingår delar av de tre strategierna, även om störst vikt har lagts på den mottagarorienterade strategin.

6.3.1 Genomförande av textanalys

Som stöd vid analysen av de två läromedlen/lärohandledningarna har ett analysredskap med fyra kategorier använts. Detta har inspirerats av ett analyschema med fem kategorier av Koljonen (2014), vilket utprovades i en studie av svenska och finska matematikläromedel och användes vidare för att analysera innehåll och form hos framför allt finska läromedel. Koljonen (2014) inspirerades i sin tur av Davis och Krajcik (2005) och baserade analyschemat på de kategorier som dessa menade karaktäriserar läromedel som är designade för att utveckla lärarnas matematiska och didaktiska kunskaper. Davis och Krajcik (2005) lyfte att läromedel bör innehålla både motiveringar kring aktiviteter samt kunskap för lärare, för att vara utvecklande både för lärare och elever.

Mitt val att utgå från analyschemat (Koljonen, 2014) baserades på att detta verktyg har en forskningsbaserad grund och är utprovat på nordiska läromedel. Dock valde jag att göra mindre ändringar i formuleringar av kategorierna och deras innehåll. Kategorin *Progression and connections* (om matematisk progression genom skolåren och kopplingar mellan matematiska teman) togs bort eftersom innehållet i den inte passar ihop med syftet i denna studie. Den sista kategorin *Activities or tasks for teaching* ändrades för att tydligare få med ett fokus på olika representationsformer och fick istället rubriken *Erbjuder förslag till utformning och genomförande av undervisningen med stöd av olika representationsformer*. På så sätt justerades analysverktyget för att vara bättre anpassat till studien och bestod slutligen av fyra kategorier. Detta gjordes parallellt med att jag började studera läromedlen. Genom att börja reflektera över lärohandledningarnas innehåll styrktes jag i beslutet att använda detta analysverktyg och kunde se på innehållet i texterna med delvis andra ögon, samtidigt som jag såg att verktyget behövde justeras för att hjälpa mig att se det jag ville få fram.

	Mattespanarna	Singma matematik
1. centrala idéer		
2. begrepp, fakta, strategier		
3. möta och stötta lärandet		
4. representationsformer		

Analysens schemats fyra kategorier finns utförligare beskrivna i bilaga 1.

I de båda lärarhandledningarna valde jag att läsa inledningarna och de mer allmänna delarna i början samt kapitel 1 och 2 i vardera boken, eftersom dessa är mest relevanta för studiens inriktning. I ”Mattespanarna” heter kapitlen *Om tal* samt *Addition och subtraktion*. I ”Singma” heter de *Talen till 10 000* samt *Addition och subtraktion*. Efter att mer övergripande ha tittat igenom dessa delar, valde jag fyra färger som fick representera de fyra kategorierna i analysens schemat. Materialet lästes igenom och det som hade koppling till kategori 1 markerades med en färg. Sedan upprepades läsningen och färgmarkeringar gjordes, för en kategori och med en färg i taget. Vissa delar av texterna passade ihop med fler än en färg, vilket inte var oväntat eftersom kategorierna ofta kan tangera varandra och har kopplingar. Nästa steg i analysarbetet var att samla ihop det färgmarkerade under respektive rubrik/färg för att få en bättre överblick. Sedan studerades materialet återigen för att tolkas; hitta kopplingar, likheter och skillnader, samt för att kunna stryka vissa delar. Färger användes igen för att göra detta tydligare. I detta material valde jag ut vissa delar att fokusera på och började nästa del av processen, vilken bestod av att börja formulera och skriva ner det jag hittat. Även i denna del ingick naturligtvis en analys och tolkning av materialet. I flera omgångar har därefter texten omvärderats och reviderats. I ett senare skede, när det var dags att analysera resultatet i sin helhet, användes återigen färger för att hitta mönster och kopplingar i textanalysen och intervjuerna.

6.4 Intervjuer

För att samla in ytterligare empiri till studien och komplettera det jag själv som forskare kunde tolka och förstå ur textmaterialet, valde jag att även genomföra intervjuer med fyra lärare. Genom att lyssna till deras erfarenheter av att arbeta med och deras tankar kring de två läromedlen, kunde undersökningens kvalitet ytterligare stärkas. Intervjuerna gjordes för att få mer information och för att ha möjlighet att se om det fanns fenomen, vilka uttolkades vid textanalysen, som kunde bekräftas eller motsägas av intervjuerna.

För studien har en *kvalitativ* metod med *semistrukturerade intervjuer* valts. Målet med en kvalitativ intervju är att få fram de intervjuades variationer av uppfattningar och perspektiv (Kvale & Brinkmann, 2014), vilket passar in på denna studie, till skillnad från den kvantitativa analysen som är en metod för att räkna eller mäta något uttalat i texter (Boréus & Kohl, 2018). En semistrukturerad intervju innebär att en intervjuguide finns, med förslag till ett antal vägledande frågor/teman. Utifrån de svar som ges och den riktning som samtalet tar ställs följdfrågor. Detta ställer krav på att man som intervjuare är flexibel samt är en aktiv lyssnare. Det krävs omfattande träning för att kunna bli en kvalificerad intervjuare (Kvale & Brinkmann, 2014). Fördelen med metoden är att den är anpassningsbar och följsam, enligt Stukát (2011). Samtidigt kan den vara tidskrävande, vilket innebär att den passar bäst när antalet informanter inte är alltför stort och materialet då blir mer hanterbart att analysera. En semistrukturerad intervju bör spelas in för att sedan transkriberas och tolkas om till text, för att därefter vidare kunna analyseras. Vår förförståelse i ämnet samt våra tidigare erfarenheter påverkar den tolkning som sker men enligt det hermeneutiska förhållningssättet bör en medvetenhet kring detta finnas och reflektion bör fortlöpande ske för att studiens tillförlitlighet

ska öka. En intervju bör ske i en ostörd och trygg miljö (Stukát, 2011), gärna på den intervjuades hemmaplan. Att intervju via telefon är även ett alternativ som kan väljas.

6.4.1 Genomförande av intervjuer samt etiska aspekter

Kontakt togs med informanterna på olika sätt, exempelvis via personligt samtal där förfrågan om medverkan i studien kunde framföras muntligt och information kring studien kunde ges direkt, eller via kontakter och tips vilket ledde till mejlkontakt med informanten och senare telefonsamtal. I genomförandet av studien har hänsyn tagits till de forskningsetiska aspekterna (Vetenskapsrådet, 2002). Tre av informanterna fick skriftlig information om syftet med studien, vilka villkor som gällde för deltagandet, studiens frivillighet samt möjligheten att avbryta sin medverkan, och samtycke till att delta gavs skriftligt, dock utan en särskild blankett. Dessa informanter fick även informationen muntligt, innan intervjuerna startade. Den fjärde informanten fick informationen muntligt, erbjöds det i skrift och avböjde detta. Samtycket skedde även muntligt för samtliga informanter. Alla informanter samtyckte till att intervjuerna spelades in och informerades om hur inspelningarna skulle komma att hanteras. På så sätt tillgodosågs *informationskravet* samt *samtyckeskravet*.

I ett inledande skede av denna studie gjordes en intervjuguide utifrån studiens tänkta syfte. Denna intervjuguide testades vid en intervju med en lärarkollega för att se hur den kunde fungera samt som ett tillfälle att få träna på att genomföra intervjuer. Utifrån utvärderingen av intervjun samt hur arbetet med studien utvecklade sig, ändrades intervjuguiden för att bättre anpassas för att möta syftet. De fyra informanterna blev erbjudna att få intervjuguiden i förväg, vilket tre av dem tackade ja till.

De fyra intervjuerna tog cirka 40–60 minuter vardera och samtalen spelades in, för att jag som intervjuare skulle få större möjlighet att vara närvarande vid intervjuerna och inte behöva fokusera på att anteckna allt som sades. Detta gjorde även att samtalen kunde flyta på mer och följsamheten kunde öka. På grund av varierande avstånd till informanterna genomfördes tre intervjuer via telefon och en intervju vid ett fysiskt möte. Informanterna fick bestämma tid och annat praktiskt inför samtalen, för att de skulle kunna ske tryggt och ostört. Efter intervjuerna transkriberades intervjuerna i sin helhet. *Konfidentialitetskravet* har tillgodosetts genom att informanterna avidentifierats redan vid transkriberingen och de presenteras här i uppsatsen som lärare A-D. De aktuella skolorna eller kommunerna varken namnges eller beskrivs.

Intervjuerna lästes igenom ett flertal gånger och färger användes för att identifiera delar i materialet med anknytning till olika teman och intressanta kommentarer markerades. På liknande sätt som i textanalysen analyserades materialet och det som var relevant för studien sammanställdes. Under arbetet växte fem rubriker fram: *centrala idéer samt möjlighet som lärarresurs, fördelar med läromedlen, nackdelar med läromedlen, att möta elever och stötta lärandet* samt *representationsformer*. Dessa används vid redovisningen av intervjuerna i resultatkapitlet.

Nyttjandekravet innebär att informationen som är insamlad endast kommer att användas till denna uppsats. Materialet från intervjuerna kommer inte att lämnas vidare eller användas i andra syften och allt insamlat material förvaras på ett säkert sätt så att obehöriga inte kommer åt materialet.

6.5 Etiska överväganden

Validitet, som också kan benämnas *tillförlitlighet* eller *giltighet*, framför allt vid kvalitativa undersökningar, innebär att en studie använder en metod som mäter det som den är avsedd att mäta, i den aktuella studien. Analysen bör ha en lämplig inriktning och göras med ett lämpligt verktyg. Valet av texter, vilka ska analyseras för att besvara forskningsfrågorna, bör vara genomtänkt. De två matematikläromedlen som analyseras i studien valdes ut för att kunna visa på möjligheter hos, samt skillnader och likheter mellan, två matematikläromedel i årskurs 4. Hänsyn behöver även tas till forskaren, som har med sig sin förförståelse. Genom att forskaren ”vidgar förståelsen av sin egen förförståelse” kan validiteten ökas (Bergström & Boréus, 2018, s.40). Detta i kombination med en kritisk syn på de egna tolkningarna bidrar till en minskad påverkan, vilket jag genom hela processen har burit med mig en medvetenhet kring. De kvalitativa metodvalen textanalys med inriktningen innehållsanalys samt semistrukturerade intervjuer svarar väl på syftet att utforska två matematikläromedel för årskurs 4. Med hjälp av *triangulering*; att mer än en metod har använts för att samla in information till undersökningen, har undersökningens tillförlitlighet ökats (Stukát, 2011; Bryman, 2018). I detta fall har både textanalys och kompletterande intervjuer gjorts för att få mer information och för att ha möjlighet att se om det fanns fenomen, vilka uttolkades vid textanalysen, som kunde bekräftas eller motsägas av intervjuerna. Analysverktyget har tagits fram genom en process, där det har utprovats och ändrats, vilket tidigare har beskrivits, för att kunna ge ett lämpligt stöd vid analysen av läromedlen.

Det krävs även *reliabilitet* för att göra en studie trovärdig; det vill säga precision och noggrannhet i mätning och beräkning (Bergström & Boréus, 2018) eller kvaliteten på själva mätverktyget (Stukát, 2011). Begreppet kan också innebära att felkällor elimineras. Den tolkningsstrategi som används måste vara tillräckligt noggrann för syftet. Reliabilitet kan enligt Bryman (2018) jämföras med begreppet *pålitlighet*. För att kunna skapa ett resultat som skulle kunna utföras av en annan forskare måste hela forskningsprocessen redogöras för. Dock är det inte möjligt att vara fullständigt objektiv i kvalitativ forskning eller exakt kopiera det någon annan gjort, eftersom materialet tolkas och analyseras av människor, vilket påverkar reliabiliteten. För att öka reliabiliteten transkriberades intervjuerna i sin helhet för att minska risken för feltolkningar. Intervjuerna förbereddes och genomfördes på ett sådant sätt att informanterna i så stor utsträckning som möjligt skulle kunna känna sig trygga och resultatet därmed bli mer pålitligt. Forskningsprocessen beskrivs i detta kapitel för att läsaren ska kunna bedöma studiens kvalitet, och analysverktyg samt intervjuguide bifogas i slutet av arbetet.

Eftersom intervjuerna i denna studie innefattat fyra personer, vilka valts ut delvis genom bekvämlighetsurval, kan den inte göra anspråk på *generaliserbarhet* gällande lärares uppfattningar och erfarenheter av de aktuella läromedlen. Dock kan det ge en viss inblick i hur läromedlen *kan* uppfattas och hur de *kan* användas av lärare.

6.6 Metoddiskussion

Syftet med denna studie var att utforska två olika matematikläromedel för årskurs 4. Utifrån detta gjordes valet att textanalys i kombination med semistrukturerade intervjuer skulle användas. Ansatsen är kvalitativ och tolkningen har gjorts utifrån ett hermeneutiskt förhållningssätt. På så sätt kunde förståelsen fördjupas vid utforskandet. Genom att genomföra både intervjuer och textanalys ökade studiens validitet, eftersom metoderna kan komplettera varandra och undersökningens kvalitet stärkas. En begränsning med studien är den utgår från ett visst urval av matematikläromedel samt ett begränsat urval av informanter. Båda urvalen har gjorts med en kombination av målstyrt urval och bekvämlighetsurval, vilket påverkades

av studiens tidsramar. Dock har urvalen gjorts med en medvetenhet för att studiens syfte i så stor utsträckning som möjligt ska kunna mötas.

Textanalysen har gjorts med ett utvalt och anpassat analysverktyg. Verktöget var en förutsättning för att analysen skulle ha rätt inriktning och för att förenkla arbetet kring denna. Dock behöver ett verktyg kontinuerligt utvärderas. Risker med ett analysverktyg kan exempelvis vara att det inte hittar ”rätt” delar i materialet att tolka, att forskaren blir låst vid ett tillvägagångssätt eller att materialet påtvingas verktyget så att texten inte själv ”får tala”. Inledningsvis lästes delar av materialet igenom förbehållslöst för att ge en överblick över innehållet, vilket enligt Boréus och Kohl (2018) kan vara ett sätt att minska risken för detta.

En svårighet med textanalys kan vara att begränsa mängden material. Även med ett analysverktyg kan mängden material bli stort. Om stora material ska kodas kan uppdelningen i olika kategorier inte vara alltför krånglig och tidsödande (Boréus & Kohl, 2018). Möjligtvis hade det i denna studie varit en fördel att begränsa antalet kategorier i verktyget ytterligare, för att göra materialet och resultatet mer överblickbart.

Intervjuerna var semistrukturerade, vilket ger större möjlighet att vara anpassningsbar och exempelvis ställa följdfrågor utifrån den riktning som samtalen tar (Boréus & Kohl, 2018). Semistrukturerade intervjuer passar bäst när antalet informanter inte är alltför stort eftersom materialet lätt tenderar att bli omfattande. Intervjuerna omfattade endast fyra lärare. Detta innebär att resultatet inte kan generaliseras för att gälla för en större grupp. Resultatet ger endast en bild av uppfattningar och erfarenheter hos *några* lärare, men kan möjligtvis relateras till en större grupp. Ett större antal informanter hade inte varit hanterbart i denna studie, och genom att välja två lärare som arbetade med vardera läromedel, i olika skolor och kommuner, kunde reliabiliteten ändå stärkas.

I arbetet med denna studie har jag varit medveten om att jag bär med mig erfarenheter, vilka påverkar hur intervjuer och texter tolkas. Dessa erfarenheter har jag gjort mitt bästa för att ha ett medvetet förhållningssätt till, för att inte i alltför stor utsträckning påverka resultatet i en viss riktning.

7 Resultat

Här följer en presentation av studiens resultat. Denna inleds med en beskrivning av resultatet av en analys av två matematikläromedel, vilken inleds med en presentation av läromedlen. Analysen följer de fyra kategorierna i analysverktyget (se bilaga 1), med fokus på (1) *centrala idéer*, hur (2) *begrepp, fakta och strategier* visas och förklaras i läromedlen, beskrivningar av (3) *hur elever kan mötas för att stötta deras lärande*, samt på vilket sätt läromedlen erbjuder förslag till utformande och stöd av undervisningen med hjälp av (4) olika *representationsformer*. Att placera in något i en specifik kategori är inte alltid helt självklart, eftersom kategorierna hör ihop med och överlappar varandra. Ibland placeras därför ett innehåll in under fler än en kategori och ibland har den kategori valts där det tydligast hör hemma.

Därefter följer en sammanställning av intervjuer med fyra matematiklärare, vilka i sin undervisning använder dessa två läromedel. Här beskrivs, uppdelat under fem rubriker, lärarnas tankar kring (1) *centrala idéer och möjlighet som lärarresurs*, vilka (2) *fördelar* och (3) *nackdelar* de ser med läromedlet, hur de (4) *kan möta eleverna och stötta deras lärande*, samt hur (5) *representationsformer* används. Även här kan innehållet ibland passa in under flera rubriker.

7.1 Läromedel

Som underlag till beskrivningen och analysen av ”Mattespanarna” har ”Mattespanarna 4A Lärarboken” (Hernvald, Kryger & Hansson, 2011), ”Mattespanarna grundbok 4A” (Hernvald, Kryger, Hansson & Zetterqvist, 2011) använts, samt Libers hemsida (Liber, u.å.) där materialet beskrivs och författarna presenteras.

Som underlag för beskrivningen samt analysen av ”Singma matematik” har följande använts: ”Singma matematik Lärarhandledning 4A” (Agardh & Rejler, 2019), ”Singma matematik Lärobok 4A” (Yeap, Agardh & Rejler, 2019a), ”Singma matematik Övningsbok 4A” (Yeap, Agardh & Rejler, 2019b) samt Natur & Kulturs hemsida (Natur & Kultur, u.å.).

7.1.1 Presentation av två läromedel

Här följer presentationer av de två läromedlen; först genom allmänna beskrivningar av läromedelsserierna som de ingår i, och sedan mer ingående kring de aktuella delarna av läromedlen som är tänkta att användas i början av årskurs fyra.

7.1.1.1 Presentation av Mattespanarna 4A

”Mattespanarna” är ett läromedel för år 4–6 från Liber AB, som utkom år 2011–2013. Författarna är Andreas Hernvald, Gunnar Kryger, Hans Persson och Lena Zetterqvist, vilka enligt Libers hemsida har en lång sammanlagd erfarenhet av att arbeta som lärare, lärarutbildare, läromedelsförfattare och matematikutvecklare.

Mattespanarna ingår i serien ”Uppdrag: Matte”, som sträcker sig från förskoleklass till och med årskurs 9. Tanken är att ”Mattespanarna 4A” ska användas under första delen av årskurs 4, för att sedan följas av ”4B”. Materialet består av Spanarboken 4, Mattespanarna 4A grundbok, Lärarboken (lärarhandledningen) och Bashäfte 4A. Även onlineböcker finns.

Grundbok 4A består av fem kapitel; *om tal, addition och subtraktion, geometri, tid och längd* samt *tabeller*. A-boken innehåller dessutom ett startkapitel med repetition av föregående års innehåll. Varje kapitel kan inledas med att läraren ur Spanarboken högläser en berättelse om mattespanarna, som är tre barn vilka gillar att lösa deckarproblem. Berättelsen avslutas med ett uppdrag/problem som eleverna får hjälpa till att lösa. I grundboken fortsätter kapitlet sedan med en startruta som innehåller en blandning av repetition och uppgifter som är kopplade till det kommande innehållet. Inledningen innehåller även en ruta med viktiga begrepp och en innehållsförteckning till kapitlet, med korta förklaringar till vad de olika delarna kan användas till. Eleven arbetar sedan vidare i kapitlet med de olika delarna som ingår och alla beräkningar och svar skrivs i ett räknehäfte. En diagnos visar om eleven behöver repetera det grundläggande ytterligare eller om hen är redo att gå vidare till lite svårare utmaningar. Utifrån detta väljs det ”spår” som eleven arbetar vidare med. I slutet av kapitlet ska eleverna utvärdera hur säkra de känner sig i de olika delarna och utifrån detta kan man besluta om det är dags att gå vidare till ett nytt kapitel. Grundboken kan kompletteras med ett bashäfte, som följer arbetsgången i grundboken och ger elever möjlighet att repetera olika moment innan de börjar räkna på den enklare nivån i grundboken.

”Mattespanarna 4A Lärarboken” startar med en kort presentation av läromedlet och dess komponenter och sedan följer en beskrivning av hur man kan arbeta med dessa. Några centrala tankar i läromedlet beskrivs och kopplas till forskning samt till Lgr11. Lärarhandledningen innehåller även tips på material för praktisk matematik, på strategier att använda vid problemlösning och på klassrumsaktiviteter i form av startaktiviteter, fördjupade uppgifter

och olika varianter av spel. Varje kapitel inleds med beskrivning av det centrala innehållet i Lgr11 som kapitlets innehåll kan kopplas till, förslag på hur arbetet med kapitlet kan startas upp och en bedömningsmatris som kan användas för att utvärdera och följa elevernas kunskapsnivå. Till varje uppslag i boken finns korta instruktioner/förslag på hur arbetet kan läggas upp; tips på vad som är viktigt att tänka på, förklaringar till syftet med vissa uppgifter samt en del förslag på andra, oftast mer kreativa, aktiviteter. Uppslagets innehåll lyfts fram och förslag på ytterligare material ges ganska ofta, dock för det mesta utan en exakt instruktion om hur det ska användas. Det kan exempelvis handla om ett kopieringsblad, ett spel, en tallinje, tärningar, pengar, centimo-kuber eller en kortlek.

7.1.1.2 Presentation av Singma matematik 4A

”Singma matematik” är ett läromedel från förlaget Natur & Kultur. Det är under uppbyggnad och finns i dagsläget för årskurs 1-5. Läroboken 1A gavs ut hösten 2016 och sedan har det byggts ut med fler delar. ”Singma 4A” kom ut i augusti 2019. Författare/konsult är dr Yeap Ban Har från Singapore, som beskrivs som ”en av världens främsta experter inom Singaporemodellen och huvudförfattare till förlagan till denna läromedelsserie” (Agardh & Rejler, 2019, s.3) i samarbete med författarna Pia Agardh och Josefine Rejler. De två sistnämnda driver ett företag som fokuserar på fortbildning och utveckling av undervisningen enligt Singaporemodellen, och har sammantaget erfarenhet av att arbeta som lärare, förstelärare i matematik, föreläsare och verksamhetsutvecklare.

Läromedlet bygger på Singaporemodellen och baseras på Singapores läroplan och deras sätt att undervisa i matematik. Förlagan till Singma är *Primary Mathematics, Shing Lee Publishers*, ett av de godkända läromedlen i Singapore. Innehållet i Singma Matematik är granskat och bearbetat för att stämma överens med det centrala innehållet i den svenska läroplanen, Lgr11. Varje kapitel startar med en sida där kapitelinnehållet kopplas till läroplanen, utifrån det centrala innehållet samt problemlösnings-, begrepps-, metod-, resonemangs- och kommunikationsförmågorna. I lärarhandledningen finns även övergripande sammanställningar över innehållet i Singma 4, kopplat till förmågorna, det centrala innehållet och kunskapskraven.

”Singma matematik 4A” är tänkt att börja användas under höstterminen i år 4. Materialet består av lärobok, övningsbok, lärarhandledning och digitalt extramaterial (övningsuppgifter, kopieringsunderlag, bedömningsstöd och bildmaterial).

Läroboken och övningsboken 4A innehåller 6 kapitel; *talen till 10 000, addition och subtraktion, multiplikation och division, bråk, statistik och tid*. Varje kapitel är indelat i mellan fem och 13 lektioner. Varje lektion är uppbyggd på liknande sätt:

- *Vi utforskar* - Lektionen inleds med en startuppgift där man gemensamt arbetar och diskuterar kring den inledande bilden/uppgiften. Läraren har en coachande roll, och ställer frågor för att utveckla elevernas tänkande och reflektion.
- *Vi lär* – Tillsammans tittar man med hjälp av läroboken på den eller de lösningar som presenteras, och jämför med de lösningar man diskuterat.
- *Vi övar* - Eleverna prövar nu fler uppgifter på ett liknande sätt. De arbetar vidare i par eller grupp i läroboken och fortsätter att samtala och resonera kring uppgifterna.
- *Jag övar* - Eleverna arbetar på egen hand i övningsboken med att befästa sina kunskaper. I slutet av varje lektionsdel finns några extra utmanande uppgifter.

Den sista lektionen i varje kapitel består av en ”kunskapslogg” med möjlighet att reflektera över det man arbetat med och visa vad man lärt sig. Övningsboken innehåller även ett antal fördjupande och utmanande uppgifter, som kan göras enskilt eller i grupp.

Läroboken innehåller avslutningsvis en ordlista, där matematiska ord och begrepp som finns i läromedlet förklaras, med hjälp av text, bilder och symboler. Till läroboken används exempelvis ett räknehäfte eller en loggbok. I övningsboken finns tydligt utrymme för beräkningar och svar direkt i boken.

”Singma Lärarhandledning 4A” inleder med en längre presentation av läromedlet, den modell och de tankar som ligger till grund, samt kopplar detta till olika forskare och till Singapores och Sveriges kursplaner. I lärarhandledningen inleds varje kapitel med en kapitelstart som innehåller instruktioner/förslag på hur arbetet kan startas upp. Fokuspunkter sammanfattar kapitlets innehåll och följs av en övergripande beskrivning av vad eleverna kommer att få arbeta med och visa under arbetet i detta kapitel. Elevernas förväntade förkunskaper beskrivs och vad läromedlet tagit upp i tidigare årskurser presenteras. Det finns även en lektionsöversikt av kapitlets alla lektioner, kopplat till mål som ska uppfyllas. Till varje lektion visas de aktuella begreppen samt en lista över material som behövs, till exempel tiobasmaterial, mini-whiteboards, talkort och tallinjer. Hela lektionen beskrivs utförligt, med förslag på genomgångar, instruktioner, frågor, förväntade svar från eleverna, samt bilder som visar hur man kan rita och visa för att synliggöra begrepp och metoder på tavlan. Det finns även förslag på hur läraren kan hjälpa de elever som behöver extra stöd under lektionen, och de extra utmanande uppgifterna som finns i övningsboken beskrivs. Avslutningsvis presenteras vanligt förekommande svårigheter/missuppfattningar, ytterligare tips ges samt ett antal frågor finns som stöd för bedömning.

7.1.2 Centrala idéer

Den första kategorin i analysverktyget lyfter hur läromedlen motiverar till aktiviteter och uppgifter genom att kopplingar görs till forskning och teori, och centrala idéer beskrivs.

7.1.2.1 Mattespanarna – centrala idéer

Läromedlet är uppbyggt utifrån spännande deckarhistorier kring tre barn, som gillar att lösa deckarproblem. Tanken är att eleverna ska bli delaktiga och motiverade genom att matematiken används i en kontext som eleverna kan relatera till. Berättelserna innehåller uppdrag som eleverna får hjälpa till att lösa, parvis eller i grupp. Eleverna får på detta sätt möta matematiska begrepp som de kanske inte ännu känner till och de får chansen att tänka själva och pröva först utifrån de kunskaper de har med sig. På detta sätt skapas ett intresse för att lära sig nya begrepp och strategier, menar författarna. Uppdragen ger också tillfällen till diskussion kring olika sätt att tänka, då eleverna uppmuntras till att förklara och visa sina olika idéer. Det är viktigt att reflektion kring olika lösningar får ett stort utrymme av lektionstiden, enligt lärarhandledningen. Dessutom får eleverna träna sig i att välja mellan olika strategier. Tanken är att lärarhandledningen ska vägleda lärarna i hur man kan ta tillvara elevernas tankar för att skapa tillfällen att lära av varandra. I slutet av ett kapitel utmanas eleverna återigen i att lösa ett klurigt detektivuppdrag och då får de ett nytt tillfälle till liknande problemlösning, men denna gång har eleven fått med sig verktygen först, genom arbetet i boken där eleverna får lära sig ”enkla och smarta sätt att tänka”. Även fler tillfällen till gemensamt arbete med problemlösning finns under arbetet med ett kapitel, i form av mer praktiska eller öppna uppgifter. I lärarhandledningen finns fler uppgifter, som man rekommenderar att eleverna får arbeta med i par eller i grupp när tid finns, exempelvis vid uppstarten av en lektion för att alla ska få möjlighet att träna på detta.

Läromedlet betonar att undervisningen behöver bestå till stor del av arbete med gemensam problemlösning, där lärare och elever tillsammans diskuterar matematik. Då kan begrepps-träning och förståelse bli en naturlig del av vardagen och elever ser att problem kan lösas på olika sätt. Om läraren dessutom låter eleverna regelbundet reflektera över olika lösningar och se effektiva lösningsstrategier får de en vana att kritiskt granska sina egna lösningar.

Mattespanarna skapades av författarna i samråd med *Per-Olof Bentley*, universitetslektor vid Göteborgs universitet, och grundade sig på tankarna kring varför svenska elever har bristfälliga kunskaper i matematik, enligt analysen av TIMSS 2007 (Bentley, 2008), vilken Bentley var vetenskaplig ledare för. Enligt rapporten har eleverna beräkningsstrategier för att lösa problem men använder dem i fel sammanhang. Därför menar man att eleverna behöver få mer kunskap om när de olika metoderna ska användas samt även mer kunskap om de matematiska begreppen. Antalet räknemetoder är begränsade i läromedlet för att man ska kunna fokusera på förståelsen och eleverna ska känna sig säkra på och trygga med sina strategier. I Mattespanarna lärs *uppställning* ut samt räknemetoden *omgruppering*, vilken var den skriftliga metod som Bentley (2008) förordade eftersom den vid analysen visade på bäst resultat. Man menade att en fördel med omgruppering är att eleven gör på samma sätt i alla räknesätt. Dock förtydligar lärarhandledningen att man som lärare måste ta reda på vilken taluppfattning en elev har, för att kunna vägleda hen i att välja räknemetod. Om en elev endast har automatiserat talkamraterna 0–10 i addition och subtraktion är omgruppering bäst vid lösningar utan tiotalsövergång och uppställning bäst när en uppgift innehåller tiotalsövergångar.

Mattespanarna är anpassad till 2011 års kursplan i matematik. I Lgr11 läggs stor vikt vid att alla elever ska få arbeta med uppgifter som innehåller de olika dimensionerna *fakta* (lära sig begrepp, metoder och strategier), *förståelse* (jämföra, kommunicera och argumentera kring exempelvis storleksordning, enhetsomvandling eller val av strategier) samt *analys* (använda sina kunskaper genom att till exempel se samband, relatera, bedöma rimlighet och formulera egna frågor eller lösningar). I början av varje kapitel finns en kunskapsöversikt, uppbyggd utifrån kursplanen i matematik och kopplad till kapitlets innehåll. Ämnets syften, de fem förmågorna, spänner över det centrala innehållet och kunskapskraven. I kunskapsöversikten är syftena uppdelade i fyra rubriker: lösa problem, använda och analysera begrepp, göra beräkningar, samt resonera och samtala om frågeställningar, beräkningar och slutsatser.

I slutet av boken finns kunskapsöversikter för hela Mattespanarna 4A. Läromedlet lyfter fördelen med att fokusera på vilka förmågor en elev har istället för på detaljer i det centrala innehållet, för att läraren ska få bättre förståelse för kunskapsnivån hos eleverna. Genom att låta eleverna använda olika förmågor inom ett arbetsområde når de en högre förståelse. Om en elev får samtala om och argumentera för något, även i matematik, tränar de exempelvis sin analytiska förmåga, menar lärarhandledningen.

7.1.2.2 Singma matematik – centrala idéer

Singma är uppbyggt enligt Singaporemodellen, där läromedlet är ett viktigt stöd för den som undervisar. Dess tydliga struktur stärker förståelsen genom att ta små genomtänkta steg och använda bildspråk för att stödja och förklara, menar författarna. Mycket fokus ligger på att stärka taluppfattningen och förståelsen för begrepp, vilket till stor del sker med hjälp av laborativt material och visuella verktyg. Att lära tillsammans med andra ger bättre förutsättningar för inläring jämfört med om eleverna arbetar självständigt med olika områden. Därför betonas vikten av att gruppen hålls ihop så att alla kan arbeta gemensamt med samma arbetsområde. Genom att arbeta tillsammans kan tankar och resonemang breddas och fördjupas.

Läromedlet bygger på den undervisningsmodell som utvecklats i Singapore sedan 1980-talet. Enligt lärarhandledningen har Singaporemodellen baserats på internationell forskning och har tagit intryck av flera kända forskare/matematiker/psykologer. *Lev Vygotskijs* teorier kring betydelsen av social interaktion och språkets betydelse vid inläring kopplas till tankarna om att undervisningen till stor del ska bestå av dialog och resonemang i helklass eller i mindre grupper, med möjlighet för eleverna att lära av varandra och reflektera själva. Undervisningen bygger på *spiralprincipen*, vilken utvecklades av *Jerome Bruner*. Denna innebär att varje område introduceras gradvis och systematiskt byggs på för att begreppen ska vidgas. Även Bruners tankar kring representationsformer har inspirerat. Han betonade bildens betydelse för förståelse och inläring, vilket Singaporemodellen har tagit till sig både i yngre och äldre årskurser.

Tankarna i Singma om att undervisningen ska vara uppbyggd kring tydlig struktur och systematik bygger bland annat på *Zoltan Dienes* idéer om hur undervisningen kan varieras och att eleverna bör vara aktiva och arbeta undersökande med laborativt material. Lektioner och uppgifter är noga utprovade för att ge möjlighet till systematisk variation och fördjupad förståelse. Matematikern *Richard Skemp*s forskning kring betydelsen av den relationella förståelsen framför det rent instrumentella räknandet har inspirerat Singaporemodellen till tanken att lärarens uppgift är att skapa en djupare förståelse för centrala begrepp och idéer inom matematiken, istället för att eleverna får lära sig procedurer och regler utantill. Läromedlet använder en struktur för problemlösning bestående av fyra steg, utvecklad av matematikern *George Pólya*.

Läromedlet är tydligt med att problemlösning är i fokus. Viktigt är *hur* eleverna arbetar med problemlösning och *hur* läraren undervisar utifrån ett problemlösande förhållningssätt. Problemlösning handlar inte bara om uppgifter av karaktären ”kluringar”, utan mer allmänt om lärarens sätt att undervisa. Vid startuppgiftens gemensamma utforskande, men även under det fortsatta arbetet, ställer läraren frågor som är utvecklande för elevernas tänkande, genom att ge utrymme för resonemang, reflektion samt kommunikation kring olika strategier. Förslag på frågor finns, kopplat till varje lektion. Uppgifterna som ska lösas beskrivs som vardagsnära och relevanta. De börjar enkelt, är utvecklingsbara och kan varieras utifrån elevernas förmågor och behov. Genom det strukturerade arbetssättet blir problemlösning en vana. Eleverna lär sig att arbeta med och utforska en uppgift under en längre tid, att det handlar om att tänka och förstå, istället för att matematik blir en aktivitet där det gäller att hinna med så många uppgifter som möjligt, enligt författarna. Presentationen av flera lösningar är tänkt att uppmuntra till kreativt tänkande och att prova att lösa problemen på olika sätt. Läroboken blir på så sätt en modell för hur matematiska lösningar kan kommuniceras, till exempel med hjälp av olika uttrycksformer såsom bilder, siffror och symboler. Konkret material och visuella verktyg används till stor del inom Singaporemodellen. Dessa hjälper till att synliggöra och att öka förståelsen, och inläring sker på ett lekfullt sätt.

Inom Singaporemodellen har läraren en viktig roll för elevers lärande och utveckling. Lärarens kompetens betonas samt att undervisningen bedrivs med hög kvalitet på ett genomtänkt och systematiskt sätt. Lärarens roll är att vara medforskande, ställa frågor för att hjälpa eleverna att utveckla sitt tänkande samt att uppmuntra dem att finna fler strategier och metoder för att lösa problem. Svaren ska i första hand komma från eleverna själva, och läraren ska återberätta och spegla det eleverna säger. Lärarhandledningen beskriver hur läromedlet ger läraren ett stöd och en tydlig idé om hur lektioner kan läggas upp, vad som är i fokus och hur elevers eget tänkande och lärande kan stöttas och utmanas.

7.1.3 Begrepp, fakta och strategier

Den andra kategorin i analysverktyget beskriver hur läromedlen lyfter och förklarar begrepp, fakta och strategier inom matematiken, som stöd för läraren och för eleverna. Detta kan exempelvis ske genom att tillämpningsområden beskrivs och korrekt terminologi används.

7.1.3.1 Mattespanarna – begrepp, fakta och strategier

Vid varje kapitelstart finns en ruta, både i lärarhandledningen och i grundboken, där kapitlets centrala begrepp listas, för att kunna gå igenom inledningsvis. Läromedlet betonar att eleverna, för att kunna prata matematik, behöver ha en god förståelse för vad de matematiska begreppen innebär. Förslag på att eleverna kan göra egna matematikordlistor finns, samt att låta eleverna parvis komma med förklaringar och exempel på orden. Förklaringar av begrepp samt beskrivningar av strategier finns vid respektive delmoment i elevboken, i en blå faktaruta högst upp på respektive sida. Exempelvis beskrivs udda och jämna tal som ”Ett tal där entalet är jämnt, är ett jämnt tal. Ett tal där entalet är udda, är ett udda tal”, samtidigt som exempel på tal ges (s.23). I en Utmanings-uppgift på samma sida utmanas eleverna att undersöka jämna och udda tal, och i lärarhandledningen (s.35) förklaras att uppgiften vill uppmuntra eleverna till att dra slutsatser och uttrycka dem matematiskt, exempelvis ”Om man adderar två jämna tal får man alltid ett jämnt tal som svar.” Andra exempel är att positionssystemet och begrepp såsom *tiotal* och *ental* visas och tydliggörs i elevboken, olika tallinjer visas och förslag ges på hur man kan tänka när man ska utläsa markeringar på dem, skillnaden mellan *siffror* och *tal* förklaras, exempel ges och lärarhandledningen uppmanar till att upprepa skillnaden ofta eftersom det är viktigt att använda rätt begrepp.

Innehållsförteckningen till varje kapitel innehåller även enkla exempel på tillämpningsområden. *Siffror och tal* kan man ha ”för att kunna använda matematik i vardagen”, *tallinjen* ” för att kunna storleksordna tal” samt *jämna och udda tal* ”för att kunna veta vilka som går att dela jämnt mellan två personer” (elevboken s.19, lärarhandledningen s.34). Lärarhandledningen menar att innehållsförteckningen ska läsas igenom gemensamt för att skapa en förförståelse hos eleverna, och att kanske några elever kan tala om vad de tror att kapitlet kommer att handla om mera konkret.

I läromedlet används räknemetoderna *huvudräkning*, *omgruppering* samt *uppställning*. I en större blå faktaruta i elevboken (s.53) visas uträkningar av en uppgift, med samtliga tre metoder. Eleverna ska jämföra lösningarna, hitta saker som skiljer dem åt och fundera över vilken metod de tycker är bäst. Varje metod har även en egen faktaruta där den presenteras och ett exempel visas. Addition med omgruppering presenteras för eleverna på följande sätt (s.51): ”Du har hittills arbetat med huvudräkning. Ibland kan uppgifter vara svåra att räkna ut i huvudet. Då kan du behöva skriva några beräkningar som hjälp. Vi arbetar med omgruppering.” Därefter visas och förklaras hur omgruppering går till. I lärarhandledningen beskrivs metoden på detta sätt (s.53): ”Omgruppering består av att du delar upp någon av termerna, vanligtvis den andra termen, i olika talsorter. Därefter adderar du den största talsorten med den första termen.” Läraren uppmanas att visa två exempel, varav ett innehåller tiotalsovergång. Lärarhandledningen förtydligar: ”Observera att exempel 2 kräver att eleverna har automatiserat talkamraterna upp till 20 för att metoden ska vara effektiv. En del elever har inte gjort det i år 4, därför har vi inte sådana uppgifter på spår 1. För dessa elever blir det säkrare att göra en uppställning.”

7.1.3.2 *Singma matematik – begrepp, fakta och strategier*

Lärarhandledningen startar upp varje kapitel med en lista med fokuspunkter, vilka sammanfattar innehållet i det kommande kapitlet, till exempel *tusental, hundratal, tiotal och ental* samt *beskriva och göra klart talföljder*. Läraren uppmanas att gå igenom punkterna tillsammans med eleverna vid introduktionen av ett nytt kapitel, för att ge dem en bild av vad de kommer att möta. En text med presentation av innehållet finns även, där det beskrivs lite mer ingående. Listan med fokuspunkter återkommer på kapitlets sista sida i elevernas lärobok, där tanken är att man tillsammans resonerar kring dessa och eleverna uppmuntras att komma på exempel. Exempel på frågor att använda finns.

Under rubriken *Förklara och formalisera* i lärarhandledningen finns beskrivningar till varje lektion av hur läraren sammanfattar och formaliserar startuppgiften. Läraren får tips på hur man visar genom att rita och skriva på tavlan, samt vilka begrepp och metoder som bör lyftas fram. Exempelvis kan läraren uppmanas att börja med att lägga ett tal med tiobasmaterial, för att sedan lägga det med talbrickor och synliggöra likheterna dem emellan, och slutligen gå över till att räkna och skriva med siffror (s.38). Texten kompletteras av rutan *Dokumentation*, där man kan se hur man kan rita/visa/skriva.

I lärarhandledningen finns även till varje lektion en begreppsruta, som visar de aktuella begrepp man kommer att arbeta kring. På s.86 presenteras den första lektionen i kapitel 2 (*Addition utan växling*) och de aktuella begreppen i rutan förtydligas ytterligare i texten *Förklara och formalisera*, exempelvis på detta sätt: ”Skriv $1235+2250=3485$ på tavlan och berätta att när ni adderar så kallas talen *termer* och svaret *summa*”. I elevernas lärobok visas och förklaras begrepp och strategier i huvudsak med hjälp av de tecknade barnens pratbubblor, när de exempelvis presenterar olika sätt att lösa en uppgift.

Lärarhandledningen förklarar att i kapitel 2 (*Addition och subtraktion*) kommer eleven att få använda sig av olika metoder; både huvudräkning, överslagsräkning och skriftliga metoder samt digitala verktyg. Eleverna ska pröva att använda de olika metoderna, beroende på hur uppgifterna ser ut, och resonera om metodernas lämplighet. I elevernas lärobok visas i detta kapitel metoderna *blockmodellen*, visualisera/räkna med *talbrickor* samt *uppställning*. Ytterligare ett par räknemetoder visas för eleverna vid ett tillfälle i kapitlet, till exempel det som i Mattespanarna benämns som ”omgruppering”, samt några andra sätt att dela upp tal vid beräkning.

7.1.4 Att möta elever och stötta lärandet

I den tredje kategorin i analysverktyget visas förslag från läromedlen på hur elever med olika strategier kan mötas, för att mediera deras lärande och förhindra framtida svårigheter; både när det gäller elever i behov av utmaningar samt särskilt stöd. Även läromedlens grundläggande tankar för att möta elever på gruppnivå lyfts inledningsvis.

7.1.4.1 *Mattespanarna – att möta elever och stötta lärandet*

Genom att bygga läromedlet kring en spännande deckarhistoria vill författarna skapa intresse, delaktighet och motivation hos eleverna. I gemensamma diskussioner och gemensamt arbete skapas tillfällena att lära av varandra och elevernas tankar tas tillvara. Vid arbete med exempelvis uppgifterna föreslår läromedlet att man arbetar med *1-2-24-modellen*. Denna innebär att eleverna först får försöka lösa uppgiften på egen hand, sedan resonera i par och slutligen fånga olika förslag upp som presenteras och diskuteras i helklass. Ett alternativ kan vara att innan det tredje steget, gärna i samråd med eleverna, bestämma hur man ska gå vidare: om

helklassdiskussionen ska ske direkt eller om ska man vänta några lektioner tills eleverna hunnit få fler verktyg.

För att ge eleverna en struktur för hur de ska gå tillväga med textuppgifter introduceras fyra frågor: Vad vet jag? Vad ska jag ta reda på? Hur ska jag lösa det? Är mitt svar rimligt? Den sista frågan är viktig men hoppas över av många elever, enligt läromedlet, men genom att träna eleverna på att först göra ett överslag kan många felaktiga svar reduceras. Frågorna introduceras i kapitel 1 (*Om tal*) på spår 2 och spår 3 samt påminns om i kapitel 2 (*Addition och subtraktion*) på spår 2 och spår 3. Spår 1 innehåller färre textuppgifter vilket kan vara en av anledningarna till att man väljer att inte introducera frågorna på den nivån.

Lärohandledningen tipsar om att man kan läsa igenom kapitlets innehållsförteckning gemensamt, för att skapa en förförståelse hos eleverna. De får då fundera över vad de tror att kapitlet kommer att handla om.

Efter att ha arbetat med den gemensamma delen av kapitlet gör eleverna en diagnos. Diagnosen finns i en lättare och svårare version. Utifrån resultatet på diagnosen resonerar elev och lärare tillsammans om hur det gick och om vilket spår eleven fortsättningsvis ska arbeta med. Ytterligare en diagnos kan göras i ett senare skede som en uppföljning av framförallt de elever som behöver extra stöttning.

I lärohandledningen finns kopieringsblad som kan användas på olika sätt, exempelvis som övning innan man börjar med bokens uppgifter eller som extraträning efter avsnittet för de elever som behöver mer träning. Det finns läxor som hör till läroboken, för att kunna erbjudas till elever som behöver mer tid till att befästa ett innehåll. Boken tipsar även om att de elever som har svårt att räkna med likheter inom addition och subtraktion kan få använda pengar. Dock betonas det att läraren ska försöka få eleverna att automatisera denna räkning så snart som möjligt. Hur detta mer exakt ska gå till finns inte beskrivet. Andra förslag som nämns är att eleverna ska uppmuntras att rita exempelvis tre personer eller ta hjälp av tre klasskamrater, för att lösa en uppgift, samt att visa talsorter i kolumner.

Lärohandledningen tipsar även kring hur elever kan utmanas inom matematiken, exempelvis med hjälp av spel, klurigheter eller genom att göra egna uppgifter.

7.1.4.2 Singma matematik – att möta elever och stötta lärandet

Läromedlet Singma är uppbyggt kring ett strukturerat arbetssätt som är tänkt att utmana, utveckla och modellera. En stor del av tiden ägnas åt samtal och diskussion, där eleverna uppmanas att berätta för varandra hur de tänker, att återberätta och visa, så att eleverna lär av varandra. Detta ger läraren möjlighet att få en bra överblick över elevernas kunskap och förståelse. I *Utforska*-delen samt vid kapitelstart, efter en kort inledning, får eleverna först fundera och pröva själva en stund och sedan diskuterar eleverna parvis. Slutligen tittar alla gemensamt på några olika strategier och förslag och samtalar kring dessa. Lärohandledningen beskriver uppgifterna som vardagsnära, de börjar enkelt, är utvecklingsbara och kan till viss del varieras. Som stöd för eleverna används en struktur för arbete med problemlösning i fyra steg: sätta sig in i problemet och förstå, göra upp en plan, genomföra planen samt kontrollera och reflektera över resultatet. Denna nämns återkommande genom läromedlet, och bygger på Pólyas tankar.

Undervisningen bygger, som tidigare nämnts, på spiralprincipen. Genom att samma matematiska innehåll återkommer, med en tydlig utveckling och i små genomtänkta steg, kan elever-

na återknyta till tidigare erfarenheter och kunskapsmässigt röra sig uppåt och framåt i en spiralformad rörelse. Lektionerna bygger på varandra, området utvidgas och till varje lektion tillförs något nytt, vilket tydligt kan ses i läromedlets upplägg. I lärarhandledningen beskrivs kortfattat vilka förkunskaper som eleverna förväntas ha innan de börjar arbeta med varje kapitel och en lista finns över vilket innehåll som ingår i Singma 1–3, som stöd för läraren vid planering och vid mötet med eleverna. Dessutom tipsar lärarhandledningen om att använda bedömningsmatriserna för att dokumentera elevers kunskaper och förmågor, för att ha detta som ett underlag i det fortsatta arbetet, när elever möter liknande innehåll längre fram. Elever som ännu inte är helt säkra på innehållet kan på detta sätt lättare fångas upp av läraren. Till en del av lektionerna presenteras vanligt förekommande svårigheter och missuppfattningar, med förslag på hur läraren kan förtydliga för att stödja, förebygga och minska risken för missuppfattningar, exempelvis genom att uppmärksamma delar eller synliggöra skillnader. Detta ska även vara en hjälp i bedömningen genom att läraren blir uppmärksam på vad många kan ha svårt för, samt att läraren får lättare att bedöma den enskilde elevens eventuella svårigheter. Många lektioner innehåller även tips på vad som kan vara extra bra att belysa och förtydliga, exempelvis att ”Vissa elever adderar tusentalen först, eftersom de är vana vid att arbeta från vänster till höger. Betona att alltid addera entalen först, eftersom det är nödvändigt senare vid uppställning med växling.” (s.89).

De flesta lektioner har i lärarhandledningen en ruta som heter *Dokumentation*. I den visas hur läraren kan/ska rita och visa på tavlan för att synliggöra begrepp och metoder från Vi Utforskar, till exempel i form av en positionstabell, block eller matematisk text. Tanken är att hjälpa läraren att snabbt se vad som är viktigt att visa och dokumentera för att eleverna ska kunna få en god förståelse. Läromedlet lägger stor vikt vid att stärka förståelsen genom användningen av konkret material och visuella verktyg, med tydlig struktur och genomtänkt bildspråk. Det beskrivs hur kommunikation ska ske med hjälp av olika uttrycksformer; muntligt, konkret och visuellt, med bilder, siffror och symboler.

Lärarhandledningens lektionsguide innehåller konkreta tips och råd kring upplägg i varje moment, även hur läraren kan/bör stötta och utmana elever utifrån deras olika behov. I slutet av varje lektionsbeskrivning finns rubrikerna *Extra stöd* samt *Extra utmaning*. Den förstnämnda innebär konkreta förslag på hur läraren kan hjälpa de elever som behöver mer stöttning, vilket exempelvis kan vara att låta eleverna använda tiobasmaterial, talbrickor eller motsvarande digitalt, när de arbetar med uppgifter. Andra tips är att ställa vissa frågor, förklara och samtala om specifika delar, visualisera, hjälpa eleverna att jämföra, rita en tallinje för att visa, låta eleverna fortsätta att använda konkret material för att underlätta jämförelser av tal och sedan övergå till att använda positionstabeller som stöd. Under den andra rubriken finns beskrivningar av uppgifterna under rubriken *Extra utmaning* i Övningsboken, som finns i slutet av varje lektion. Här beskrivs hur eleverna exempelvis kan utmanas i att göra egna uppgifter enligt en modell, utforska olika sätt att uttrycka något, upptäcka, beskriva, jämföra samt förklara hur personer i uppgiften tänker.

I slutet av ett kapitel finns uppgifter i Övningsboken som heter *Jag klurar*. Tanken är att elevernas tänkande ska utmanas och fördjupas. De elever som behöver ska stöttas genom att uppgifterna läses tillsammans, så att de förstår vad de ska göra. Även till kluringarna finns tips på hur extra stöd kan ges, exempelvis i form av att använda stödfrågor, talkort, miniräk-nare, få hjälp med att arbeta systematiskt och att eleverna får skriva på miniwhiteboards, för att lättare kunna pröva sig fram. För de elever som behöver extra utmaningar tipsar läromedlet om att låta eleverna få förklara sina strategier, hitta på liknande uppgifter eller pröva om det finns fler sätt.

7.1.5 Representationsformer

I den fjärde kategorin i analysverktyget beskrivs på vilket sätt läromedlen erbjuder förslag till utformande och stöd av undervisningen med stöd av olika representationsformer.

7.1.5.1 Mattespanarna - representationsformer

I Mattespanarnas Lärarbok (s.9) finns det en lista med tips på material för praktisk matematik. Läromedlet rekommenderar att det, när eleverna ska arbeta med praktisk matematik, finns användbart material i klassrummet som de lätt kan plocka fram och arbeta med. Läraren tipsas om att göra iordning ett matteskåp, en mattehylla eller mattelådor. Exempel på material som finns i listan är tändstickor, tärningar, kortlekar, pengar, tallinjer, Centimo-kuber, klockor, bönor, centimeterrutat papper och måttband.

I lärarhandledningen listas och beskrivs ett antal klassrumsaktiviteter, vilka kan användas från och med olika kapitel i boken, fast de i övrigt är fristående. Aktiviteterna kan man använda i helklass i början av lektionen, som ett avbrott mitt i lektionen eller som en avslutning. De flesta av aktiviteterna är olika varianter av spel, och tanken med dessa kan vara att variera undervisningen och ge eleverna tillfällen att arbeta med matematik på ett alternativt sätt. Man betonar att läraren inte ska glömma att även de elever som arbetar i spår 1 ska få möjlighet att bryta den vanliga aktiviteten för att spela ett spel. Aktiviteterna kan till exempel vara en "matteorm", ett "memory" för att träna addition eller subtraktion, ett spel för att träna på dubbelt eller hälften, eller spelet "Full fart mot 1000" där man tränar på bland annat talsorter och att se talens värde. Till aktiviteterna finns kopieringsunderlag och till vissa av dem används material i form av exempelvis tärningar eller olika spelkort.

Lärarhandledningen (s.8) tipsar om strategier i problemlösning som kan vara användbara. Det första förslaget är att försöka visa problemet genom att *rita en bild*. På så sätt visualiseras problemet och det kan bli enklare att förstå uppgiften och att se en lösning. Ett annat förslag är att förenkla problemet genom att *pröva med hjälp av en tabell* och med hjälp av strukturen lättare kunna se en lösning.

I elevernas grundbok finns det gott om bilder som illustrerar uppgifter på sidorna; ibland antagligen i första hand för att göra uppslaget mer tilltalande, exempelvis med en teckning av ett barn som står och funderar. Många gånger kan illustrationerna användas för att ge stöd till eleverna för att förstå och för att kunna lösa en uppgift; exempelvis med en teckning av en klass som sitter i en biosalong (s.21), vilken kan användas när man räknar ut vilka stolsnummer olika elever har i salongen eller vilken rad någon sitter på. Positionssystemet åskådliggörs (s.24) med hjälp av en tabell där några barns sparade pengar visas, uppdelade på de olika talsorterna. På nästa sida visas en liknade uppgift endast med siffror, och eleverna påminns om "platsernas" namn. En liten fladdermus följer med genom boken och ger ofta eleverna tips och stöd i sina pratbubblor.

De flesta av elevbokens uppslag har i lärarhandledningen en ruta med material som man rekommenderas att använda. Materialet kan i grundkursen exempelvis vara kopieringsblad, spel, tallinjer, pengar, tärningar, kuber eller kortlekar. Det är skillnad på vilka material som läromedlet tipsar om till de olika spåren. I spår 1 handlar det i större utsträckning om konkretiserande material såsom pengar och Centimo-kuber, för att exempelvis hjälpa eleverna att se hur värdet ändras när positionen byts, när man arbetar med platsvärde (s.37). Förklaringar till hur material ska/kan användas finns i olika grad. Ibland finns en enkel beskrivning om hur

materialet kan användas och ibland förutsätts det att läraren själv kan se detta. Till spår 2 finns förslag på att använda ett kopieringsblad (kapitel 1) och *eventuellt* pengar (kapitel 2). Spår 3 innehåller inte några förslag på material. I spår 2 och 3 tipsas läraren oftare om att be eleverna att rita eller göra en tabell.

Vid några tillfällen uppmantrar lärarhandledningen till att låta eleverna arbeta mer praktiskt, exempelvis genom att måla upp tallinjer på skolgården eller att bygga en tallinje av en pinne som skyltar med talen hänger på. Läromedlet föreslår att elever, när de är färdiga med spåren, exempelvis kan göra egna uppgifter till klasskamraterna med hjälp av kataloger och reklamblad, eller egna spel.

7.1.5.2 Singma matematik - representationsformer

Lärohandledningen betonar vikten av att använda olika representationsformer i undervisningen. ”Mycket tid och fokus ligger på att stärka elevernas taluppfattning och förståelse för begrepp. Varje nytt område och begrepp introduceras på ett systematiskt och genomtänkt sätt med små steg i taget. Konkret material och visuella verktyg används för att stärka förståelsen.” (s.7). Inläringen ska ske på ett lekfullt sätt med hjälp av konkret material och genomtänkta visuella verktyg, kopplat till det abstrakta för att skapa förståelse, vilket ska hjälpa eleverna att synliggöra matematiken och bättre förstå vad de gör. Detta synsätt genomsyrar undervisningen och läromedel som är baserade på Singaporemodellen, och kallas för *CPA approach (concrete – pictorial – abstract)*. Det bygger på Jerome Bruners tankar kring representationsformer. Bildens betydelse för förståelse och inläring betonas i läromedlet, både i yngre och äldre årskurser i grundskolan.

Läromedlet inleder varje kapitel med en bild och en fråga, vilka är kopplade till kapitlets innehåll och ska inspirera till samtal och reflektion samt nyfikenhet och intresse. Varje lektion har dessutom en illustrerad startuppgift (*Vi utforskar*) där eleverna får pröva olika strategier och resonera kring begrepp; först enskilt, sedan parvis och slutligen gemensamt i hela gruppen. Till varje lektion finns en ruta med det material som ska användas eller finnas tillgängligt för eleverna. Vid startuppgiften ska ibland talkort, eller annat material kopplat direkt till uppgiften, delas ut. Många gånger ska eleverna även ha tillgång till en mini-whiteboard att skriva och rita på. Eleverna ska alltid ha tillgång till konkret material för att kunna pröva sig fram och därför återkommer en uppmaning vid i princip varje lektions startuppgift: ”Se till att eleverna har tillgång till talbrickor eller annat tiobasmaterial”. Andra vanligt förekommande material är positionstabeller, tallinjer och talbrickor.

Under rubriken *Förklara och formalisera* beskrivs hur läraren ska använda materialet för att visa och förklara för eleverna, exempelvis genom att först lägga talet som motsvarar antalet äpplen i uppgiften med tiobasmaterial, sedan lägga det med talbrickor och synliggöra likheterna mellan dessa. Därefter går läraren stegvis över till att skriva detta med siffror. I *dokumentationsrutan* visas detta tydligt för att läraren ska kunna se vad som är viktigt att visa och dokumentera.

Lärohandledningen ger, kopplat till varje lektion, förslag på hur läraren kan stötta elever i behov av extra stöd. Det handlar till stor del om att fortsätta att använda konkret och visuellt material, med stöd av lärarens guidning. Vad läraren kan göra och säga för att hjälpa eleverna att utveckla/stärka förståelsen, går boken tydligt igenom.

I elevernas lärobok finns det många illustrationer. Kapitlens startbilder fyller helsidor, är färgrika, utan onödig information, och ska vara inspirerande att samtala och fundera kring. Lekt-

ionernas startuppgifter består av bilder som oftast är ganska avskalade och enkla, även här utan onödig information. Ofta består de av en eller ett par barn, pratbubblor samt möjligtvis något/några föremål, vilka kan vara sifferkort eller exempelvis lådor med äpplen (kopplat till en uppgift kring detta). Boken är rikt illustrerad med talbrickor, talkort, tabeller och visuella block. Dessa används ofta för att visa olika steg i en uträkning. Addition med växling visas till exempel först med blockmodellen. Sedan visas det med talbrickor i olika kolumner utifrån platsvärden, i fyra steg, och parallellt med detta visas uträkningen med hjälp av uppställning. Teckningar av de olika barnen återkommer hela tiden i läroboken och de ger tips och stöd genom texten i sina pratbubblor.

Blockmodellen är ett visuellt verktyg som används mycket i läromedlet. Genom att rita liggande staplar visualiseras en uppgift och det blir lättare för eleverna att förstå hur de ska lösa den och visa hur de har tänkt. Lärarhandledningen berättar att elever i Singapore tidigt lär sig att använda modellen för att synliggöra problem, och att de sedan kan fortsätta att använda samma modell för att lösa mer komplexa problem samt för att underlätta förståelsen för algebra. Blockmodellen blir ett verktyg och ett hjälpmedel som man kan ha med sig upp i åldrarna. Den introduceras i små steg genom att eleverna först arbetar med konkret material i form av Multilink-kuber, vilka även visas på bild i läromedlet och till formen påminner om blockmodellens liggande staplar. På så sätt blir det en naturlig övergång från att använda kuber till att använda block; från det mer konkreta till det visuella. Parallellt med detta används även siffror och matematiska tecken. I lärarhandledningen presenteras blockmodellen (s.9–11) och flera exempel ges på hur den kan användas.

Singma matematik tydliggör hur innehållet i varje kapitel kopplas till läroplanen (Lgr11) utifrån de olika förmågorna. I de två första kapitlen är det framför allt till metodförmågan och kommunikationsförmågan där olika representationsformer tydligt beskrivs. Metodförmågan handlar om att använda olika strategier och metoder, och visa och förklara dem med hjälp av konkret material och bilder som kopplas till det abstrakta. Kommunikationsförmågan handlar om att kommunicera sin kunskap genom att använda olika uttrycksformer för att visa och förklara, exempelvis med konkret material, bilder och symboler.

7.2 Intervjuer

Här följer resultatet av intervjuerna. De fyra intervjuade lärarna har arbetat med matematikundervisning i 10–20 år. De undervisade vid intervjutillfället i matematik i årskurs fyra, på olika skolor. Lärare A och B arbetade med Mattespanarna och lärare C och D arbetade med Singma matematik, som huvudsakliga läromedel. De hade tidigare provat på att arbeta med andra matematikläromedel.

7.2.1 Centrala idéer samt möjlighet som lärarresurs

Mattespanarna fanns redan på skolorna när lärare A och B började arbeta där, så det läromedlet var inget aktivt val för dem. De var inte helt nöjda men tyckte att det var okej och att det fungerade att arbeta med det, även om de nu började känna sig nyfikna på att titta på andra, nyare alternativ, mycket beroende på att Mattespanarna kom ut för nio år sedan och inte är anpassat efter den reviderade läroplanen. Båda lärarna lyfte att läromedlet utgår från Lgr11 och nämnde Per-Olof Bentley när de fick frågan om läromedlets teoretiska grund/centrala idéer. Lärare A kände till lite om bakgrunden och berättade om hur resultaten på TIMSS visade på bristfälliga kunskaper hos svenska elever: ”Man var duktigare på metoden men visste inte när den skulle användas. Behövde jobba mer med matematiska begrepp.” Lärare B utvecklade sina tankar: ”En läromedelsförfattare har tänkt något, har en teori om hur man i

läromedlet lär ut någon viss metod... det är ju bra om man tittar på det, hur de tänker, så kan man ta bort det om man inte tycker det är bra, om man vill göra på ett annat sätt”.

Både lärare A och B använde lärarhandledningen mer som ett uppslagsverk och en tipsbank. De tittade i den för att exempelvis få inspiration, få förklaringar till vissa uppgifter eller för att hitta spel eller extra färdighetsträning. Lärarna berättade att de förlitade sig på sin erfarenhet, använde läromedlet till viss del men plockade uppgifter och material även från annat. Lärare A: ”Jag har inte lusläst handledningen, det blir ju lite så när man jobbar, man tar från olika sammanhang, olika saker man provat. Vi arbetar med kapitlen och materialet men följer det inte slaviskt.”

Lärare C och D arbetade med *Singma matematik* och läromedlet hade använts i de yngre åren på skolorna tidigare. Nu när det även fanns för årskurs fyra hade skolorna valt att fortsätta med det och bygga vidare uppåt allteftersom det ges ut. Båda lärarna har träffat författarna vid kurser och utbildningar kring läromedlet och Singaporematte. Lärare D: ”Vi var på kurs i detta och blev nyfikna och så var det tyngden i lärandeteorierna som ligger bakom, att de är så transparenta i var allting kommer ifrån och så, att det inte är något de själva har kommit på.” Lärare C: ”Varenda uppgift är redan testad och beprövad, så den bygger ju redan på beprövad erfarenhet, fast i ett annat land. Dr Yeap har jag träffat vid ett flertal tillfällen och haft utbildning med. Han är inom Singaporematten en ’Vygotskij’ kan man säga! En inspirerande person.” Lärare C och D använde lärarhandledningen vid varje lektion: förberedde sig och följde lektionsuppläggen. Lärare D: ”Lärarhandledningen har jättestort inflytande. Jag kollar i den inför varje lektion, där står precisa förslag på konkret material, förslag på frågor jag kan ställa till klassen, exakt vad det är de ska lära sig, hur man kan jobba med elever som behöver extra stöd eller utmaningar, så den har verkligen allt.”

7.2.2 Fördelar med läromedlen

Lärare A och B tyckte om *Mattespanarnas* upplägg med först grundkurs, följt av diagnos och sedan att välja spår, vilket innebär att man arbetar med nivåanpassade uppgifter. Lärare B berättade: ”Spår 1 går igenom en gång till, en repetition om man inte riktigt befäst. De som befäster väldigt fort ska ju inte sitta och göra sådant som är för lätt, utan ska gå vidare men att de går vidare med samma arbetsområde. De ska få svårare uppgifter inom detta så att de hänger med i diskussionerna.”

Lärare A och B lyfte även andra fördelar med läromedlet: att det finns återkommande faktarutor som eleverna kan ha nytta av, att det finns klurigheter att arbeta med samt matriser, en del bra extrauppgifter, praktiska uppgifter, spel och extra färdighetsträning. Att inte hela tiden behöva uppfinna nytt eller leta efter annat material är bra. ”Man betalar ju för att någon annan ska ha gjort det”, menade lärare B. Hen tyckte att det finns en hel del färdighetsträning i boken, vilket är bra. Lärare A däremot skulle ha önskat lite mer färdighetsträning och berättade att hen kompletterat med det på annat sätt eftersom färdighetsträning ”ligger till grund i det här problemlösningstänket”. Även när det gäller textmängden hade de två lärarna delvis olika åsikter. Lärare B ansåg att det är lagom långa läsuppgifter: man startar med mindre mängd text i början av kapitlet för att sedan utöka det, vilket kan vara en fördel för lättsvaga och/eller lågpresterande elever. Lärare A upplevde att boken innehåller många textuppgifter, vilket kan vara svårt för många elever, och menade att det hänger ihop med att författarna ville lyfta att inläringen skulle ske genom problemlösning.

Lärare B menade att en fördel med läromedlets upplägg var att samma arbetsområden återkommer varje år. ”I femman kan man relatera till det man gjorde i fyran och bygga vidare.

Det är bra för eleverna.” Inspirationsdelen i boken, med berättelser och uppdrag, nämndes som något positivt av lärare A.

Lärare C och D tyckte att *Singma matematik* ger trygghet genom att varje lektion är uppbyggd enligt en struktur och att det är ett väl utarbetat material. Lärare C: ”Det är varierande fast det är strukturerat. Eleven känner igen sig i varje lektion, den börjar och slutar på samma sätt. Man bygger lektionerna på ett väldigt tydligt sätt vilket är en fördel för elever som har svårigheter i matematik, med koncentrationen eller annat.” Lärare D: ”För mig som lärare är det ju en jättefördel att få använda ett material som någon verkligen har forskat fram utifrån olika vetenskapliga teorier och kokat ner det till en lektion. Det är ju inte bara att läsa en bok om vetenskapliga teorier och sen vet du precis hur du ska göra på en lektion. Det får jag hjälp med, den transformationen, så att säga.” Lärarna nämnde andra fördelar: mycket bildstöd, att man pratar mycket om matematik och tillsammans utforskar och sätter ord på sin kunskap, att alla arbetar med samma uppgift, att materialet innehåller en stor bank med laborativt material att skriva ut från den digitala resursen samt att man som lärare inte behöver lägga tid på att planera lektionen eller komma på problemen själv utan istället kan använda tiden till att exempelvis sätta sig in i användandet av konkret material. Lärare D uttryckte ytterligare en fördel: ”Man använder inte bara läraren som resurs utan även materialet och kompisarna som lärostöd.”

Lärare C ansåg att läromedlet innehåller tillräckligt med färdighetsträning. Det innehåller inte så många uppgifter men man jobbar djupare med färre antal uppgifter och lyfter olika sätt att göra samma uppgift på. Lärare D tyckte däremot att man kan behöva komplettera med mer färdighetsträning: ”Vi lägger ju mycket tid på att lyssna på varandra, problematisera, och det finns färdighetsträning till varje lektion men jag tänker att egentligen skulle man nog behöva öka den.”

7.2.3 Nackdelar med läromedlen

Lärare A tyckte att *Mattespanarna* kan vara lite rörig i strukturen, med olika layout på textdelarna och menade att det kan göra det svårt för en del elever att hänga med i vad som händer. Att kapitlen innehåller flera olika korta delmoment kan vara en nackdel: ”För en del elever blir det väldigt hastiga hopp mellan de här områdena, till exempel tallinjen, nästa sida jämna och udda tal, nästa sida positionssystemet, sedan talmönster, hälften och dubbelt. Lite repetition men det är ju många saker som ska gås igenom och sedan kommer en avstämning och sen tränar man.” Lärare A upplevde att boken ibland hastar igenom lite, och skulle som tidigare nämnts ha önskat mer färdighetsträning.

Lärare B menade att eftersom *Mattespanarna* ”har några år på nacken” behövde man tänka till kring vilka delar som saknas i läromedlet. Hen tyckte att nivån kunde vara lite låg på vad de testar: ”Det krävs inte mycket för att få ’godkänt’ på ett test för att gå vidare. Samtidigt, om de har svårigheter så hjälper ju inte en diagnos, då måste man ju sätta in insatser, titta på vad de behöver träna mer på, hur.” Även lärare B menade att texterna inte alltid är så tilltalande och att det kan vara för mycket, och för liten, text i faktarutorna. Det är svårt att få eleverna att använda dem.

Lärare C upplevde att *Singma matematik* är uppbyggd enligt en bra modell. Samtidigt kände hen att lärarhandledningens tydlighet kan göra att man som lärare inte behöver tänka så mycket: ”Om jag hade varit nyexad lärare, fått lärarhandledningen och gått kurserna så tror jag att jag hade tyckt: åh vad skönt här står det ju precis vilka frågor jag ska ställa till eleverna och hur jag ska göra. För mig som älskar matte så kan det ibland bli lite hämmande för att den

är så förpreparerad, varenda lektion bygger på att jag ska följa precis det som står där. Men det är ju egentligen för att det är så beprövat så jag ska väl luta mig tillbaka och njuta av det.” En nackdel med läromedlet, menade lärare C, är att man måste ”köpa hela konceptet”. Man bör gå utbildningen och sätta sig in i det, istället för att bara köpa läromedlet och tro att man kan förstå det genom att börja arbeta med det. Hen beskrev det som att det inte bara är ett läromedel utan även ett förhållningssätt; hur man förhåller sig till undervisningen och matematiken. En nackdel för eleverna är att de elever som är nya på skolan inte är vana vid strukturen och modellen, så där såg man att det kunde vara svårt innan de hade kommit in i det, vilket kunde ta några månader.

Lärare D såg inga nackdelar för sig som lärare med att arbeta med *Sigma matematik*: ”Man känner sig ju väldigt ödmjuk, man tänker ett land som presterar i topp i PISA efter PISA... Jag kan inte se några nackdelar för mig, det är ju bara att ändra om det är något jag inte skulle vilja ha på det sättet. Det känns verkligen som ett dukat bord där jag bara kan plocka russen.” Lärare D skulle även, som tidigare nämnts, ha önskat något mer färdighetsträning i läromedlet. Hen berättade att det i början kan ta för lång tid när man arbetar med det gemensamma problemet så att det blir för lite tid kvar till de andra delarna. Det är något som man måste arbeta med; att få upp hastigheten: ”Det kommer man in i, man får lära sig att väga vem som ska få säga vad, när man är nöjd och så.”

7.2.4 Att möta elever och stötta lärandet

Lärare A och lärare B menade att läromedlet *Mattespanarna* möter elevers olika nivåer genom de olika spåren som man kan välja mellan efter att ha gjort diagnosen. Det finns även annat material man kan använda för att anpassa efter behov; bashäftet innehåller uppgifter på grundläggande nivå och lärarhandledningen innehåller en del extra uppgifter som man kan välja mellan. Båda lärarna ansåg att det med hjälp av läromedlet går att möta elever i behov av utmaningar. Lärare A: ”Det finns en del för de elever som tycker att det är lätt. Det går att ordna med detta material med hjälp av till exempel kluringar och ”rött” spår. Det är lättare att möta eleverna som kommit lite längre i matte.” Lärare B: Det svåraste spåret är riktigt bra, det klarar de inte utan att göra antaganden, prövningar, rita tabell.”

Lärare A och B var även överens om att läromedlet inte ger mycket hjälp när det gäller att möta elever som tycker att matematik är svårt. Det enklaste spåret i elevboken är för svårt för vissa elever. Lärare A: ”Jag tänker på de med specifika svårigheter. De som är på det gröna, enklaste spåret har ju en bra nivå. För elever som inte klarar den nivån måste man göra mycket anpassningar. Det är inte så många uppgifter på den nivån, den hoppar ju rätt snabbt. Du behöver annat material.” Lärare B: ”De som inte klarar den kursen, de som ligger på en ännu lägre nivå, då hjälper det ju inte vilket läromedel man har för man kan ju inte sänka sig hur lågt som helst i grundkursen.” Lärare B berättade också att motståndet kan vara starkt hos vissa elever mot att arbeta i en annan bok och att de hellre då arbetar i samma men skriver av kompiserna. Lärare A tyckte inte att det framkommer så tydligt i lärarhandledningen hur man kan stötta elever i svårigheter men att det ibland finns enkla tips på hur man kan tänka: ”Om eleven inte har automatiserat kan man använda *den* metoden, sådant finns ju lite grann. Men den ger inte utvecklade tips vid svårigheter.” Lärare A sammanfattade: ”Svårare att skala av, lättare att utmana. Lättare att möta eleverna som kommit lite längre i matte än tvärtom, med hjälp av detta material.”

Lärare B pratade om tidiga insatser: ”En del saker måste läras in utantill. Befästa vissa baskunskaper annars blir det jobbigt att hela tiden hålla på att räkna. Den grundläggande matten

är ju jätteviktig. Viktigt med tidig satsning. Sen när de kommer upp i fyran är det ofta matte i helklass 20–25 elever, jättetufft för dem att få hjälpen de behöver inom klassens ram.”

Lärare A berättade att de möter elever i behov av stöd med hjälp av anpassat material. En lektion i veckan är de två klasserna uppdelade i tre grupper med 15 elever vardera och då har de möjlighet att ta ut eleverna i små grupper och arbeta förberedande eller repetera, eftersom de då är två lärare. Lärare B berättade att även hen försöker nivåanpassa material till ett antal elever samt att de ofta är två mattelärare och en resursperson på lektionerna, vilket gör att de ibland kan dela upp eleverna i tre olika stora grupper, för att på så sätt försöka möta och stötta eleverna.

Lärare C och D tyckte att *Singma matematik* möter elever med olika behov på ett bra sätt. För de elever som behöver, finns utmanande uppgifter där man får sätta ord på sina tankar och vad som händer. Lärare C berättade att man kan utmana eleverna under genomgångar i startuppgifterna genom att ställa utvecklande frågor. ”Man kanske inte utmanar dem med fler uppgifter, matar på, utan mer fördjupar det vi gör, se samband...” Lärare D menade att elever som skulle behöva extra utmaningar kan triggas av att få en svårare bok. ”Så är det ju inte i *Singma* utan utmaningarna finns på varje lektion, i samma bok, och då blir det inte samma känsla.” Lärare D menade att det kan vara mindre motiverande för vissa elever att arbeta med samma uppgifter som de andra, även om det blir på en högre nivå. Att skriva ner sina tankar och argumentera för hur man har tänkt kan också vara en utmaning för vissa elever, som istället snabbt vill jobba vidare. Lärare D: ”Man har ju sett i Singapore att de som inte gör det får ju faktiskt sämre resultat sedan när de blir äldre, för att de inte vet hur man skriver ner sina tankar, så det jobbar vi jättemycket med.”

Lärare C tyckte att när det gäller att ge elever extra stöd så är det en fördel att läromedlet är så pass konkret och att man kan gå tillbaka och göra övningarna i läroboken flera gånger. Ibland kan det behövas extra genomgångar med elever. Både lärare C och D berättade att lektionsmodellen gör att under den stund då eleverna arbetar med ”Jag övar” är de flesta elever självgående och då kan man som lärare sätta sig med en mindre grupp, få en överblick över vad de tycker är svårt, fortsätta prata och göra en uppgift i taget tillsammans. Lärare D: ”Det här läromedlet kan absolut möta dem i ettan och tvåan men det är ju också så att man redan då ska sätta in resurser. Antingen att det finns en extra lärare i klassrummet eller att man jobbar parallellt i en liten grupp. Det går inte att tro att man ska ha helklass och att det finns något läromedel som kommer att få med dessa elever. Jag har inte mött något läromedel med större bredd än *Singma*.” Lärare D förklarade även att fördelen för elever med exempelvis koncentrationssvårigheter är att det är så pass strukturerat, man vet vad som förväntas av en och man ”går alltid i mål” på lektionen, eftersom målbilden är tydlig.

Lärare C berättade att vid två matematiklektioner i veckan arbetade en speciallärare i matematik med en mindre grupp elever som behöver extra stöd. Även specialläraren hade gått utbildningen i Singaporematte och undervisade eleverna utifrån samma modell och med samma läromedel men i ett lugnare tempo och med hjälp av sin specialkompetens. Lärare D berättade att de hade en grupp elever som fortfarande hade svårigheter inom talområdet 0–20. Denna grupp arbetade en annan lärare med under veckans tre lektioner, och eftersom hen inte hade gått utbildningen i Singaporematte valde hen att arbeta med ett annat läromedel.

7.2.5 Representationsformer

Lärare A tyckte att *Mattespanarna* har mycket bildstöd i boken men att layouten är rörig: ”Text, bild, ord, pratbubblor, exempel, mycket information och intryck, eleven kan inte

sortera och ser inte skogen för alla träd.” Lärarhandledningen har lite exempel på praktiska/ laborativa övningar man kan göra, men inte jättemycket, menade lärare A. ”Det handlar mycket om att diskutera och resonera och så där men det kunde ju gott ha varit lite mer praktiskt. Det vore roligt med lite mer inspiration till sådana saker.” I undervisningen tog lärare A fram material i relation till det som de tränade på, till exempel klockor när de arbetade med tid, vid genomgångar och enskilt arbete. Materialet var tillgängligt för alla och fanns att hämta i en korg. Eleverna kunde ha vissa ”lathundar”, exempelvis i multiplikation, men annars hade de inget eget material.

Lärare B ansåg att *Mattespanarna* inte inbjuder särskilt mycket till att använda laborativt material eller tydliggör övergången mellan det konkreta och det abstrakta. Däremot föreslår den ofta att man ska rita en bild, göra en tabell eller använda en tallinje. Att använda pennan kan vara ett sätt att konkretisera, menade lärare B, som ofta själv ritar med eleverna för att de ska få träna på att rita, skriva och lära sig att anteckna, och fortsätter: ”Sen är det klart att i *sannolikhet* är det bra att testa det, till exempel med en tärning, ha en påse med kulor i olika färger och få prova, men om boken föreslår detta, nja..? Sen är det ju mellanstadiet, då är det mer abstrakt.” Läromedlet fokuserar på det abstrakta och det halvabstrakta/visuella och kanske förväntas eleverna redan vara ”klara” med den konkreta nivån, menar hen, och funderar över om man kanske inte ska släppa det konkreta/laborativa så fort utan istället arbeta mer med det även i årskurs 4–6. ”Jag hade en föreläsare en gång som sa att när man skriver med penna så gör det ett spår i hjärnan. Det blir det inte om man trycker på en tangent. Att ha en klocka, titta, vända och vrida – det gör kanske spår i hjärnan? Vissa elever får nog sluta för tidigt med det.” I undervisningen såg lärare B till att lämpligt material fanns att tillgå för eleverna i en mattelåda och tyckte att det var viktigt att alla elever hade tillgång till det så att det inte blir en extra anpassning för vissa.

Lärare C menade att hen absolut känner att *Singma matematik* inspirerar till att använda konkret material och olika representationsformer. I lärarhandledningen står det tydligt vilka material som ska tas in varje lektion. Plockmaterial ska alltid finnas tillgängligt för alla elever. Annat material togs in när det blev aktuellt, till exempel klockor. Konkreta/visuella material visar sig även för eleverna i elevböckerna och i de digitala tjänsterna till lärarhandledningen.

Lärare D berättade att i *Singma matematik* ingår arbete kring olika representationsformer (CPA) i den teoretiska grunden. Varje lektion börjar med en konkret laboration och lite senare väljs några olika elevlösningar ut för att visas upp och diskuteras: ”Vi försöker ju alltid få så många olika lösningar som möjligt, minst tre. De första lösningarna försöker vi att de ska vara så konkreta och visuella som möjligt och sedan har man ju alltid några elever som är mer abstrakta, så då får du ju som elev kanske tre lösningar på samma problem.” I lärarhandledningen står det alltid förslag på vilka konkreta material som ska användas och bildstöd finns alltid med i läromedlet. I de första övningarna som eleverna tränar vidare på får de bildstöd, sedan minskas det successivt och i slutet av varje lektion arbetar de med abstrakta uppgifter. Lärare D berättade att det i klassrummet fanns en hylla med matematikmaterial som eleverna kunde hämta ifrån och att hen alltid lade ut material färdigt till eleverna. Allt material räckte inte alltid till alla så ibland fick läraren prioritera och ge vissa material till vissa elever.

8 Resultatdiskussion

I denna studie har två matematikläromedel för årskurs 4 analyserats, med fokus på centrala idéer, möjlighet att vara en resurs för läraren, hur elevernas olikheter möts och lärandet stötts, samt hur olika representationsformer används. Fyra lärare har intervjuats om sina tankar och erfarenheter av att använda dessa läromedel. Utifrån textanalysen och intervjuerna diskuteras här valda delar av det sammanlagda resultatet. Med utgångspunkt i studiens syfte och resultat har tre övergripande rubriker valts; (1) *centrala idéer samt möjlighet som lärarresurs*, (2) *att möta elever och stötta lärandet* samt (3) *ur specialpedagogisk synvinkel*. Under den sistnämnda rubriken lyfts några tankar kring vad detta kan innebära i arbetet som speciallärare med specialisering mot matematikutveckling.

8.1 Centrala idéer samt möjlighet som lärarresurs

De två matematikläromedlen lyfter sina centrala idéer och teoretiska grunder på mycket olika sätt och ger därmed dessa olika stor betydelse. Mattespanarna nämner *en* forskare, vars tankar och forskningsresultat ligger till grund för läromedlet. I samråd med P-O Bentley har författarna utgått från Bentleys analys av TIMMS 2007 (Bentley, 2008), som visade att svenska elever hade en relativt god procedurell förståelse, medan det konceptuella var svårare. Beräkningsstrategier fanns men användes i fel sammanhang, eftersom ingen djupare förståelse fanns och kunskapen därför ofta inte kunde överföras från en kontext till en annan. Även förståelsen av matematiska begrepp behövde utvecklas, för att kunna underlätta överföringen mellan kontexter (Bentley, 2008; Bentley & Bentley, 2011). En grundtanke i Mattespanarna var därför att eleverna skulle få mer kunskap om och förståelse av begrepp samt när olika metoder ska användas. I lärarhandledningen nämns att antalet räknemetoder är begränsade för att eleverna ska känna sig trygga med dessa samt att fokus ska kunna läggas på förståelse. Det är tydligt i läromedlet att Mattespanarna valt uppställning och omgruppering som skriftliga strategier, och valet av dessa motiveras utifrån Bentleys forskning. Dessutom förtydligas att de två strategierna passar bäst under olika förutsättningar.

Singma matematik lyfter i den inledande delen av lärarhandledningen att undervisningen är forskningsbaserad, nämner ett *flertal* forskare/matematiker, och betonar att deras arbete och tankar har varit en stor inspiration. Till stor del märks detta tydligt genom hela läromedlet: Bruners tankar kring representationsformer och bildens betydelse (Harden & Stamper, 1999), Dienes idéer om att elever ska vara aktiva och arbeta undersökande med laborativt material (Rystedt & Trygg, 2010), Skemps forskning kring betydelsen av den relationella (konceptuella) förståelsen vilket kräver en djupare förståelse för begrepp och idéer (Skemp, 1976), samt Pólyas struktur för problemlösning (Pólya, 2003). Lärarhandledningen till Singma matematik visar tydligt läraren hur varje lektion bör gå till; vilka material/representationsformer som ska användas och hur, hur eleverna ska stötts i det undersökande arbetet, förslag på frågor att ställa för att leda samtalet vidare i rätt riktning och utmana eleverna, hur genomgångar kring viktiga begrepp och strategier bör göras och vad som ska visas och förklaras. Varje lektion är uppbyggd på liknande sätt. Singma matematik är en lärarhandledning som "talar *genom* läraren", vilket enligt Koljonen (2015) innebär att de förutbestämda lektionerna implementeras av läraren. Det ger ett tydligt stöd vid nya tankar och strategier och är således en möjlighet till lärande och utveckling även för läraren (Van Steenbrugge & Ryve, 2018). Lärare C och D uppskattade det beprövade materialet och "tyngden i lärandeteorierna". De berättade att de använde lärarhandledningen till varje lektion: för att förbereda sig och för att följa lektionsupplägget. De båda skolorna där C och D arbetade hade tidigare bestämt sig för att satsa på Singma matematik. De två lärarna hade varit på flertalet inspirerande föreläsningar och utbildningar kring materialet och arbetssättet, och då träffat författarna. På grund av detta var

de väl insatta i hur läromedlet var tänkt att användas och vilket förhållningssätt till lärande och undervisning detta innebar.

Vid intervjuerna med lärare A och B framkom det tydligt att läromedlet Mattespanarna användes som ett stöd och en tipsbank av dessa. De tittade i lärarhandledningen ibland, utan att ha studerat och satt sig in i denna i någon större utsträckning, och valde ut vissa delar. Framför allt lutade de sig mot sin erfarenhet som lärare och tolkade/ använde läromedlet utifrån detta. Ibland kompletterades Mattespanarna med andra material eller delar av läromedel. En anledning till detta kan vara att dessa lärare inte själva aktivt hade valt läromedlet; det fanns där sedan ett antal år tillbaka när lärare A och B började arbeta på sina respektive skolor. Att Mattespanarna funnits sedan 2011 och inte uppdaterats utifrån reviderade kursplaner gjorde att lärarna funderade på att så småningom byta ut läromedlet.

Lärare som använder olika sorters läromedel visar upp olika undervisningsstrategier, enligt Fan och Kaeley (2000), och påverkas av det pedagogiska budskapet. Således innebär detta att Mattespanarna i större utsträckning ”talar *med* läraren”. Koljonen (2014) beskriver detta som att de grundläggande idéerna kommuniceras, läraren blir ledd och erbjuden en källa att ta idéer samt aktiviteter från.

Det finns en skillnad i lärarhandledningarnas intentioner att styra lärarens arbete, där Singma matematik i mycket större utsträckning instruerar hur läraren *bör* göra. Därmed kan upplevelsen bli att Mattespanarna ger läraren ett betydligt större frirum, och man kan själv välja hur mycket och på vilket sätt lärarhandledningen och övriga delar av läromedlet ska användas. Detta kan ses både som något positivt och något negativt. En ”friare” lärarhandledning (som talar *med* läraren) kan innebära ett arbete som upplevs som mer utmanande med ökade möjligheter att prova egna idéer, medan en mer styrande (som talar *genom* läraren) kan ge en ökad känsla av trygghet, framför allt om läraren är relativt ny inom yrket. Lärarna C och D såg fördelarna med att Singma ger trygghet och struktur och nämnde även att man som lärare inte behöver lägga tid på att planera lektionen, vilket lämnar tid till annat. Lärare C kunde dock berätta att läromedlet ibland kunde kännas hämmande för hen, eftersom hen inte behövde planera och tänka till själv. Lärare D upplevde det bara som positivt med ”ett dukat bord”. Ett läromedels möjlighet att stötta och underlätta lärarens arbete bekräftas av Johansson (2009).

En grundläggande tanke som betonas i Mattespanarna är att den är uppbyggd kring en spännande historia för att motivera och skapa intresse, samt att det är viktigt med matematiska diskussioner och att lära av varandra. Även om det inte nämns i läromedlet är det tydligt att Vygotskij och det sociokulturella perspektivet har funnits med vid skapandet av Mattespanarna, exempelvis genom att författarna förklarar att lärarhandledningen ska vägleda lärarna i hur man kan tillvarata elevernas tankar för att skapa tillfällen att lära av varandra, samt att undervisningen ska innehålla gemensam problemlösning, där lärare och elever tillsammans diskuterar matematik. Säljö (2017) beskriver hur ny kunskap, enligt det sociokulturella perspektivet, approprieras av eleverna och växer fram genom ett samspel mellan lärare och elever. Läraren är en medierande resurs som med hjälp av olika medierande artefakter, exempelvis i form av en lärobok eller ett laborativt material, kan stötta eleverna i att se samband och öka förståelsen. I hur hög grad den spännande deckarhistorien eller tankarna om matematiska samtal och det gemensamma lärandet påverkar undervisningen när man har Mattespanarna som läromedel är säkerligen mycket varierande, beroende på hur läraren väljer att använda lärarhandledningen och hur den tolkas, utifrån lärarens tidigare erfarenheter.

Läromedlet Singma matematik har en annan bakgrund än Mattespanarna och andra mer traditionella läromedel i Sverige. Att Singma har med sig en delvis annorlunda syn på undervisning är tydligt. Enligt Bentley och Bentley (2011) fokuserar undervisningen i Ostasien på konceptuell förståelse och eleverna tränas i att tillämpa matematisk kunskap i nya sammanhang. Lärare C och D betonar i intervjuerna att läromedlet innebär ett annat förhållningssätt och tänkande kring lärande och undervisning. Det kan även tydligt utläsas i lärarhandledningen, både vad gäller upplägg av lektioner och hur representationsformer visas och kopplas ihop. Arbetet fokuserar till stor del på gemensamt utforskande utifrån förutbestämda, utprovade uppgifter som är avskalade och elevnära, precis som illustrationerna vilka inte innehåller många onödiga detaljer. Varje lektion i läroboken innehåller få uppgifter, eftersom eleverna ska arbeta med varje uppgift under en längre tid. Fokus ska ligga på förståelse och utforskande istället för på att hinna med många uppgifter. Matematiska samtal, gemensamt utforskande samt att lära av varandra är viktiga delar i Singma. I lärarhandledningen betonas att man har tagit intryck av Vygotskij och hans tankar. Således finns i båda läromedlen en koppling till det sociokulturella perspektivet, även om kopplingen endast uttalas i Singma, och tydligare kan ses i Singmas förutbestämda lektionsstruktur.

Trots att läroböcker i matematik används i stor utsträckning inom den svenska skolan använder inte svenska lärare lärarhandledningar särskilt mycket (Ryve m.fl., 2016), vilket intervjuerna av lärare A och B bekräftar. Mattespanarnas lärarhandledning uttrycker vikten av att stärka elevernas konceptuella kunskap och förståelse, och i samband med detta utveckla förståelsen av matematiska begrepp. Detta finns som tidigare nämnts även i Singma, och då i ännu större omfattning. Även Skolverket (2017) lyfter betydelsen av att kunna välja och använda utvecklingsbara metoder som är lämpliga för den aktuella situationen. Dessutom betonar både Mattespanarna och Singma betydelsen av det matematiska samtalet och det gemensamma arbetet kring problemlösning, vilket bekräftas av Knutsson (2019) och Malmer (2002). Om svenska lärare inte i någon större utsträckning följer lärarhandledningen kan det möjligtvis bidra till att intentionen att öka den konceptuella förståelsen delvis går förlorad, om det därmed för med sig att den enskilda räkningen ökar, vilket kan vara en risk. Då kan det bli större fokus på lärande som *tillägnande*, med synen att kunskap är ett resultat av den enskildes aktiva uppbyggande av samband mellan olika begrepp och metoder (Skott m.fl., 2010). Lärares erfarenhet och yrkeskunnande är av stor betydelse och borde enligt Matematikdelegationen (2004) lyftas fram mer. Den alltmer utbredda tysta räkningen har en negativ påverkan på elevers kunskapsutveckling i matematik (Matematikdelegationen, 2004; Skolinspektionen, 2020) men det kan motverkas av god interaktion i utforskande samtal under aktiv ledning av en lärare. Då innebär lärandet i större utsträckning ett *deltagande* i en social och lärande gemenskap, där språket som ett medierande redskap har stor betydelse (Skott m.fl., 2010).

Eftersom både lärare A och B, som arbetade med Mattespanarna, var erfarna lärare kunde de använda sina erfarenheter och sin drivkraft för att hitta sätt och tillfällen att arbeta i grupperna med gemensamma matematiska samtal, och använda olika representationsformer för att öka förståelsen. Dock kan valet att inte följa lärarhandledningen möjligtvis innebära att detta inte sker i samma utsträckning och på det sätt som läromedelsförfattarnas intentioner initialt var. Singma matematik visar tydligt att läraren ska följa de detaljerade instruktionerna. Gemensamma diskussioner prioriteras för att även varvas med stunder av egen räkning, i en återkommande struktur. På så sätt stärks möjligheten att läromedlets intentioner att arbeta med konceptuell förståelse approprieras av läraren.

8.2 Att möta elever och stötta lärandet

Enligt det sociokulturella perspektivet sker lärande i sociala sammanhang (Säljö, 2017). Mattespanarna möter eleverna genom att utgå från en spännande deckarhistoria och vill på så sätt motivera eleverna till att lära sig och använda matematiska begrepp och strategier. Tanken är att eleverna genom att delta i matematiska samtal kan lära av varandra och utveckla förståelse och kunskap. I Singma matematik bygger lektionerna på en återkommande struktur med elevnära och utvecklande uppgifter, där gemensamma samtal är en naturlig del. På så sätt kan ett gemensamt lärande ske och den enskilde eleven kan få stöd att utvecklas utifrån där hen befinner sig. Liknande tankar finns alltså i de båda läromedlen. Malmer (2002) menar att det är viktigt att skapa inlärningssituationer där ord behövs, för att kunna bygga upp ett väl fungerande ordförråd. Kommunikationens didaktiska kvalitet är avgörande för inläringen, enligt Löwing (2006). Lärarens egen kunskap om undervisningsinnehållet är viktigt och en lärarhandledning som talar *genom* läraren kan därför ha större möjligheter att stötta och utveckla en lärares kompetens, lyfta fram viktiga poänger eller påminna om viktiga delar. På så sätt kan möjligheten öka att eleverna i större utsträckning får till sig strategier för hur man kan tänka vid en uppgift och vad man ska lära sig, istället för endast instruktioner om vad man ska göra. Dessutom är det viktigt att läraren tar reda på vad eleverna kan och förstår, samt anpassar undervisningen till deras varierande förförståelse (Löwing, 2006). Då ökar möjligheten att kunna möta dem på en bra nivå.

Lärarhandledningens förutsättningar, samt lärarens val och möjlighet att i olika grad låta lärarhandledningen tala *med* eller *genom* sig, kan påverka undervisningen och dess resultat. Genom Singma får läraren stöd med vad hen ska göra och säga och hur hen kan stötta elever i behov av stöd eller utmaningar. Lärarhandledningen berättar tydligt hur genomgångar av nya begrepp eller strategier ska (eller kan) gå till, vilka frågor som ska ställas, vilket material som ska användas och hur elever i behov av stöd eller utmaningar ska mötas. Lärare C och D var överens om att Singma möter elever med olika behov på ett bra sätt. Det finns utmanande uppgifter för den som behöver utmanas och möjligheter att stötta den som tycker det är svårt. När eleverna arbetar med "Jag övar" finns utrymme att arbeta i mindre grupp med de elever som behöver ytterligare genomgångar och stöttning. Tydligheten och strukturen i läromedlet kan ge många elever en trygghet och förutsägbarhet i arbetet. Holgersson och Wästerlid (2018) bekräftar att många elever behöver extra tid och stöd för att utveckla förståelse inom olika delar, med hjälp av konkreta erfarenheter och genom att få sätta ord på det som de gör.

Singma matematik är tydlig när det gäller vilka svårigheter och missuppfattningar som kan finnas till ett visst lektionsinnehåll, samt hur de kan förebyggas. Lärarhandledningen innehåller, kopplat till varje lektion, konkreta råd kring hur läraren kan/bör stötta elever i behov av stöd. Det kan handla om att ställa vissa frågor, hjälpa dem att jämföra eller att använda vissa material. Även här är läromedlet tydligt med att det talar *genom* läraren. På så sätt kan läraren stöttas i att utveckla sitt sätt att möta eleverna, mediera kunskap och stötta elevernas lärande.

Lärare A och B ansåg att de med hjälp av Mattespanarna kunde möta elevers behov av utmaningar. Det svåraste spåret och övriga utmanande uppgifter är väl anpassade för detta. Lärarna menade dock att det inte var lätt att möta elever i behov av stöd utifrån läromedlet. De var överens om att det fanns elever som inte klarade av det enklaste spåret, utan behövde stöd på annat sätt, vilket kunde vara i form av ett annat anpassat material. Mattespanarna möter alltså elever på olika nivåer genom att de arbetar med olika spår efter att ha gjort en diagnos. Detta är ganska vanligt att läromedel på detta sätt ger lärarna stöd för att möta behovet av att individualisera (Johansson, 2011). Detta kan innebära en kombination av fördjupningsindividuali-

sering, som betyder att uppgifterna anpassas efter elevernas förutsättningar (även om det här kanske mest handlar om att eleverna styrs in på redan färdiga nivåer), samt hastighetsindividualisering där eleverna arbetar på i sin egen takt och hinner olika långt (Bentley & Bentley, 2016). En nackdel med detta kan vara att det blir svårare för läraren att ha genomgångar i helklass och att en del elever inte hinner prova på alla moment (Johansson, 2011). Singma arbetar i större utsträckning med fördjupnings-individualisering, eftersom många uppgifter kan arbetas med på olika nivåer, men även här kan det ses som att en viss hastighetsindividualisering förekommer, exempelvis när några elever får ytterligare genomgångar och repetition av redan genomgångna moment, medan andra arbetar vidare i övningsboken. Dock handlar det inte om att de som arbetar vidare ska hinna med många uppgifter. Istället ska de utmanas på en annan nivå med att exempelvis argumentera för lösningar eller förklara hur de har tänkt. Det finns fördelar med båda varianterna av individualisering men utifrån det sociokulturella perspektivet är det en stor vinst att låta eleverna arbeta med samma uppgift, fast med möjlighet till olika nivåer utifrån den enskildes proximala utvecklingszon. I det gemensamma samtalet och utforskandet kan läraren eller en annan elev ge stöttning och vägleda i användandet och förståelsen av olika kulturella redskap (Säljö, 2017).

Mattespanarnas lärarhandledning beskriver ibland hur elever i matematiksvårigheter kan mötas. Det kan exempelvis vara tips om att låta elever som tycker räkning är svårt få använda pengar. Dock menar Mattespanarna att eleverna ska få hjälp att automatisera räkningen snarast, utan att ge stöd i hur det kan gå till. Eleverna kan även uppmuntras att rita eller göra en tabell. Lärare A och B var överens om att lärarhandledningen ibland ger enklare tips men inte utvecklar stödet. För att hitta sätt att stötta vissa elever fick lärarna använda sin erfarenhet och ibland försöka hitta egna lösningar.

De fyra lärarna arbetade med olika organisatoriska och pedagogiska lösningar för att möta och stötta eleverna. Lärare A och B hade möjlighet att vissa lektioner dela upp klassen; antingen för att de skulle få möjlighet att arbeta i mindre grupper med en lärare per grupp, som då kunde ge mer stöd, eller att eleverna fick vara i en liten grupp under en del av en lektion för att arbeta med förförståelse eller repetition. Lärare C och D behöll i större utsträckning eleverna i en grupp, även om arbetssättet i Singma innebär att eleverna i relativt stor utsträckning arbetar uppdelade i exempelvis par. Dock arbetade några elever i dessa klasser i mindre grupper där de fick mer stöttning av en lärare/speciellärare och fick möjlighet att arbeta i ett lugnare tempo och utifrån sina förutsättningar. Trots detta ansåg lärare D att hen inte mött något läromedel med större bredd än Singma, och menade att det inte finns något läromedel som i helklass kan möta alla elever.

Olika förhållningssätt och perspektiv på lärande ger olika sätt att undervisa och kan innebära olika möjligheter att möta elever. Att arbeta utifrån lärande som *tillägnande* kan innebära att elever till stor del lämnas själva med att försöka utveckla sin förståelse och sitt lärande. Med hjälp av stödet från den sociala gemenskapen och genom språklig mediering, kan en individuell förståelse av begrepp byggas upp, vilket innebär en syn på lärande som *deltagande* (Skott m.fl., 2010). Utifrån denna syn på lärande är det en styrka hos ett läromedel att fokusera på gemensamma matematiska samtal, där eleverna får sätta ord på sina tankar (Holgersson & Wästerlid, 2018) samt ett utforskande med stöd av olika representationsformer.

8.3 Representationsformer

Betydelsen av att använda olika representationsformer i matematikundervisningen bekräftas av flera forskare och matematiker. Exempelvis ger tillgången till flera olika representations-

former för samma matematiska begrepp en mer utvecklad och funktionell begreppskunskap, vilket bidrar till en starkare problemlösningsförmåga (Karlsson & Kilborn, 2015). Barnets grund till matematisk medvetenhet bör formas genom utforskande, laborerande och lek, enligt Ljungblad (2012). Utifrån uppgiften som ska lösas bör eleverna ha tillgång till material som kan symbolisera eller visualisera, som ett stöd för tänkandet, samt stöd av exempelvis en lärare som kan hjälpa till med att mediera lärandet. Enligt exempelvis Moyer (2002) kan ett material fungera som ett verktyg vilket överför abstraktioner till en ny form som möjliggör för elever att göra kopplingar mellan ny och tidigare kunskap.

De två läromedlens tankar kring användandet av olika representationsformer i undervisningen skiljer sig åt, framför allt när det gäller laborativt material. I Mattespanarna förekommer inte laborativt material i någon större utsträckning och utifrån hur det lyfts i lärarhandledningen kan sådant material ses som något extra, som man tar fram för att få omväxling i arbetet eller som ett stöd till de elever som behöver stöttning. En lista med förslag på laborativt material finns inledningsvis i lärarhandledningen och även några exempel på laborativa uppgifter kopplade till olika områden förekommer. Förslag på material finns också till de olika upplagen i elevboken. Dock är det i princip bara till eleverna som arbetar med spår 1 som laborativt/konkretiserande material föreslås. Förklaringar eller uppmaningar till hur materialen ska användas för att ge en ökad förståelse förekommer i varierande grad. Läromedlet ”talar *med* läraren” och en tolkning som här kan göras är att läraren förutsätts ha vissa kunskaper med sig kring hur material kan användas och hur kopplingar mellan olika representationsformer kan göras för att stötta elevernas lärande, eller att möjligtvis att läromedlet vill ge läraren en frihet i att hitta sina egna lösningar. Troligtvis förutsätter Mattespanarnas författare att de flesta elever i årskurs 4, efter att i lägre årskurser ha arbetat mer laborativt och med kopplingar mellan fler representationsformer, är redo att fokusera mer på det visuella och det abstrakta.

I Singma matematik är användandet av laborativt material och visuella verktyg, för att stärka taluppfattningen och förståelsen av begrepp, något som tydligt uttalas och som genomsyrar läromedlet. Även kopplingen mellan olika representationsformer betonas och i lärarhandledningen visas tydligt hur läraren ska/kan visa och förklara för att stötta och förtydliga kring övergången mellan dessa. Det är tydligt att det laborativa och visuella har en stor betydelse i läromedlet, inspirerat av de forskare/matematiker som läromedlet nämner: exempelvis Bruner och hans tankar kring representationsformer och bildens betydelse, samt Dienes tankar kring ett elevaktivt arbetssätt med olika konkreta modeller (McLeod, 2019; Rystedt & Trygg, 2010). I Singma matematik förekommer det laborativa mer eller mindre under varje lektion. Även fastän detta läromedel är tänkt för årskurs 4 ska eleverna under varje lektion ha tillgång till exempelvis plockmaterial, och laborativa inslag finns med koppling till det aktuella delmålet. Vilka material som ska användas vid en lektion, och hur, finns beskrivet. Läromedlet berättar även hur läraren med hjälp av laborativt och visuellt material kan undervisa elever som tycker att matematiken är svår. Läromedlet inbjuder tydligt till att ”tala *genom* läraren”. Genom att använda olika representationsformer och material på ett genomtänkt sätt minskar risken att man använder laborativt material för att ”ha rolig matte”, istället för som en integrerad del i undervisningen. Moyer (2002) menar att det är en utmaning att använda material på ett sätt som är effektivt och ger kopplingar med elevernas egna inre representationer. Material ska inte användas som ett *mål* utan som ett *medel* för att nå ett mål, förtydligar Clements (1999).

Sigma matematik innehåller många illustrationer, kopplade till uppgifterna i elevboken. De är oftast ganska avskalade och innehåller sällan onödiga information. Förutom användningen av laborativa material förespråkas *blockmodellen* (Fong & Lee, 2009). Vissa likheter finns

mellan denna modell och användandet av en tom *tallinje*. Tanken är att eleverna efter att ha reflekterat över hur information kan representeras i block ska kunna visa den som en serie matematiska symboler.

I Mattespanarna finns många detaljrika bilder som kan användas som hjälpmedel vid uträkningar och för att öka förståelsen. Läromedlet föreslår ofta användandet av några visuella verktyg, såsom att rita en bild, göra en tabell eller att använda en *tallinje*. Frisk (2019) beskriver hur en tallinje kan användas som ett verktyg för att visualisera elevens tankar eller vara ett stöd för det matematiska tänkandet genom att hjälpa till att strukturera tal. Detta kan naturligtvis även beskriva tankarna bakom blockmodellen. Bruner lyfte vikten av en progression mellan de tre representationsfaserna (handlingsbaserad, bildmässig och symbolisk) och betonade betydelsen av att ha en bildmässig representation att falla tillbaka på om det senare skulle uppstå svårigheter på den symboliska nivån (Rystedt & Trygg, 2010). Frisk (2019) förtydligar vikten av visuella representationer framför allt som stöd för utforskande matematiksamtal.

Arbete med konkret eller laborativt material kan utföras mekaniskt, utan förståelse, menar Ljungblad (2012). Detta kan naturligtvis även gälla för olika visuella representationer. Hon menar att det är viktigt att reflektera kring hur vi kan stötta elever i att ta steget mellan det konkreta och det abstrakta. Något att vara uppmärksam på som lärare kan därför vara att inte "lämna eleverna ensamma" med visuella eller laborativa redskap, utan att istället använda och laborera med dessa i gemensamma matematiska samtal för att stärka elevernas förståelse av och förtroendet med dem, och de kopplingar de kan ge mellan olika representationsformer, innan eleverna själva får arbeta vidare med dessa. Eftersom Mattespanarna är ett läromedel som "talar *med* läraren" i stor utsträckning, och kan användas som en tipsbank eller inspirationskälla, innebär det ett ansvar för den enskilde läraren att, med hjälp av det stöd man väljer att använda läromedlet som, samt andra resurser som läraren har tillgång till, möta eleverna och stötta deras lärande genom att skapa/tydliggöra kopplingar mellan det konkreta, visuella och abstrakta. Mattespanarna innehåller alltså en del förslag och idéer om hur man kan arbeta med förståelse och använda olika representationsformer (framför allt det visuella), som man som lärare kan använda om man väljer att sätta sig in i lärarhandledningen och dess tankar.

8.4 Ur specialpedagogisk synvinkel

Tidiga insatser är viktiga när en elev är i matematiksvårigheter, för att förhindra att sårbarheten förstärks och växer. Genom att hitta tidiga missförstånd och arbeta med åtgärder kan senare svårigheter förebyggas. Eleverna behöver stöttning för att hitta strukturer som de kan bygga vidare på, samt strategier för att kunna utvecklas och prova nya nivåer inom matematiken (Neuman, 1989). Det är en utmaning att ta steget från det konkreta till att förstå att det även representerar något abstrakt. Därför behövs ofta stöttning och vägledning så att det kan förankras hos eleven och lärandet kan fortsätta (Ljungblad, 2012). Det finns en risk att laborativa material används för att kortsiktigt hjälpa elever att lösa uppgifter och få fram svar. Material bör istället användas för att, med stöd av en lärare, stötta eleverna så att de kan utveckla förståelse och kunna gå vidare i sitt lärande (Scherer m.fl., 2016).

Som pedagoger har vi ett stort ansvar för att eleverna ska kunna ta till sig det som krävs för att uppnå kunskapskraven i matematik. Att välja lämpliga material och läromedel och använda dem på ett medvetet sätt är en viktig del i detta. Min upplevelse är att läromedel ofta används "för att detta är det läromedel vi har på skolan" men även att mycket positivt har hänt inom matematikundervisningen under de senaste åren i Sverige, med exempelvis insatser som

”mattelyftet”, tankar kring ”kooperativt lärande” och utveckling av nya läromedel. Kanske är även synen på matematik på väg att ändras, från att ha setts mer som ett mål (att ”kunna matematik”) till att mer ses som ett redskap (att användas i olika situationer/sammanhang i livet)? Tidigare internationella undersökningar av svenska elevers kunskaper har, som tidigare nämnts, visat på brister i den konceptuella förståelsen, vilket innebär en svårighet att överföra kunskap från en kontext till en annan (Bentley, 2008). Möjligtvis kan en förändring av synen på matematik och matematikundervisning långsamt visa sig som ökade resultat i PISA-undersökningarna.

En väl fungerande samverkan mellan exempelvis matematiklärare och speciallärare är av stor betydelse för undervisningen, menar Ljungblad (2016). Endast en av de fyra lärarna beskrev ett praktiskt samarbete med en speciallärare, där en mindre grupp elever undervisades av specialläraren under ett par lektioner i veckan. Naturligtvis behöver inte ett samarbete mellan ämneslärare och speciallärare innebära att specialläraren ”plockar ut” elever ur klassrummet för att bedriva specialundervisning med dem. Det kan lika gärna innebära att hen på olika sätt deltar i undervisningen i den stora gruppen och/eller att ämneslärare och speciallärare samverkar kring planering av ämnesområden, lektioner, extra anpassningar, särskilt stöd och kring inköp och användandet av olika läromedel. Både specialläraren och matematikläraren kan i dessa samtal bidra med sina kunskaper och erfarenheter, utifrån sina delvis olika professioner, och därmed gemensamt utveckla undervisningen för att kunna möta och inspirera alla elever; även de som är i någon form av matematisk sårbarhet.

Det läromedel som används kan säkerligen till viss del påverka på vilket sätt specialundervisning eller annat stöd ges, utifrån hur läromedlet bidrar till att bjuda in eleverna i undervisningen och framför allt stötta läraren i detta. Singma har i detta en fördel med sin tydlighet i att leda läraren genom undervisningen och ge stöd till elever, genom att exempelvis använda och förtydliga kopplingar mellan olika representationsformer, samt med strukturerade matematiska samtal. Dock kan en lärare alltid, utifrån sina erfarenheter, kunskaper och de resurser som finns, välja att använda ett läromedel på sitt eget sätt. Även Mattespanarna lyfter betydelsen av gemensamma matematiska samtal, och visar på möjligheter för detta. Eftersom detta läromedel i större utsträckning används som en tipsbank samt delar upp eleverna på olika nivåer för att individualisera, kan det innebära en ökad risk att undervisningen består av en större andel ensamarbete, vilket knappast är en fördel för elever i matematiksvårigheter. Ljungblad (2016) samt Karlsson och Kilborn (2015) bekräftar betydelsen av matematiska samtal med stöd av en lärare samt möjligheten att använda stöttande material, för elever i matematiksvårigheter. Holgersson och Wästerlid (2018) lägger till att det är viktigt att elever får möjlighet att muntligt, med ett språk som de behärskar och förstår, får sätta ord på det som de gör.

Under arbetet med denna uppsats har det blivit tydligt för mig hur stor betydelse ett läromedel kan ha för läraren, undervisningen och därmed också för eleverna. Läromedel är viktiga medierande redskap i matematikundervisningen och det är alltså min förhoppning att som speciallärare inom matematik kunna samverka med ämneslärare och ha en viktig roll i kollegiala diskussioner; hur läromedel kan användas och vilket stöd man som lärare och elev kan hitta i dessa, hur läraren och hens planering och undervisning kan inspireras och utvecklas, hur olika representationsformer kan användas som redskap för att öka förståelsen och stötta lärandet, samt hur elever på olika sätt kan mötas och stöttas för att kunna få känna att de kan lyckas inom matematiken.

Avslutningsvis vill jag tillägga att alla läromedel har sina styrkor och svagheter. Olika förutsättningar finns för olika läromedel att tala *med* eller *genom* läraren och ge stöd och inspiration men det är ändå till stor del upp till mig som lärare/speciallärare hur jag väljer att tolka och använda ett visst läromedel/material. Förhoppningsvis sker detta dock med hjälp av gemensamma diskussioner och analyser, med fokus på att undervisningen tryggt ska vila på forskning och vetenskaplig grund.

8.5 Studiens kunskapsbidrag samt förslag till vidare forskning

Studien visar hur läromedel lutar sig mot forskning och teorier, och hur de på olika sätt kan ge stöd och inspiration till lärare för att hjälpa till att utveckla undervisningen och möta eleverna samt ge stöd för att utveckla deras matematiska förståelse. Detta kan även vara av intresse för speciallärare, rektorer, läromedelsförfattare och andra aktörer som vill utveckla och förbättra undervisningen inom exempelvis matematik.

Utifrån resultaten från denna analys av två matematikläromedel vore det intressant att inom några år titta närmare på utvecklingen av nya läromedel i Sverige. Kommer fler läromedel att fokusera på att ”tala *genom* läraren”, inspirerade av undervisningen i exempelvis Ostasien? Kan en skillnad utläsas i betyg, nationella prov eller internationella undersökningar om man jämför resultat för elever som under sin skoltid undervisats med hjälp av ett mer ”traditionellt” svenskt läromedel, såsom Mattespanarna, jämfört med elever som haft Singma matematik som läromedel? Kommer en eventuell reglering eller ökad kontroll av svenska läromedel att påverka undervisningen, öka den konceptuella förståelsen och så småningom även förbättra elevernas resultat?

Referenser

- Bentley, P-O. (2008). *Svenska elevers kunskaper i TIMSS 2007 – En jämförande analys av elevernas taluppfattning och kunskaper i aritmetik, geometri och algebra i Sverige, Hong Kong och Taiwan*. Skolverket: Analysrapport till 323. Hämtad från <https://www.skolverket.se/publikationer?id=2306>
- Bentley, P-O., & Bentley, C. (2011). *Det beror på hur man räknar – matematikdidaktik för lärare*. Malmö: Liber AB.
- Berggren, P., & Lindroth, M. (2011). *Laborativ matematik – för en varierad undervisning*. Uppsala: JL Utbildning.
- Bergström, G., & Boréus, K. (2018). Samhällsvetenskaplig text- och diskursanalys. I G. Bergström & K. Boréus (Red.), *Textens mening och makt. Metodbok i samhällsvetenskaplig text- och diskursanalys*. Lund: Studentlitteratur AB.
- Boréus, K., & Kohl, S. (2018). Innehållsanalys. I G. Bergström & K. Boréus (Red.), *Textens mening och makt. Metodbok i samhällsvetenskaplig text- och diskursanalys*. Lund: Studentlitteratur AB.
- Brown, M. W. (2009). The teacher – tool relationship. Theorizing the design and use of curriculum materials. I J. T. Remillard, B. A. Herbel-Eisenmann & G. M. Lloyd (Red.), *Mathematics teachers at work. Connecting curriculum materials and classroom instruction*. 17–25. New York: Routledge.
- Bruce, B. (Red.). (2018). Att vara speciallärare: språk-, skriv- och läsutveckling respektive matematikutveckling. Malmö: Gleerups.
- Bryman, A. (2018). *Samhällsvetenskapliga metoder*. Malmö: Liber AB.
- Clements, D.H. (1999). `Concrete` Manipulatives, Concrete Ideas. *Contemporary Issues in Early Childhood, Vol 1, No.1, 1999*.
- Davis, E.A., & Krajcik, J.S. (2005). Designing educative curriculum materials to promote teacher learning. *Educational Researcher*, 34(3), 3–14.
- Eskilstuna kommun. (2019). *Eskilstuna först med forskningsbaserad matematikundervisning*. Hämtad 2019-12-20 från <https://www.eskilstuna.se/utbildning-och-barnomsorg/nyheter/utbildning-och-barnomsorg/2019-09-10-eskilstuna-forst-med-forskningsbaserad-matematikundervisning.html>
- Fan, L., & Kaeley, G. S. (2000). The influence of textbooks on teaching strategies: An empirical study. *Mid-Western Educational Researcher*, 13(4), 2–9.
- Fan, L., Zhu, Y., & Miao, Z. (2013). Textbook research in mathematics education: development status and directions. *ZDM–The international Journal on mathematics education*, 45(5), 1–14.

- Fong Ng, S. & Lee, K. (2009). The Model Method: Singapore Children's Tool for Representing and Solving Algebraic Word Problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, 40(3), 282–313.
- Frisk, S. (2019). Visuella representationer som stöd för utforskande matematiksamtal. I C. Kilhamn, R. Nyman, L. Knutsson, B. Holmberg, S. Frisk, C. Skodras & F. Gallo Cronberg. *Matematiska samtal i klassrummet. Vägar till elevers lärande*. Stockholm: Liber AB.
- Gilje, N., & Grimen, H. (2007). *Samhällsvetenskapens förutsättningar*. Göteborg: Daidalos.
- Harden, R. M., & Stamper, N. (1999). What is a spiral curriculum? *Medical Teacher*, 21, 141–143. doi:10.1080/01421599979752
- Hoelgaard, L. (2015). *Lärohandledningen som resurs. En studie av svenska lärohandledningar för matematikundervisning i grundskolans årskurs 1–3*. Västerås: Mälardalens University, School of Education, Culture and Communication.
- Holgersson, I., & Wästerlid, C. (2018). Specialisering barns och elevers matematikutveckling. I B. Bruce (Red.). *Att vara speciallärare*. Malmö: Gleerups.
- Håkansson, J., & Sundberg, D. (2012). *Utmärkt undervisning. Framgångsfaktorer i svensk och internationell belysning*. Stockholm: Natur & Kultur.
- Johansson, M. (2006). *Teaching mathematics with textbooks: a classroom and curricular perspective* (doktorsavhandling). Luleå: Luleå tekniska universitet. Hämtad från <http://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:998959/FULLTEXT01.pdf>
- Johansson, M. (2009). Om läroböcker och matematikundervisning. I G. Brandell, B. Grevholm, K. Wallby & H. Wallin (Red.), *Matematikdidaktiska frågor – resultat från en forskarskola*. Göteborg: NCM och SMDF.
- Johansson, M. (2011). ”Tänk så här”: didaktiska perspektiv på läroböcker i matematik. I G. Brandell & A. Pettersson (Red.), *Matematikundervisning - Vetenskapliga perspektiv*. Stockholm: Stockholms universitets förlag.
- Juter, K., & Nilsson, P. (2011). Begreppsbildning i sociala sammanhang: Att analysera matematisk aktivitet på två nivåer. I G. Brandell & A. Pettersson (Red.), *Matematikundervisning - Vetenskapliga perspektiv*. Stockholm: Stockholms universitets förlag.
- Karlsson, K-G. (2011). Läroboken och makten – ett nära förhållande. I N. Ammert (Red.), *Läromedelsstudier i teori och praktik*. Lund: Studentlitteratur AB.
- Karlsson, N. & Kilborn, W. (2015). *Konkretisering och undervisning i matematik: matematikdidaktik för lärare*. Lund: Studentlitteratur.
- Kaur, B. (2014). *Mathematics Education in Singapore – An Insider's Perspective*. <https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ1079596.pdf>

- Kent, D. C. (2017). *A New Educational Perspective: The Case of Singapore*. Hämtad från <https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ1160443.pdf>
- Knutsson, L. (2019). Samtalets matematiska syfte. I C. Kilhamn, R. Nyman, L. Knutsson, B. Holmberg, S. Frisk, C. Skodras, & F. Gallo Cronberg. *Matematiska samtal i klassrummet. Vägar till elevers lärande*. Stockholm: Liber AB.
- Koljonen, T. (2014). *Finnish Teacher Guides in Mathematics: Resources for primary school teachers in designing teaching*. Västerås: Mälardalens University, School of Education, Culture and Communication.
- Kroksmark, T. (1989). *Didaktiska strövtåg: didaktiska idéer från Comenius till fenomenografisk didaktik*. Göteborg: Daidalos.
- Kvale, S. & Brinkmann, S. (2014). *Den kvalitativa forskningsintervjun*. Lund: Studentlitteratur.
- Ljungblad, A-L. (2012). *Matematisk Medvetenhet*. Lund: Studentlitteratur AB.
- Ljungblad, A-L. (2016). *Matematikens grunder - kvalitativ kartläggning*. Nacka: Askunge Thorséns Förlag AB.
- Lundberg, I., & Sterner, G. (2006). *Räknesvårigheter och lässvårigheter under de första skolåren – hur hänger de ihop?* Stockholm: Natur & Kultur.
- Lunde, O. (2011). *När siffrorna skapar kaos - matematiksvårigheter ur ett specialpedagogiskt perspektiv*. Stockholm: Liber AB.
- Lundin, E. (2008). *Konsten att hitta sin teori*. I K. Sjöberg & D. Wästerfors (Red.), *Uppdrag forskning - konsten att genomföra kvalitativa studier*. Malmö: Liber AB.
- Löwing, M. (2006). *Matematikundervisningens dilemman. Hur lärare kan hantera lärandets komplexitet*. Lund: Studentlitteratur AB.
- Ma, L. (1999). *Knowing and Teaching Elementary Mathematics. Teachers' Understanding of Fundamental Mathematics in China and the United States*. Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum.
- Malmer, G. (2002). *Bra matematik för alla. Nödvändig för elever med inlärningssvårigheter*. Lund: Studentlitteratur AB.
- Matematikdelegationen. (2004). *Att lyfta matematiken: intresse, lärande, kompetens: betänkande*. Stockholm: Fritzes offentliga publikationer. Hämtad 2020-07-26 från <https://www.regeringen.se/contentassets/1e03188c1e54400ab455a6245cbc17de/att-lyfta-matematiken---intresse-larande-kompetens-sou-200497>
- McLeod, S. A. (2019). Bruner - learning theory in education. *Simply Psychology*. Hämtad från <https://www.simplypsychology.org/bruner.html>

- Moyer, P. S. (2002). Are we having fun yet? How teachers use manipulatives to teach mathematics. *Educational Studies in Mathematics* 47, 175–197.
- Neuman, D. (1989). *Räknefärdighetens rötter*. Stockholm: Utbildningsförlaget.
- Neuman, D. (2013). Att ändra arbetssätt och kultur inom den inledande aritmetikundervisningen. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 18(2), 3–46.
- Oates, T. (2014). *Why textbooks count. A policy paper*. Cambridge: University of Cambridge. Hämtad från <https://www.cambridgeassessment.org.uk/Images/181744-why-textbooks-count-tim-oates.pdf>
- Phillip, D. C., & Soltis, J. F. (2014). *Perspektiv på lärande*. Lund: Studentlitteratur AB.
- Pólya, G. (2003). *Problemlösning: en handbok i rationellt tänkande*. (Print-on-demand). Stockholm: ePan.
- Regeringskansliet. (2019). *Ny utredning om statens roll när det gäller läromedel i svensk skola*. Hämtad 2019-11-30 från <https://www.regeringen.se/pressmeddelanden/2019/11/ny-utredning-om-statens-roll-nar-det-galler-laromedel-i-svensk-skola/>
- Roos, H. & Ljungblad, A-L. (2018). *Att skapa tillgänglighet till matematik - vilka är de pedagogiska utmaningarna? (4–6)*. Hämtat från https://larportalen.skolverket.se/LarportalenAPI/api-v2/document/path/larportalen/material/inriktningar/1-matematik/Grundskola/429_matematikdidaktik_specialpedagogik_%C3%A5k4-6/del_01/Material/Flik/Del_01_MomentA/Artiklar/MA1_4-6_01A_01_utmaning.docx
- Rystedt, E., & Trygg, L. (2010). *Laborativ matematikundervisning – vad vet vi?* Göteborg: NCM.
- Ryve, A., Hemmi, K., & Kornhall, P. (2016). *Skola på vetenskaplig grund*. Stockholm: Natur & Kultur AB.
- Scherer P., Beswick, K., DeBlois, L., Healy, L., & Moser Opitz, E. (2016). Assistance of students with mathematical learning difficulties: how can research support practice? *ZDM Mathematics Education*, 48, 633–649
- Schreier, M. (2014). Qualitative Content Analysis? I U. Flick (Red.), *The Sage Handbook of Qualitative Data Analysis*. London: Sage, s.170–183.
- SFS 2011:688. *Examensordning*. Stockholm: Utbildningsdepartementet.
- Skemp, R. R. (1976). *Relational Understanding and Instrumental Understanding*. Hämtad från <http://math.coe.uga.edu/olive/EMAT3500f08/instrumental-relational.pdf>
- Skolinspektionen. (2020). *Matematikundervisningen i årskurserna 4–6. Interaktion i klassrummet*. Hämtad från <https://www.skolinspektionen.se/sv/Beslut-och-rapporter/Publikationer/Granskningsrapport/Kvalitetsgranskning/matematikundervisningen---i-arsskurserna-4-6/>

- Skolverket. (2017). *Kommentarmaterial till kursplanen i matematik. Reviderad 2017*. Hämtad från <https://www.skolverket.se/publikationsserier/kommentarmaterial/2017/kommentarmaterial-till-kursplanen-i-matematik-reviderad-2017>
- Skolverket. (2018). *Läroplan för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet 2011*. Stockholm: Fritzes.
- Skolverket. (2019). *PISA 2018: 15-åringars kunskaper i läsförståelse, matematik och naturvetenskap*. Hämtad från <https://www.skolverket.se/getFile?file=5347>
- Skott, J., Jess, K., Hansen, H.C. & Lundin, S. (2010). *Matematik för lärare Delta Didaktik*. Malmö: Gleerups Utbildning.
- Stukát, S. (2011). *Att skriva examensarbete inom utbildningsvetenskap*. (2. uppl.) Lund: Studentlitteratur.
- Säljö, R. (2014). *Lärande i praktiken. Ett sociokulturellt perspektiv*. Stockholm: Studentlitteratur AB.
- Säljö, R. (2015). *Lärande. En introduktion till perspektiv och metaforer*. Malmö: Gleerups.
- Säljö, R. (2017). Den lärande människan – teoretiska traditioner. I U. P. Lundgren, R. Säljö & C. Liberg (Red.), *Lärande skola bildning*. Stockholm: Natur & Kultur.
- Säljö, R. (2018). L. S. Vygotskij – forskare, pedagog och visionär. I A. Forssell (Red.), *Boken om pedagogerna*. Stockholm: Liber AB.
- Van Steenbrugge, H., & Ryve, A. (2018). Developing a reform mathematics curriculum program in Sweden: relating international research and the local context. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education* 50, nr 5, 801–812. Doi: 10.1007/s11858-018-0972-y
- Vetenskapsrådet. (2002). *Forskningsetiska principer inom humanistisk-samhällsvetenskaplig forskning*. Hämtad från https://www.gu.se/digitalAssets/1268/1268494_forskningsetiska_principer_2002.pdf
- Wertsch, J. V. (2007). Mediation. I H. Daniels, M. Cole & J. V. Wertsch (Red.), *The Cambridge companion to Vygotsky* (s.178–192). Cambridge, England: Cambridge University Press.
- Witzel, B. S., Riccomini, P. J., & Schneider, E. (2008). Implementing CRA with secondary students with learning disabilities in mathematics. *Intervention in School and Clinic*. 43, 270–276. doi: 10.1177/1053451208314734
- Zippert, M., Gustafsson, I., Nilsson, I., Jakobsson, M., Lingefjärd, T., Svingby, G., & Jönsson, P. (2011). Matematiska uttrycksformer och representationer. *Nämnamn*. (3, 36–46). Hämtad från <http://urn.kb.se/resolve?urn=urn:nbn:se:mau:diva-2533>

Läromedel

Agardh, P. & Rejler, J. (2019). *Singma Matematik Lärarhandledning 4A*. Stockholm: Natur & Kultur.

Yeap, B. H., Agardh, P., & Rejler, J. (2019a) *Singma matematik 4A arbetsbok*. Stockholm: Natur & Kultur.

Yeap, B. H., Agardh, P., & Rejler, J. (2019b) *Singma matematik 4A övningsbok*. Stockholm: Natur & Kultur.

Natur & Kultur. (u.å.). *Singma matematik åk 4*. Hämtad 2020-08-12 från <https://www.nok.se/titlar/laromedel-b1/singma-matematik-ak-4/>

Hernvald, A., Kryger, G. & Hansson, P. (2011). *Mattespanarna 4A Lärarboken*. Stockholm: Liber.

Hernvald, A., Kryger, G., Hansson, P., & Zetterqvist, L. (2011). *Mattespanarna 4A grundbok*. Stockholm: Liber.

Liber. (u.å.). *Uppdrag Matte Mattespanarna år 4–6*. Hämtad 2020-08-12 från <https://www.liber.se/serie/uppdrag-matte-mattespanarna-16628>

Bilaga 1 Analysverktyg

Läromedelsanalys	Mattespanarna 4A	Singma matematik 4A
<p>1. Motiverar till aktiviteter/uppgifter genom att göra kopplingar till forskning och teori, och visa centrala idéer.</p> <p>-Hur beskrivs/visas de teoretiska utgångspunkter som ligger till grund för läromedlet?</p>		
<p>2. Illustrerar och förklarar begrepp, fakta och strategier, som stöd för läraren samt för eleverna.</p> <p>-Exempelvis genom tillämpningsområden, bevis, korrekt terminologi</p>		
<p>3. Erbjuder förslag på hur man kan möta elever med olika strategier, för att stötta lärandet och förhindra framtida svårigheter.</p> <p>-Hur möts elever på gruppnivå? -Hur möts/stöttas elever i behov av utmaningar/särskilt stöd?</p>		
<p>4. Erbjuder förslag till utformning och genomförande av undervisningen med stöd av olika representationsformer.</p> <p>-Vilka representationsformer visas/föreslås, hur kopplas de ihop och hur används de för att underlätta i undervisningen?</p>		

Bilaga 2 Intervjuguide

- Kort presentation av informanten: lärarbehörighet, år i yrket, nuvarande tjänst
- Huvudsakligt matematikläromedel i åk 4: antal år på skolan och för informanten (eventuellt tidigare använt läromedel?)
- Anledning till valet av läromedel
- Teoretisk grund i läromedlet: forskning, teorier, perspektiv – finns uttalat eller tolkas
- Lärarhandledningen: användning, inflytande
- Fördelar med läromedlet: för läraren, för eleverna, på kortare/längre sikt
- Nackdelar med läromedlet: för läraren, för eleverna, på kortare/längre sikt
- Läromedlets förslag till användning av olika representationsformer, samt övergångar mellan det konkreta och det abstrakta
- Övriga material/läromedel: exempelvis läroböcker, laborativt material
- Arbetsätt, -former, organisation
- Läromedlets förslag på hur elever med olika strategier och med olika behov av stöd/utmaningar kan mötas och stöttas, kopplat till praktiken
- Tankar/önskemål inför kommande läsår: läromedel, material, arbetsätt