Förord

I dagens ekonomi är det även för den mest kunniga och erfarna beslutfattare svårt att ha en fullständig bild av hur de närmaste årens ränta såväl som växelkurs kommer att utveckla sig. Det är faktiskt omöjligt att veta hur ekonomin kommer att se ut om 10 år. Utmaningen är att trots denna osäkerhet försöka fatta beslut.

Att den ekonomiska verkligheten förändras kontinuerligt är inget nytt för en privat investerare eller en kommunal beslutsfattare. Dagens samhälle kännetecknas av en växande ekonomi och snabbare ekonomiska svängningar. Snabbheten kan i en viss mån tillskrivas globalisering och datorisering. Följden är att osäkerheten för såväl den privata som den offentliga sektorn är större än för några år sedan. Detta innebär att beslutsfattarna står inför stora utmaningar vid val mellan olika investeringsprojekt och satsningar. Dessutom är ofta tidshorisonten för en beslutsfattare kort vilket ställer till problem vid åtgärder som har en lång löptid. Ett exempel är infrastrukturprojekten. Byggandet av exempelvis en tunnel tar flera år och det färdiga projektet beräknas ofta ha en lång livslängd vilket gör det extra svårt att uppskatta den framtida efterfrågan eller samhällets nytta. Anta att ett byggprojekt beräknas ta 30 år. Det innebär att vi måste göra uppskattningar om framtida in- och utbetalningar, kostnader, intäkter, nyttor och andra faktorer som påverkas av tillståndet i ekonomin fram till 2040-talet.

I föreliggande rapport ges en snabb inblick om hur vi arbetar med investeringskalkyler och hur vi med hjälp av beslutsteori kan finna det bästa alternativet. Värdet vid användning av investeringskalkyler och beslutsteori är att vi kan minska osäkerheten vid valet inför implementering av olika projekt. Rapporten vänder sig till universitetsstudenter och beslutsfattare såväl inom den privata som inom den offentliga sektorn. Osvaldo Salas är huvudförfattare för kapitel 2 och Louise Holm är huvudförfattare för kapitel 3. För inledningskapitlet svarar författarna gemensamt.

Göteborg, januari 2014

Louise Holm och Osvaldo Salas

Innehållsförteckning

Kapitel 1 – Inledning

Den privata och den offentliga sektorn måste ständigt blicka framåt med sin verksamhet för att möta framtidens utmaningar på ett tillfredsställande sätt. Det är således viktigt för beslutsfattarna att ha tillgång till lämpliga verktyg för att göra korrekta bedömningar om framtiden. Ett problem är det faktum att vi saknar information om hur den ekonomiska verkligheten kommer att se ut. Detta kan leda till att den planerade verksamheten ibland inte stämmer med det faktiska resultatet. Det kan därför hävdas att den kommande verksamheten i stor utsträckning bygger på förväntningarna och risktagande.

Den ekonomiska verkligheten visar att en beslutsfattare i näringslivet och i den offentliga sektorn ständigt konfronteras med problemet att göra val under osäkerhet. Till exempel måste ett företag ofta bestämma huruvida de skall introducera en ny produkt samtidigt som de är osäkra på storleken på den potentiella marknaden för produkten. En offentlig myndighet måste fatta beslut huruvida ett investeringsprojekt är samhällsekonomiskt lönsamt. Det är värt att tillägga att de samhälleliga investeringsprojekten ofta har en lång tidshorisont vilket innebär en stor osäkerhet för den beslutande myndigheten.

Baserat på det ovanstående är den gemensamma nämnaren för såväl privata investeringar som offentliga satsningar att de arbetar under osäkerhet. Förklaringar till detta kan härledas till att det faktum att den framtida ekonomiska verkligheten påverkas av variabler såsom inflation, växelkursförändringar, konjunkturläget och konkurrensen på marknaden. Det är viktigt att påpeka att alla dessa variabler inte kan styras av den enskilde ekonomiske aktören. Det är därför lämpligt att använda olika analytiska verktyg för att försöka minska osäkerhetsmarginalen.

Beslutsfattaren bör alltså reducera osäkerheterna för att åstadkomma gott resultat. Ett verktyg i sammanhanget är användningen av investeringskalkyler. Detta verktyg underlättar bedömningen, utifrån vissa parametrar, ett projekts lönsamhet och därmed ges möjlighet att fatta beslut om dess genomförbarhet. Investeringskalkyler kan ge en värdefull indikation om ett framtida investeringsresultat. Det kan dock tilläggas att trots att beräkningar kan beakta olika eventuella situationer så kvarstår ofta en stor grad av osäkerhet. Det är därför lämpligt att bygga ut beslutsanalysen med beslutsteori. Beslutsteori kan förklaras som den logiska och kvantitativa analys som med hjälp av sannolikhetslära hjälper en beslutsfattare att fatta mer rationella beslut.

Rapporten organiseras enligt följande. Kapitel 2 redovisar hur man beräknar slutvärde, nuvärde samt olika lönsamhetsmått. Utgångspunkten är att en investering, i ekonomiska termer, är en kapitalsatsning med förhoppningar om framtida vinst. Det är således ett val mellan att använda medel för att köpa varor och tjänster idag eller satsa på dem i ett framtida projekt. En investering är alltså en kapitalsatsning som ger betalningskonsekvenser under en längre tid. Betalningskonsekvenserna utgörs av de in- och utbetalningar som orsakas av investeringen i fråga och vi kommer att bekanta oss med några kontoposter och formler. I de flesta investeringskalkylerna återfinns kassaflödet vilket visar de löpande nettoinbetalningarna (inbetalningar − utbetalningar = NB), grundinvesteringen (G) som avser samtliga utbetalningar av engångskaraktär som uppstår vid starten av ett projekt som till exempel inköp av byggnader, maskiner, mark, reservdelar, verktyg, planerings- och utredningsarbete; utbildning, samt restvärde (R) som är det alternativutnyttjande värdet investeringen representerar vid beräkningsperiodens slut.

I kapitel 3 beskrivs användbara sätt att analysera olika valalternativ som hjälper beslutsfattare komma fram till rationella beslut. Genom att använda beslutsträd kan beslutsfattare under osäkerhet lättare strukturera sina alternativ och dess konsekvenser.

Vidare visas hur människors inställning till osäkerhet kan behandlas med nyttofunktioner och att dessa kan användas istället för det rena penningvärdet vid beslutsvalet, d.v.s. att maximera individernas förväntade nytta istället för den förväntade ekonomiska payoffen. Införandet av sannolikhetsteori i denna diskussion är tänkt att främja ett mer rationellt beslutsfattande under osäkerhet. För att se hur viktigt och omfattande detta mål är, kan nämnas att praktiskt taget alla beslut fattas under osäkerhet, eftersom det sällan är möjligt för beslutsfattaren att exakt förutse följderna av varje alternativt handlingssätt.

Beslutsfattaren måste göra ett val, eller kanske en serie av val bland olika handlingsalternativ. Vidare leder detta val till någon konsekvens, men beslutsfattaren kan inte i förväg veta exakt vilken typ av konsekvens eftersom det beror på någon oförutsägbar händelse, eller serie av händelser, samt på valet i sig.

Genom att sammanfatta informationen i ett beslutsträd som logiskt visar upp vad som händer över tiden gällande beslut och utfall får vi ett användbart verktyg, framför allt när det handlar om en serie av beslut.

Kapitel 2 – Lönsamhetsbedömning

Hur vi beräknar olika lönsamhetsmått för kapitalsatsningar med betalningskonsekvenser i framtiden.

2.1 Kapitalisering och diskontering

I investeringskalkyler som tar hänsyn till ränta kan vi till exempel beräkna hur mycket ett aktuellt kapitalbelopp växer i framtiden, d.v.s. vi räknar framåt i tiden. I motsatt riktning kan vi beräkna ett kapitalbelopp som vi kommer att få i framtiden till dagens penningvärde, d.v.s. vi räknar bakåt i tiden. För att kunna beräkna fram och tillbaka i tiden används kalkylräntan. Denna räntesats är central i kalkylen eftersom den påverkar kapitalbeloppets förändring över tiden. Kalkylränta är oerhört komplicerat att uppskatta och därför brukar vi använda en på förhand uppskattad kalkylränta. Normalt använder vi den kalkylränta som rekommenderas av landets Riksbank.

In- och utbetalningar vid olika tidpunkter görs jämförbara med hjälp av kalkylräntan och hänför dem till samma referenstidpunkt. Referenstidpunkten är oftast när grundinvesteringen görs vilken betecknas som tidpunkt 0. Värdet av ett belopp vid en framtida tidpunkt kallas slutvärdet, SV (eller framtida värde). Den process med vilken vi beräknar ett belopps slutvärde kallas kapitalisering. Vi beräkning av ett framtida belopp till nuvärde, NV, görs denna beräkning baklänges eller bakåt i tiden. Processen att beräkna ett belopp till nuvärde kallas diskontering.

Slutvärde av ett belopp

Slutvärdemetoden uppvisar hur en investering kapitaliseras i framtiden. Kapitalisering innebär att en summa som investeras idag förräntas med en vald kalkylränta (r) under ett visst antal år. Beräkning av slutvärde (SV) definieras som nuvärdesbelopp (NV) plus räntan multiplicerad med nuvärdet.

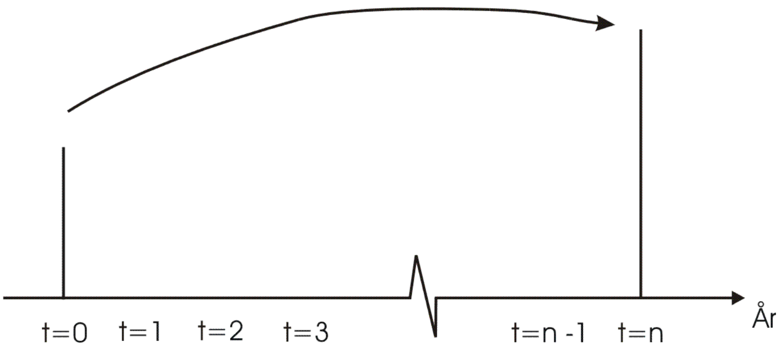
$$SV = NV + r \cdot NV$$

Vi faktoriserar uttrycket för SV och skriver om ekvationen, då fås

$$SV = NV \cdot (1+r) \qquad \text{ekvation (2.1)}$$

Figur 2.1 visar hur ett belopp växer i n antal år. Omräkning framåt växer med den valda kalkylräntan från tidpunkt 0 till n.

Figur 2.1: Omräkning framåt i tiden



Exempel 1

Låt oss anta att vi sätter in 1 000 kr på banken med 8 procent ränta per år. Beloppet växer till 1 000 + 0,08 · 1 000 = 1 080 kr. Denna beräkning i ekvation (2.1) för slutvärde, kan tecknas så här:

$SV = NV \cdot (1+r)$

$SV = 1\,000 \cdot (1+0{,}08)$

$SV = 1\,080$

Om antal år som vi beräknar framåt är mer än ett år kan vi generellt teckna ekvationen

$$SV = NV \cdot (1 + r)^n \qquad \text{ekvation (2.2)}$$

Om vi låter pengarna vara på banken i 3 år med samma kalkylränta (8 procent) erhålls 1 257 kronor enligt ekvation (2.2).

$SV = NV \cdot (1 + r)^3$

$SV = 1\,000 \cdot 1{,}08^3$

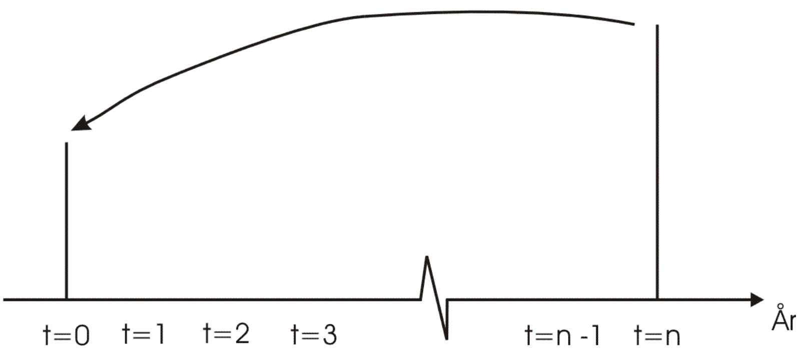
$SV = 1\,000 \cdot 1{,}2517$

$SV = 1\,257$ kr

Nuvärde av ett belopp

Nuvärdeskalkyl innebär att framtida in- och utbetalningar för en åtgärd räknas om till dagens penningvärde med hänsyn taget till en vald kalkylränta och åtgärdens antal år framåt i tiden. Nuvärde av ett investeringsprojekt är inget annat än dess penningvärde uppmätt till dagens marknadsvärde. Figur 2.2 illustrerar att ett belopp som erhålls om ett visst antal år minskar vid ”baklänges”-omräkning.

Figur 2.2: Omräkning bakåt i tiden



Nuvärde kan härledas från ekvationen för slutvärde genom att lösa ut NV enlig nedan.

$SV = NV \cdot (1 + r)$ $\qquad NV = \frac{SV}{(1+r)}$

Generellt kan vi skriva nuvärdet för ett framtida belopp vid år n:

$$NV = \frac{SV}{(1+r)^n} \qquad \text{ekvation (2.3)}$$

Uttrycket $V = \frac{SV}{(1+r)^n}$ kan även skrivas $NV = SV \cdot (1 + r)^{-n}$.

Nuvärdet kan vara större eller mindre än noll, $-\infty \leq$ NV $\leq \infty$.

Ett positivt nuvärde innebär att projektet är lönsamt och bör därför godkännas. Är nuvärdet däremot negativt innebär det att projektet inte är lönsamt och bör därför förkastas. Beslutsregel kan tecknas som:

NV > 0 $\Rightarrow$ projektet godkänns

NV = 0 $\Rightarrow$ projektet kan godkännas[1]

NV < 0 $\Rightarrow$ projektet godkänns inte

Vi återkommer till vårt tidigare exempel. Vi fick som resultat att 1 000 kronor med 8 procents kalkylränta per år ger slutvärdet 1 080

[1] Ett resultat på NV = 0 ger inga vinster, men samtidigt innebär det ingen förlust. I detta fall bör hänsyn tas till projektets syfte och konsekvenser. Om till exempel genomförandet av projektet ger upphov till positiva externa effekter eller bidrar till en ökning i samhällsnyttan, bör projektet godkännas.

kr. Om vi nu beräknar 1 080 till dagens penningvärde med 8 procent ränta, blir nuvärdet:

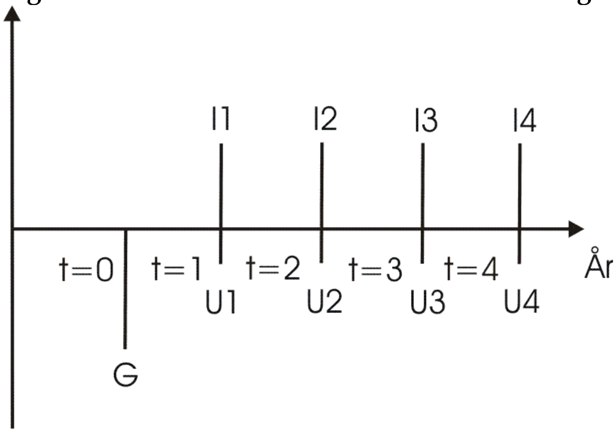
$$NV = \frac{1\,080}{(1+0{,}08)} = \frac{1080}{1{,}08} = 1000$$

Beräkningen ovan gäller för beräkning av ett belopp ett år bak i tiden. Kalkylerna sträcker sig oftast flera år framåt i tiden vilket innebär att nuvärdesfaktorns exponent tilltar i takt med antal år som ett projekt innefattas.

$$NV = \overbrace{\frac{SV_1}{(1+r)}}^{\text{år 1}} + \overbrace{\frac{SV_2}{(1+r)^2}}^{\text{år 2}} + \cdots + \overbrace{\frac{SV_n}{(1+r)^n}}^{\text{år n}} \qquad \text{ekvation (2.4)}$$

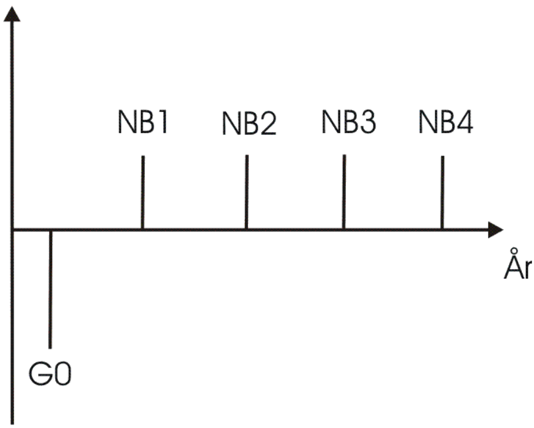
Utöver samtliga in- och utbetalningar ingår även grundinvesteringar i kalkylen. Grundinvesteringar avser de utbetalningar som äger rum när investeringsobjektet anskaffas och sätts in i drift. Dessa betalningar hänförs till tidpunkt noll och dess summa blir ett engångsbelopp. I Figur 2.3 illustreras ett flödesschema för en 4-årsperiod där grundinvesteringen (*G*) placeras vid tidpunkt noll. Figuren innehåller även inbetalningar (*I*) och utbetalningar (*U*).

Figur 2.3: Flödesschema med in- och utbetalningar



Ett flödesschema kan även illustreras som i Figur 2.4. Där tecknas grundinvestering G vid tidpunkt noll och nettoinbetalningarna NB_1, NB_2, NB_3 och NB_4 som omfattas av projektets livslängd. Nettoinbetalningar är uttrycket för inbetalningarna minus utbetalningarna. I Figur 2.4 är nettoinbetalningarna lika stora för varje år och positiva.

Figur 2.4: Flödesschema med positiva nettoinbetalningar



Exempel 2

En verkstad investerar i en maskin till en kostnad av 900 000 kronor, med en uppskattad livslängd på sex år som beräknas kunna säljas på andrahandsmarknaden för uppskattningsvis 100 000 kronor. Underhåll- och driftskostnader beräknas till 30 000 kronor per år. Verkstadsledningen förväntar sig att maskinen kommer att generera inbetalningar på 300 000 kronor per år. Kalkylräntan är 10 procent. Är projektet lönsamt?

I nedanstående tabell framställs projekts kassaflöde vilket ger oss en fullständig inblick över nettoinbetalningarna. Vidare undersöker vi om projektet är lönsamt genom att beräkna projektets nuvärde. Uppdragaren förväntar sig att vi ska göra beräkningar då restvärdet är exkluderat och sedan inkluderat. Vi börjar med beräkning utan hänsyn till restvärdet.

Tabell 2.1: Beräkning utan hänsyn till restvärde (i tkr)

År	0	1	2	3	4	5	6
Investering	− 900						
Inbetalning		300	300	300	300	300	300
Utbetalning		− 30	− 30	− 30	− 30	− 30	− 30
Summa	− 900	270	270	270	270	270	270

Alla erhållna summor, med undantag för grundinvesteringen, beräknas med hjälp ekvation (2.3). Exempelvis blir nuvärdet av nettoinbetalningarna år 1:

$$NV = \frac{270}{(1+0{,}1)} = \frac{270}{(1{,}1)} = 245$$

Tabell 2.2: Nuvärdesberäkning för åren 1-6 (i tkr)

1	2	3	4	5	6	
$\frac{270}{(1{,}1)}$	$\frac{270}{(1{,}1)^2}$	$\frac{270}{(1{,}1)^3}$	$\frac{270}{(1{,}1)^4}$	$\frac{270}{(1{,}1)^5}$	$\frac{270}{(1{,}1)^6}$	
245	223	203	184	168	152	Σ = 1 175

Investeringens nuvärde = Grundinvesteringen plus summan av nettoinbetalningarnas nuvärden = -900+1 175 = 275 tkr

En kortare väg till resultatet kan användas genom att tillämpa formeln för nuvärdessumma. Denna formel används när storleken på nettoinbetalningarna i flera år antas vara lika stora. I vårt exempel blir nettoinbetalningen 270 tkr per år för samtliga år. Formeln för nuvärdesummefaktorn tecknas

$$\frac{1-(1+r)^{-n}}{r} \qquad \text{ekvation (2.5)}$$

Formel för nuvärde då nettoinbetalningarna är lika stora varje år kan skrivas med nuvärdesummefaktorn enligt

$$NV = -G + \frac{NB_1}{(1+r)^1} + \cdots + \frac{NB_n}{(1+r)^n} = -G + \frac{1-(1+r)^{-n}}{r} \cdot NB$$

ekvation (2.6)

Lösningen till verkstadsexemplet där NB = 270 kan beräknas med hjälp av ekvation (2.6).

$$NV = -G + \frac{1-(1+r)^{-n}}{r} \cdot NB$$

$$NV = -900 + \frac{1-(1+0{,}1)^{-6}}{0{,}1} \cdot 270$$

$$NV = -900 + 4{,}35 \cdot 270 = -900 + 1\,175 = 275 \text{ tkr}$$

Nu tar vi hänsyn till restvärdet.

I jämförelse med beräkningen utan hänsyn till restvärdet skiljer sig kassaflödet enbart för år 6.

Tabell 2.3: Beräkning med hänsyn till restvärde (i tkr)

År	0	1	2	3	4	5	6
Investering	− 900						
Inbetalning		300	300	300	300	300	300
Utbetalning		− 30	− 30	− 30	− 30	− 30	− 30
Restvärde							100
Summa	− 900	270	270	270	270	270	370

För det sista året summeras nettoinbetalningen, 270, med restvärdet, 100. Eftersom storleken på nettoinbetalningarna för år 1-5 är lika stora, kan vi använda nuvärdesummefaktorn (ekvation 2.5). För år 6 blir nettoinbetalningen 370 (p.g.a. restvärdet) vilket innebär att vi måste använda ekvation (2.3) för att beräkna nuvärdet av detta belopp. Generellt kan vi skriva vårt problem

$$NV = -G + \frac{NB_1}{(1+r)^1} + \cdots + \frac{NB_n + R_n}{(1+r)^n} \qquad \text{ekvation (2.7)}$$

och i vårt exempel blir nuvärdesberäkningen

$$NV = -G + \frac{1-(1+r)^{-5}}{r} \cdot NB + \frac{NB_6 + R_6}{(1+r)^6}$$

$$NV = -G + \frac{1-(1+0{,}1)^{-5}}{0{,}1} \cdot 270 + \frac{370}{(1+0{,}1)^6}$$

$$NV = -900 + 3{,}790 \cdot 270 + \frac{370}{1{,}772} = -900 + 1023 + 209 = 332$$

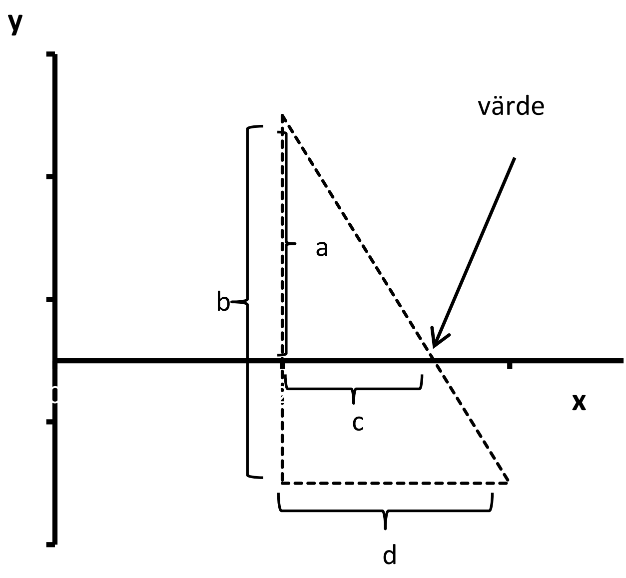
2.2 Linjär interpolering

I vissa situationer behöver vi känna till vid vilken kalkylränta som ett investeringsprojekt är lönsamt eller hur många år och månader som krävs för att projektet i fråga ska täcka grundinvesteringen. Med hjälp av linjär interpolering kan vi få det gällande värdet för, till exempel, kalkylräntan eller återbetalningstiden. Att interpolera innebär att vi, inom ett intervall, erhåller värdet för en punkt utifrån två andra bestämda punkter. Med andra ord, denna metod innebär att vi ska hitta ett värde inom ett intervall där vi känner värdena i ändarna. Man brukar säga att interpolering är ”konsten att läsa mellan raderna i en tabell”.

I Figur 2.5 söker vi ett värde som ligger på den horisontella axeln. Vi känner till värdena i ändarna för sträckorna a, b och d. Däremot saknar vi värde för sträckan c, d.v.s. det värde vi söker. Genom att lösa ut sträckan c från ekvation (2.8) erhåller vi dess värde.

$$a \cdot d = c \cdot b \quad \rightarrow \quad c = \frac{a}{b} \cdot d \qquad \text{ekvation (2.8)}$$

Figur 2.5: Interpolering



2.3 Lönsamhet

Lönsamheten är centralt för beslutsfattare då det gäller fråga om att genomföra eller inte genomföra ett projekt. Det är alltså ett värdefullt beslutsunderlag för den privata eller offentliga verksamheten.

Ett sätt att mäta lönsamhet är att beräkna återbetalningstiden (pay-back-metoden). Detta mått mäter den tid det tar att få igen investerade pengar. Återbetalningstiden (*N*) är den tid det tar för ackumulerade nettoinbetalningar (*NB*) att uppgå till grundinvesteringsbeloppet (*G*).

$$N = \frac{G}{NB} \qquad \text{ekvation (2.9)}$$

I litteraturen uppmärksammas att denna metod har två brister. Den ena är att den ignorerar händelser som uppkommer efter återbetalningstiden är uppfylld. Den andra bristen är att den inte tar hänsyn till pengars tidsvärde.

Återbetalningstid med hänsyn till pengars tidsvärde innebär att den valda kalkylräntan tas med i beräkningen. I nedanstående tabell redovisas de erhållna nuvärdena från Exempel 2 med en kalkylränta på 10 procent. Hur lång tid tar det att nå lönsamhet, med andra ord, när är de ackumulerade nuvärdena (d.v.s., de ackumulerade netto-inbetalningarna) lika med grundinvesteringen?

Tabell 2.4: Återbetalningstid med hänsyn till pengars tidsvärde

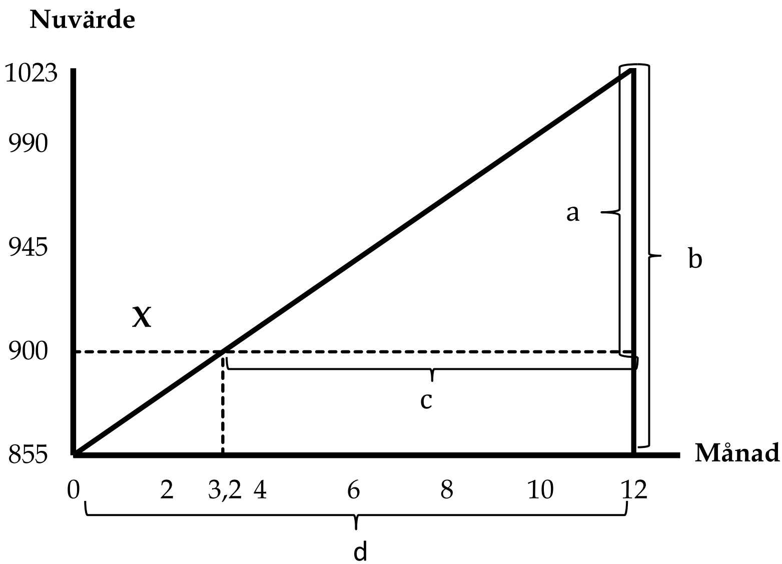
År	Nuvärde (tkr)	Ackumulerade NV (tkr)
1	245	245
2	223	468
3	203	671
4	184	855
5	168	1 023
6	152	1 175

För att finna återbetalningstiden fastställer vi hur många år och månader som krävs för att täcka upp en grundinvestering på 900. Denna siffra ligger mellan de ackumulerade nuvärdena 855 och 1 023 (se ringen i Tabell 2.4). Enligt tabellen tar det 4 år att uppnå ett ackumulerat nuvärde på 855. Frågan är därför nu hur många månader som krävs för att komma upp till ett nuvärde på 900. Eller annorlunda uttryckt, hur många månader krävs för att åstadkomma 900 - 855 = 45. Detta resonemang framställs i Tabell 2.5. I början av intervallet (månad noll) är värdet för de ackumulerade nuvärdena 855. Efter 12 månader har nuvärdena stigit till 1 023.

Tabell 2.5: Nuvärdestabell för Exempel 2

Nuvärde (kr)	Antal månader
855	0
900	X
1023	12

Figur 2.6: Interpolering i Exempel 2



Vi söker alltså värdet för ”X” som anger vid vilken månad de ackumulerade nuvärdena är lika med 900.

I Figur 2.6 ser vi att värdet för sträckorna a, b, c och d är: a = 1023 - 900; b = 1023 – 855; c = 12 – X och d = 12. Värdet för X i figuren erhålls med ekvation (2.8).

$$\frac{(1023-900)\cdot 12}{1023-855}=12-X \quad \rightarrow \frac{1476}{168}=12-X$$

$X=12-8{,}79=3{,}21 \;\rightarrow dvs \;\approx 4\, månader$

Vi avrundar uppåt till närmsta heltal.

Projektet blir lönsamt efter fyra år och tre månader.

2.4 Internräntemetoden, IRR

Internräntemetoden (internal rate of return, IRR) går ut på att bestämma den räntesats vid vilken investeringens nuvärde är lika med noll. Denna räntesats ger uttryck för den årliga avkastning som investeringsalternativet i fråga ger på det satsade kapitalet. En investering är lönsam om dess internränta är högre än den på förhand bestämda kalkylräntan.

Det är värt att lägga märke till att det vid en investering ofta finns en grundinvestering men att det också finns situationer där det inte finns en grundinvestering enligt tidigare definition. Till exempel om vi placerar pengar i en fond så börjar vi med ett startkapital och inte med en grundinvestering. Om det däremot är ett infrastrukturprojekt är grundinvesteringen av stor vikt därför att det kan ta flera år för projekts inbetalningar att täcka grundinvesteringen. I sådana projekt undersöker vi med hjälp av internräntemetoden vilken ränta som gäller när summan av nettoinbetalningarna är lika stor som grundinvesteringen. Kalkylräntan kan ses som företagets avkastningskrav och därför bör ett investeringsprojekt där IRR är större än kalkylräntan antas. Ett investeringsprojekt bör inte antas om IRR är mindre än kalkylräntan. Beslutsregeln kan tecknas:

IRR > r $\Rightarrow$ projektet bör antas

IRR < r $\Rightarrow$ projektet bör ej antas

Värdet för internräntan erhålls med hjälp av följande beräkning:

$$NV = -G + \frac{NB_1}{(1 + IRR)} + \frac{NB_2}{(1 + IRR)^2} + \cdots + \frac{NB_n}{(1 + IRR)^n} = 0$$

ekvation (2.10)

Exempel 3

Låt oss anta att en nyanskaffad maskin kräver en grundinvestering på 1 700 euro. Denna investering beräknas i slutet av det första och andra året generera 800 respektive 1 300 euro. Vi betecknar dessa poster så här:

Grundinvestering = G= 1 700

Nettoinbetalning, första året = NB_1 = 800

Nettoinbetalning, andra året = NB_2 = 1 300

Vi beräknar investeringens IRR enligt ekvation (2.10).

$$NV = -\,G + \frac{NB_1}{(1+IRR)} + \frac{NB_2}{(1+IRR)^2} = 0$$

$$-\,1\,700+\frac{800}{(1+IRR)}+\frac{1\,300}{(1+IRR)^2}=0$$

För enkelhets skull skriver vi om termen (*1*+*IRR*) som *t*.

$$-\,1\,700+\frac{800}{t}+\frac{1\,300}{t^2}=0$$

$$-\,1\,700\,t^2+800\ \ t+1300=0$$

$$1\,700\,t^2-800\ \ t-1300=0$$

Den erhållna andragradsekvationen löser vi med hjälp av

$$x_1,x_2=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad \text{ekvation (2.11)}$$

$$t_1,t_2=\frac{800\pm\sqrt{800^2-(4\cdot 1\,700\ \cdot -1\,300)}}{2\ \cdot 1\,700}$$

$$t_1,t_2=\frac{800\pm\sqrt{9\,480\,000}}{3\,400}=\frac{800\ \pm 3\,079}{3\,400}$$

$$t_1=\frac{800+3\,079}{3\,400}=1{,}14$$

$$t_2=\frac{800\ -3\,079}{3\,400}=-\,0{,}67$$

1+ IRR = 1,14, d.v.s. IRR = 1,14 – 1 = 0,14 (14 %).

Exempel 4

Internräntan kan även beräknas med hjälp av interpolering. Anta att nuvärdet av projektet (kapitalvärde = grundinvestering + nuvärdet av nettoinbetalningarna) är 800 när räntesatsen är 2 procent samt -400 när räntesatsen är 4 procent. Dessa uppgifter framställs i Tabell 2.6 och vi kan läsa mellan raderna att vi söker värdet för X. Vi känner alltså till värdena i ändarna och talet noll inom nuvärdesintervallet vilket i sin tur motsvarar det obekanta värdet för *X*.

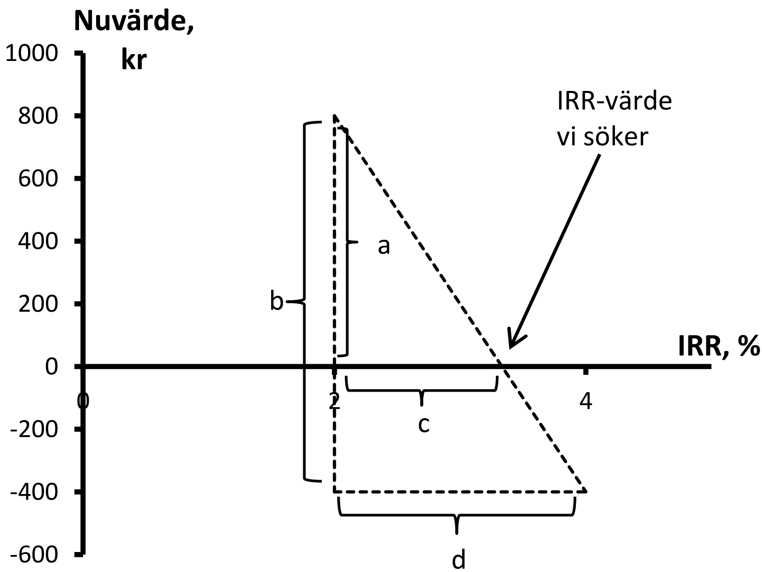
Tabell 2.6: Nuvärdestabell för Exempel 4

Nuvärde (kr)	IRR (%)
800	2
a	c
b 0	d **X**
−400	4

Uppgifterna som redovisas i Tabell 2.6 kan även illustreras i ett diagram. Intervall a i tabellen motsvarar sträckan a i Figur 2.6. På motsvarande sätt ser vi sträckorna b, c och d. Som beskrivs i Tabell 2.6 utgörs det sökta värdet för IRR av summan av räntesatsen 2 procent (när nuvärde är 800) och sträckan c, d.v.s. avståndet mellan 2 procent till det obekanta värdet X. Vi beräknar denna sträcka med hjälp av interpolering. Vi löser ut sträckan c från ekvation (2.8):

$$\mathrm{c} = \frac{800 - 0}{800 - (-400)} \cdot (4 - 2) = 1{,}34 \quad \rightarrow \quad \mathrm{IRR} = 2 + 1{,}34 = 3{,}34$$

Figur 2.7: Interpolering för Exempel 4



Exempel 5

I den senare delen av Exempel 2 (beräkning med hänsyn till restvärde) fick vi ett nuvärde på nettoinbetalningarna på 332 tkr vid 10 procents ränta. För att svara på frågan om projektets lönsamhet måste vi söka vilket värde IRR antar när nuvärdet är lika med noll. I nedanstående tabell redovisas intervallens övre och nedre gräns. Vi känner till den övre gränsen (NV = 332 och IRR = 10 %) men inte den nedre. Den nedre gränsen bestäms genom att godtyckligt testa olika räntesatser. I detta fall testar vi med 22 procents ränta och så blir nuvärdet lika med minus 15, d.v.s. den nedre gränsen.

Inom nuvärdesintervallet ligger ett nuvärde som är lika med noll. Samtidigt ligger inom IRR-intervallet den räntesats som vi söker, d.v.s. *X*.

Tabell 2.7: Nuvärdestabell för Exempel 5

Nuvärde (tkr)	IRR (%)
332	10 %
a	c
b 0	d **X**
−15	22 %

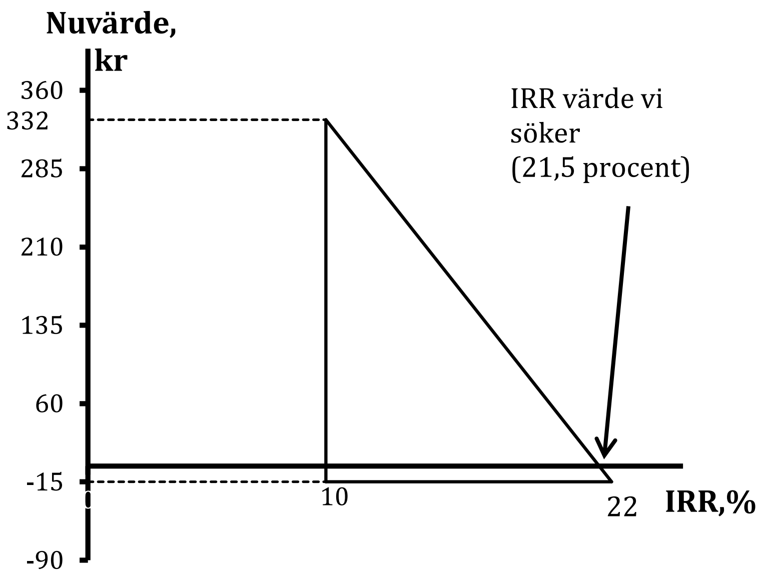
Den internränta vi söker är summan av projektets 10 procent (vid ett nuvärde på 332) plus sträckan c, d.v.s. IRR = 10 + c. Sträckan c blir utifrån ekvation (2.8):

$$a \cdot d = c \cdot b \quad \rightarrow \quad c = \frac{a}{b} \cdot d \quad \rightarrow \quad c = \frac{332 - 0}{332 - (-15)} \cdot (22 - 10) \approx 11{,}5$$

IRR = 10 + 11,5= 21,5 procent.

Vid en lönsamhet på 21,5 procent blir projektets nuvärde lika med noll.

Figur 2.8: Interpolering för Exempel 5



Exempel 6

Beräkning av IRR kan också ha sin början som framställs i Tabell 2.8. I denna tabell redovisas kapitalvärdets nuvärde på den vertikala axeln och kalkylräntan på den horisontella axeln. Ju högre räntesats desto lägre kapitalvärde. Kapitalvärdet är alltså nuvärdet av nettoinbetalningar minus grundinvesteringen. Återigen, med hjälp av interpolering kan vi beräkna värdet för IRR när kapitalvärdets nuvärde är lika med noll.

Tabell 2.8: Kapitalvärdets beroende av kalkylräntan (i tkr)

Kalkyl-ränta (%)	(1) Grund-investering	(2) Nuvärdet av nettoin-betalningar	(1) + (2) Kapitalvärdet (nuvärdet)
2	-400	782	382
4	-400	606	206
6	-400	520	120
8	-400	466	66
10	-400	418	18
12	-400	372	-28
14	-400	336	-64

Vi har ringat in intervallet 18 och minus 28 för att markera att där emellan ligger talet noll för kapitalvärdet. Detta innebär att den räntesatsen som fås här ligger inom intervallen 10 till 12 procent.

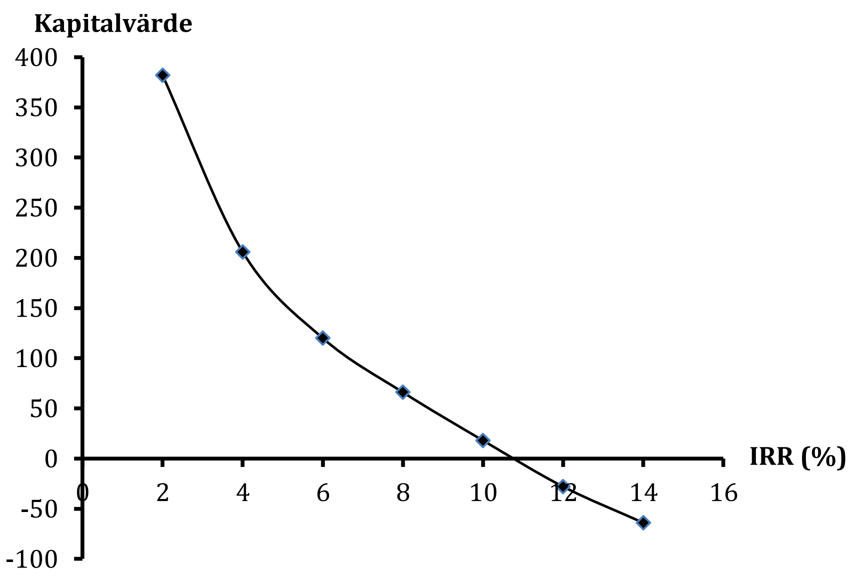
Tabellens uppgifter illustreras i Figur 2.9. Vi lägger IRR på den horisontella axeln och kapitalvärdet på den vertikala axeln. När kurvan sammanfaller med den horisontella axeln är nuvärdet lika med noll och värdet för IRR har erhållits.

I detta exempel sker interpolering mellan 10 och 12 procent i räntesats. Vi använder för interpolering ekvation (2.8), då fås:

$$IRR = 10 + c \quad \rightarrow \quad c = \frac{18 - 0}{18 - (-28)} \cdot (12 - 10) \approx 0{,}78$$

$$IRR = 10 + 0{,}78 = 10{,}78\, procent$$

Figur 2.9: Kapitalvärdet som en funktion av IRR



2.5 Annuitet

Annuitetslån innebär att låntagaren betalar lika stort belopp vid varje betalningstillfälle. Metoden mäter den genomsnittliga årskostnaden. Återbetalning av ett lån omfattar alltså dels ränta, dels amortering på skulden.

Beloppet som kommer att betalas vid varje tillfälle erhålls med hjälp av nedanstående formel för beräkning av annuitetsfaktorn.

$$\frac{r}{1-(1+r)^{-n}} \qquad \text{ekvation (2.12)}$$

Låt oss anta att vi lånar 10 000 kronor till 4 procent ränta med en återbetalningstid på 4 år. Räntan (0,04) och tiden (4 år) sätts in i formeln och då fås annuitetsfaktorn 0,2755. Vidare multiplicerar vi 10 000 kronor med 0,2755 vilket ger 2 755 kronor. Detta innebär att vi i fyra år kommer att betala ett fast belopp på 2 755 kronor.

$$10000 \cdot \frac{0{,}04}{1-(1+0{,}04)^{-4}} = 2755$$

Exempel 7

Ines och Alma tar tillsammans ett lån på 40 000 kronor. Annuitetslånet ska återbetalas på 5 år. Betalning ska ske en gång per år i slutet av varje år. Låneräntan är 5 procent. Beräkna annuiteten och dess fördelning på räntor och amorteringar under löptiden.

$$\frac{r}{1-(1+r)^{-n}} = \frac{0{,}05}{1-(1+0{,}05)^{-5}} = 0{,}231$$

Lånebeloppet gånger annuitetsfaktorn (40 000 · 0,231) blir lika med 9 239 kronor. Ines och Alma vet nu att en gång per år i fem år kommer dem att betala 9 239 kronor till banken. I betalningsbelopp ingår ränta och amortering enlig följande tabell:

Tabell 2.9: Annuitetslån

År	Ingående skuld	Betalning	Ränta	Amortering
1	40 000	9239	2 000	7 239
2	32 761	9239	1 638	7 601
3	25 160	9239	1 258	7 981
4	17 179	9239	859	8 380
5	8 799	9239	440	8 799
Summa		46 195	6 195	40 000

Vi ser att räntebetalningarna blir lägre och lägre allt eftersom den ingående skulden krymper och en större och större del av betalningen är amortering.

Annuitet som lönsamhetsmått

I Exempel 2 beräknades nuvärde med hänsyn till restvärde. Resultatet visar att projektet är lönsam efter en 6-årsperiod med 332 (tusentals) kronor. Vi kan beräkna annuiteten av investeringen där ett positivt värde innebär att investeringen är lönsam.

$$\text{Annuitet} = -900 \cdot \left(\frac{0{,}1}{1-(1+0{,}1)^{-6}}\right) + 270 + 100 \cdot (1{,}1)^{-6} \cdot \left(\frac{0{,}1}{1-(1+0{,}1)^{-6}}\right) =$$

$$= -900 \cdot 0{,}2296 + 270 + 100 \cdot 0{,}564 \cdot 0{,}2296 = 76{,}3$$

Nuvärde = annuiteten multiplicerad med nuvärdesummefaktorn.

$$\text{Nuvärde} = 76{,}3 \cdot \left(\frac{1-(1+0{,}1)^{-6}}{0{,}1}\right) = 76{,}3 \cdot 4{,}356 = 332{,}36$$

d.v.s. ca 332.

2.6 Med hänsyn till inflation

Inflationen har en tydlig effekt på utvärderingen av samhällsekonomiska projekt, framförallt i länder där inflationen är ett ständigt problem. Inflation definieras som stegring av den allmänna prisnivån vilket innebär en köpkraftsförändring. Om vi till exempel idag kan köpa en vara för hundra kronor, men det om ett år krävs 120 kronor för att köpa samma vara visar det att köpkraften har minskat, eller annorlunda uttryckt, penningvärdet har minskat.

Låt oss förklara med ett enkelt exempel. Anta att en investering på 1 000 kronor ger en avkastning på 50 procent. Det vill säga den nominella räntesatsen är 50 procent vilket innebär att beloppet växer efter ett år till 1 500 kronor. I detta exempel tar vi inte hänsyn till inflationstakten. Samtidigt gör vi följande beräkning: idag kan vi för 1 000 kronor köpa 10 luncher och efter ett år kan vi endast köpa 8 luncher. Detta innebär att priset för en lunch stiger från 100 till 125 kronor, med andra ord, värdet för en lunch har stigit med 25 procent, d.v.s. en inflationstakt på 25 procent.

Ovanstående resonemang leder oss till att avkastningen utan hänsyn till inflationstakten inte är helt korrekt om vi tar hänsyn till tiden och det föreligger inflation. I den egentliga avkastningen finns med löptidsvärdeminskning på pengar. Räntesatsen med inflationen bortväknad benämns real ränta och räntesatsen med inflationen inberäknad benämns som nominell ränta. Sambandet mellan real och nominell ränta anges av följande ekvationer:

$$real\ ränta = \frac{1+nominell\ ränta}{1+inflationstakt} - 1 \qquad \text{ekvation (2.13)}$$

$$nominell\ ränta = [(1 + real\ ränta) \cdot (1 + inflationstakt)] - 1$$

Vi återgår till det tidigare exemplet. Inflationstakten var 25 procent och den nominella räntan var 50 procent. Den reala räntan erhålls med ekvation (2.13).

$$real\ ränta = \frac{1+0{,}50}{1+0{,}25} - 1 = 0{,}2, dvs\ 20\ procent$$

Investeringen har en lönsamhet på endast 20 procent när vi tar hänsyn till inflation och inte 50 procent.

Exempel 8

Reklambyrån Kometen startar sin verksamhet i Göteborg. Verksamheten skall omprövas efter fyra år och därför skall dina beräkningar gälla en period på fyra år. Företaget börjar sin verksamhet med en grundinvestering på 12 000 Euro. Verksamheten beräknas generera en nettoinbetalning på 5 000 Euro per år. Kalkylräntan är 6 procent.

a) Beräkna nuvärdet för detta investeringsprojekt. Är investeringen lönsam?

Tabell 2.10: Nuvärdestabell för Exempel 8

		År 1	År 2	År 3	År 4
Grund-investering	− 12 000				
Nuvärde av netto-inbetalningar		$\frac{5\,000}{(1,06)}$	$\frac{5\,000}{(1,06)^2}$	$\frac{5\,000}{(1,06)^3}$	$\frac{5\,000}{(1,06)^4}$
Summa	− 12 000	4 717	4 450	4 198	3 960

Nuvärde = -G + nettoinbetalningar

= -12 000 + 4 717 + 4 450 + 4 198 + 3 960 = 5 325

Investeringen är lönsam vid beräkning utan hänsyn till inflationstakten.

b) För den kommande 4-årsperioden förutspås en årlig inflationsprognos på 3 procent. Beräkna kapitalvärdet med hänsyn till inflationseffekten. Är investeringen lönsam?

Alternativ 1

Vi börjar med att multiplicera nettoinbetalningarna med inflationstakten.

Tabell 2:11: Nettoinbetalningar med inflationseffekt

År 1	År 2	År 3	År 4
5 000 · 1,03 = 5 150	5 000 · 1,03 = 5 150	5 000 · 1,03 = 5 150	5 000 · 1,03 = 5 150

Därefter beräknar vi de erhållna nettoinbetalningarna med inflationseffekt till nuvärde.

Tabell 2.12: Nettoinbetalningars nuvärde med inflationseffekt

År 1	År 2	År 3	År 4
$\frac{5\,150}{(1{,}06)} =$ 4 858	$\frac{5\,150}{(1{,}06)^2} =$ 4 583	$\frac{5\,150}{(1{,}06)^3} =$ 4 324	$\frac{5\,150}{(1{,}06)^4} =$ 4 079
Nettoinbetalningar = 4 858 + 4 583 + 4 324 + 4 079 = 17 844			

Nuvärde med inflationseffekt = $-$G + Nettoinbetalningar

Nuvärde med inflationseffekt = $-$12 000 + 17 844 = 5 844

Alternativ 2

En kortare variant kan tillämpas om vi räknar om diskonteringsfaktorn med den nominella räntan till real ränta. Vi måste bestämma den reala räntan vilken erhålls genom ekvation (2.13).

$$real\ ränta = \frac{1 + 0{,}06}{1 + 0{,}03} - 1 = 0{,}029$$

Tabell 2.13: Nettoinbetalningars nuvärde med inflationseffekt

År 1	År 2	År 3	År 4
$\frac{5\,000}{(1{,}029)} =$ 4 859	$\frac{5\,000}{(1{,}029)^2} =$ 4 722	$\frac{5\,000}{(1{,}029)^3} =$ 4 589	$\frac{5\,000}{(1{,}029)^4} =$ 4 460
Nettoinbetalningar = 4 859 + 4 722 + 4 589 + 4 460 = 18 630			

Nuvärde med inflationseffekt = $-$G + Nettoinbetalningar

Nuvärde med inflationseffekt = $-$12 000 + 18 630 = 6 630

(De två alternativen erhåller inte exakt samma nuvärde p.g.a. avrundning.)

2.7 Övningar

1. Bertil investerar 70 000 kronor i en frisörsalong. Inbetalningar beräknas till 48 000. Bertil räknar med årliga utbetalningar för underhåll och drift på 13 000. Han kommer att betala ränta och amortera lånet på 12 000. Kalkylränta är 10 procent och tidshorisonten är 5 år. Beräkna nuvärde.

2. En taxiverksamhet investerar i en taxi till en kostnad på 220 000. Inbetalningarna per år uppskattas till 60 000. Livslängden beräknas till 6 år. Taxibolaget beräknar med utbetalningar för drift (15 000 kr) och för lön (25 000kr) per år. Taxibilen beräknas vara värd 95 000 vid slutet av år 6. Använd kalkylränta 3 procent. Vad är nuvärdet av investeringen?

3. Per Persson tar ett lån på 35 000 kronor. Han väljer annuitetslån det vill säga att betalningen ska ske en gång per år i slutet av varje år. Lånet ska återbetalas på 4 år. Låneräntan är 4 procent. Beräkna lånets fördelning på räntor och amorteringar under en fyraårsperiod.

4. Värdet på en tillgång, nu värd 80 000, förväntas öka med 20 procent per år.
   a) Vad är dess värde om 12 år?
   b) Efter hur lång tid är den värd 800 000 kronor?

5. Lars Gunnar Larsson investerar 1 200 kronor. Efter fyra år har hans investering blivit 2 170 kronor. Beräkna lönsamheten.

6. Låt oss anta att en grundinvestering på 1 300 000 Euro. Denna investering beräknas generera 500 000 euro i slutet av det första året och 1 200 000 det andra året. Vad är IRR av investeringen?

7. Dataföretaget ”Computer AB” startar sin verksamhet i Göteborg. Du skall hjälpa ledningen att beräkna om detta investeringsprojekt är lönsamt. Verksamheten skall omprövas efter fem år och därför skall dina beräkningar gälla en period på fem år.

   Ekonomisk information är följande: grundinvestering i datautrusningar för 2 100 Euro. Första årets verksamhet beräknas inbetalningarna bli 2 000 Euro. Därefter beräknas inbetalningarna öka de kommande fyra åren med 200 Euro per år. Man räknar med en årlig utbetalning på 1 600 Euro. Kalkylränta är 5 %

   a) Beräkna kapitalvärdena (nuvärdet) för detta femåriga investeringsprojekt. Är investeringen lönsam?
   b) Beräkna projekts återbetalningstid med hänsyn till räntan. Är investeringen lönsam? Motivera.
   c) För den kommande 5-årsperioden förutspås en årlig inflationsprognos på 2 %. Beräkna kapitalvärdena med hänsyn till inflationseffekten. Är investeringen lönsam?

8. En kommun i Västsverige skall investera i ett nytt datanätverk. Kommunledningen står inför valet av två projekt, A eller B. Nätverket kommer inte att skattefinansieras utan varje kommunavdelning kommer att bekosta driften. Kommunen räknar alltså med att både alternativ A och B kommer att ge årliga inbetalningar på 240 miljoner. Den ekonomiska skillnaden ligger i grundinvesteringen, driftsutbetalningar och restvärde. Ekonomiska fakta för dessa projekt är följande:

	Projekt A	Projekt B
Grundinvestering	-600	-390
Inbetalningar	240	240
Utbetalningar	120	160
Restvärde	100	80
Livslängden	6 år	6 år
Kalkylräntan	6 %	6 %

a) Beräkna kapitalvärdena för båda projekten vid slutet av år 0 (nuvärdet). Är projekten lönsamma? Motivera. Vilket av de två projekten bör genomföras? Motivera.

b) Beräkna respektive projekts återbetalningstid med hänsyn till räntan under förutsättning att restvärdet kan försummas (d.v.s. restvärde = 0). Är investeringarna lönsamma? Vilket av de två projekten bör genomföras? Motivera.

c) Beräkna projekts internränta (IRR) under förutsättning att restvärdet kan försummas (d.v.s. restvärde = 0). Är investeringen lönsam? Vilket av de två projekten bör genomföras? Motivera.

d) Diskutera ovanstående resultat och diskutera måttens relevans som beslutsunderlag vid investeringsbedömning.

9. En viktig väg mellan två byar i Bosnien kommer att byggas med finansieringshjälp från olika biståndsorganisationer. Projektledningen står inför valet av två alternativ, nämligen att bygga med asfalt eller cement. Den tekniska undersökningen visar inga stora skillnader och därför är det den ekonomiska studien som kommer att avgöra vilket av dessa två alternativ man väljer.

   Det svenska konsultföretaget ”Kalkyl lagom” har anlitats för att beräkna lönsamheten i dessa två alternativa byggprojekt. Ekonomiska fakta för dessa alternativ är:

	Asfalt	Cement
Grundinvestering	-39 000	-45 000
Nettoinbetalningar	12 000	12 400
Restvärde	0	6 450
Livslängden	4	4
Kalkylräntan	20 %	20 %
Inflation	12 %	12 %

a) Beräkna kapitalvärdena för båda alternativen år noll. Är investeringarna lönsamma? Motivera. Vilket av de två alternativen kan du föreslå? Motivera.
b) Om beräkningarna inte beaktar inflationseffekten, skulle man föreslå samma projekt som i a)? Beräkna och motivera.
c) Diskutera ovanstående resultat och diskutera måttens relevans som beslutsunderlag vid investeringsbedömning.

2.8 Facit

1. Nuvärde =17 188
2. Nuvärde = − 32 095
3.

År	Ingående skuld	Betalning	Ränta	Amortering
1	35 000	9 642	1 400	8 242
2	26 758	9 642	1 070	8 572
3	18 186	9 642	727	8 915
4	9 271	9 642	371	9 271
Summa		38 568	3 568	35 000

4. a) FV = 713 288

   b) 12,6 år

5. IRR = 0,159 $\Rightarrow$ 15,9 procent
6. IRR = 0,17 $\Rightarrow$ 17 procent
7. a) NV = - G + nettoinbetalningar = - 2 100 + 3 446 = 1 279

   b) 3 år och 7 månader

   c) NV = - G + nettoinbetalningar = - 2 100 + 3 632 = 1 532

8.

a) Projekt A $\Rightarrow$ Nuvärde = 60,5

Projekt B $\Rightarrow$ Nuvärde = 59,4

b) Projekt A $\Rightarrow$ 6 år och en månad

Projekt B $\Rightarrow$ 5 år och 11 månader

c) Projekt A $\Rightarrow$ IRR = 5,5 % (Investeringen är ej lönsam då IRR är lägre än kalkylräntan på 6 procent.)

d) Projekt B $\Rightarrow$ IRR = 6,25 % (Investeringen är lönsam då IRR är högre än kalkylräntan på 6 procent.)

9. a) Asfalt $\Rightarrow$ NV = 1 555

Cement $\Rightarrow$ NV = 1 809

b) Asfalt $\Rightarrow -7\,935$ förlust.

Cement $\Rightarrow -9\,789$ förlust

Vi väljer asfalt då förlusten är mindre.

Kapitel 3 – Beslutsteori

”The probable is what usually happens.” - Aristoteles

Beslutsanalys kan definieras som den logiska och kvantitativa analys av alla de faktorer som påverkar ett beslut. Det primära syftet med beslutsanalys är att öka sannolikheten för goda resultat genom att fatta bra beslut. Ett gott resultat är något som vi vill ska inträffa, medan ett bra beslut är ett som är i linje med den information och de preferenser beslutsfattaren har. Detta kapitel handlar om hur beslutsfattare kan komma fram till rationella beslut med hjälp av sannolikhetsteori.

3.1 Vad är sannolikhet?

En sannolikhet avser resultaten av en situation som vi kallar ett experiment. Ett experiment är en process genom vilken data erhålls genom observation av okontrollerade händelser i naturen eller genom kontrollerade rutiner i ett laboratorium.

Om du slår en tärning, är detta ett experiment som kan ha ett av sex utfall, beroende på vilket nummer som kommer upp. Eller om du kastar ett mynt, är de möjliga utfallen krona eller klave. Ett experi-

ment kan resultera i olika resultat. Till exempel så kan resultatet av experimentet med tärningen visa fyra prickar.
Utfallsrummet (S) är uppsättningen av alla möjliga utfall som kan uppstå som ett resultat av ett särskilt experiment. Exempelvis är utfallsrummet för experimentet där du slog en tärning

$$S = \{1,2,3,4,5,6\} \qquad \text{ekvation (3.1)}$$

I exemplet med ett kastat mynt blir utfallsrummet

$$S = \{krona, klave\} \qquad \text{ekvation (3.2)}$$

Då man anger sitt utfallsrum är det viktigt att alla tänkbara utfall finns med och att utfallen inte kan inträffa samtidigt, d.v.s. exakt ett av utfallen i utfallsrummet kommer att inträffa när försöket utförs.

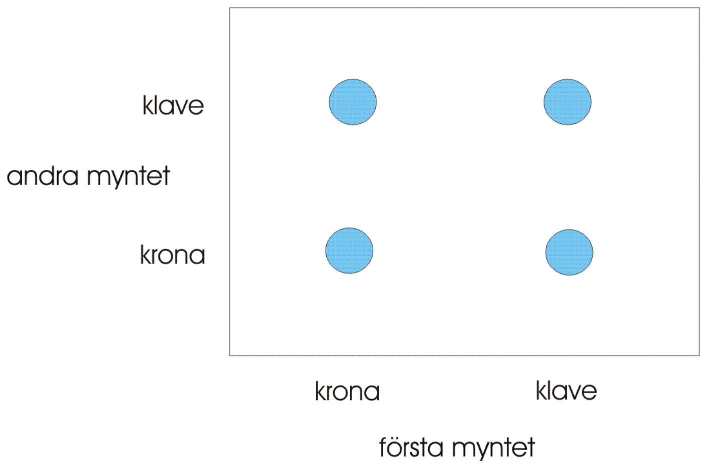
Anta att vi ska kasta två mynt samtidigt. Utfallsrummet för att kasta två mynt blir:

$$S = \{krona-krona, krona-klave, klave-krona, klave-klave\}$$

ekvation (3.3)

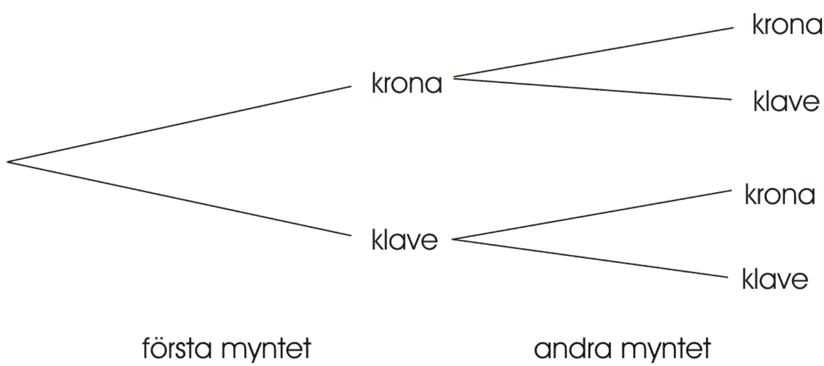
Vi kan då göra en grafisk framställning av de olika utfallen för de båda mynten där vi markerar utfallet av det första myntet på x-axeln och utfallet av det andra myntet på y-axeln. Prickarna i figuren är utfallsrummets element, d.v.s. alla de utfall som kan inträffa.

Figur 3.1: Utfallsrum vid kast av två mynt



Ett annat sätt att illustrera ett utfallsrum, särskilt då vi gör experimentet i flera steg, är att använda ett träddiagram.

Figur 3.2: Utfallsrum vid kast av två mynt



Varje så kallad ”gaffel” på ett sådant diagram visar de möjliga utfall som kan uppstå vid ett visst stadium av experimentet. Till exempel, om du kastar två mynt har det första myntet två möjliga utfall, det blir krona eller klave. Det andra myntet har också två möjliga utfall. Dessa två utfall finns representerade i de två gafflarna till höger och det första myntets utfall finns i den vänstra gaffeln.

Sannolikheten för en händelse är andelen gånger denna händelse inträffar på lång sikt, om försöket upprepas många gånger på lika villkor. Alltså, sannolikheten att fyra prickar kommer upp vid kast med en tärning är andelen gånger denna händelse inträffar om vi kastar tärningen många, många gånger, eller att vi får krona vid kast av ett mynt är andelen gånger denna händelse inträffar om vi kastar myntet många, många gånger.

Generellt kan vi säga, om ett experiment upprepas väldigt många gånger (M) och händelsen A inträffar m gånger är sannolikheten för händelsen A

$$P(A) = \frac{m}{M} \qquad \text{ekvation (3.4)}$$

Alltså, om en tärning är symmetrisk är sannolikheten för att en fyra ska komma upp 1/6, eftersom det vid många tärningskast kommer att hända en sjättedel av gångerna. Även om tärningen inte skulle vara symmetrisk så stämmer denna definition. Vi kastar tärningen många, många gånger och skriver upp hur många gånger varje utfall inträffar.

Baserat på denna definition av en sannolikhet måste följande tre fundamentala propositioner vara sanna:

1. Sannolikheten för en omöjlig händelse måste vara noll. Detta följer av definitionen av en sannolikhet från ekvation (3.4), för om en händelse är omöjlig, måste antalet gånger händelsen inträffar (m) vara lika med noll.
2. Sannolikheten för en händelse som är säker måste vara lika med 1. Även detta följer av definitionen av en sannolikhet i ekvation (3.4), för om en händelse är säker, måste antalet gånger händelsen inträffar (m) vara lika med antalet gånger experimentet äger rum (M). Observera att detta innebär att sannolikheten för att ett visst element av utfallsrummet sker är 1, eftersom utfallsrummet inkluderar alla möjliga utfall.
3. Sannolikheten för en händelse skall inte vara mindre än noll och inte större än 1. Också detta följer av definitionen i ekvation (3.4). Eftersom antalet gånger alla händelser inträffar (m) inte kan vara negativt, kan dess sannolikhet inte vara lägre än noll och eftersom antalet gånger någon händelse inträffar inte kan överstiga antalet gånger experimentet äger rum (M), kan dess sannolikhet inte överstiga 1.

3.2 Beräkna sannolikheten för en händelse

Sannolikheten för att en händelse kommer att äga rum är summan av sannolikheterna för de resultat som utgör händelsen.

Till exempel, om en symmetrisk tärning kastas, vad är sannolikheten att det kommer upp udda antal prickar? Låt oss kalla denna händelse A. Händelsen A kan brytas ner till tre olika utfall: (1) tärningen visar en prick, (2) tärningen visar tre prickar, och (3) tärningen visar fem prickar. Med andra ord, dessa tre utfall blir tillsammans händelsen A = ”udda antal prickar”.

Eftersom sannolikheten för varje utfall är $1/6$ är sannolikheten för händelsen:

$$P(A)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2} \qquad \text{ekvation (3.5)}$$

Det finns tre olika sätt att beräkna sannolikheter. Observera att dessa tre sätt inte är alternativ. För de flesta händelser så blir bara en viss metod för mätning möjlig.

- Tillvägagångsättet: ”A priori”: I denna metod beräknas sannolikheten för att en händelse skall inträffa genom en process av logik. Här behövs ingen erfarenhet eller några bedömningar göras. I denna kategori faller sannolikheter som gäller mynt, tärningar och spelkort in.
- Tillvägagångsättet: ”Relativ frekvens”: När händelsen kan upprepas ett stort antal gånger kan dess sannolikhet beräk-

nas med hjälp av ekvation (3.4). Exempelvis, anta att vi ska bestämma sannolikheten för att det regnar en given dag i april i Göteborg. Vi tittar då på vädret i april i Göteborg de senaste 10 åren och noterar att det regnade 108 dagar av 300.

$$P(regn) = \frac{\text{antal regndagar}}{\text{totalt antal dagar } (10 \cdot 30)} = \frac{108}{300} = 0{,}36$$

ekvation (3.6)

- ”Subjektivt” tillvägagångssätt: Sannolikheter kan bedömas subjektivt, men det är bra att veta att det finns en diskussion bland statistiker gällande giltigheten av att göra så. Ett exempel på ett subjektivt förhållningssätt kan vara följande. För att beräkna sannolikheten att händelsen ”att uppnå politisk enighet i en region till år 2020” skall inträffa kan vi inte använda någon av de första två metoderna. Men en person kan uttrycka sina egna aningar om sannolikheten för denna händelse genom att jämföra den med en händelse av känd sannolikhet, är t ex det mer eller mindre sannolikt än att få krona vid kast av ett mynt?
  Processen vid vilken man bedömer en subjektiv sannolikhet på ett korrekt sätt är ett ämnesområde i sig och bör därför inte betraktas som rena gissningar.

Då väl sannolikheterna har beräknats enligt ovan behandlas de på exakt samma sätt.

3.3 Teori om osäkerhet

Väntevärde

Väntevärdet kan tolkas som medelvärdet för ett försöks utfall om försöket upprepas väldigt många gånger. Om vi multiplicerar sannolikheterna med konsekvenserna får vi väntevärdet (eller det förväntade värdet). Väntevärdet för en diskret slumpmässig händelse, *X,* förkortas *E(X)* och beräknas

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p(x_i) \qquad \text{ekvation (3.7)}$$

där x_i är de möjliga utfallen och $p(x_i)$ är sannolikheterna för de n utfallen. Man skulle kunna säga att väntevärdet är ett ”lägesmått” som anger var sannolikhetsmassan ligger i ”genomsnitt”.

Anta att vi ska kasta tärning. Vi låter händelsen A vara antal prickar som visas vid ett tärningskast. Vi känner till utfallen. Utfallsrummet ges av ekvation (3.1). Vi känner till sannolikheten för varje utfall. Dessa är 1/6. Vi kan nu beräkna väntevärdet med hjälp av ekvation (3.7).

$$E(A) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = 3{,}5$$

Väntevärdet för tärningskastet, eller händelsen A, är 3,5. Detta betyder att om vi kastar tärningen oändligt många gånger så kommer den att visa 3,5 prickar i genomsnitt.

Genom att använda väntevärdet kan vi väga olika val mot varandra. Men frågan är om det är rimligt att begränsa sig till endast sannolikhetsfunktionen. Är det inte mer rimligt att människors preferenser om osäkerhet är mer komplicerade än så? Kanske är det rimligare att maximera individens förväntade nytta istället för väntevärdet. Att använda väntevärdet innebär att man antar riskneutralitet. I avsnittet nedan förklaras begreppet riskneutral men först definieras begreppet nytta.

Nyttofunktioner

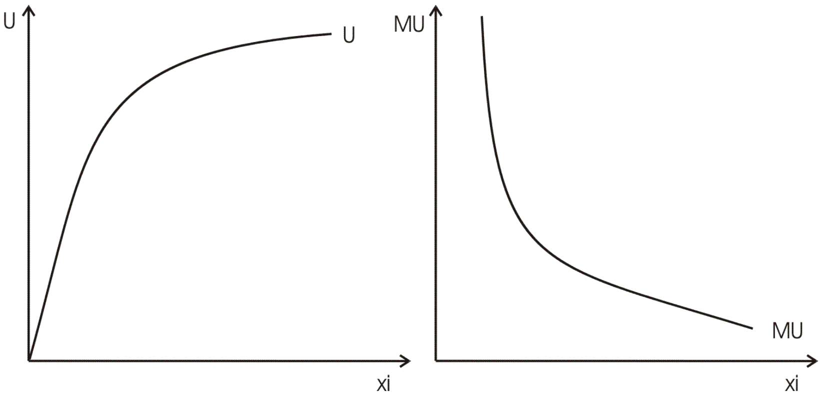
Ofta måste vi fatta beslut om saker där utfallen inte enkelt kan kvantifieras. Det kan handla om ett företags rykte, stolthet eller någons välbefinnande. Inom samhällsvetenskapen och filosofin används begreppet nytta. Normalt antas det i de flesta modeller att individen strävar efter att maximera nyttan. Hur nytta (U) ökar genom konsumtion av varor (x_i) kan skrivas med en nyttofunktion.

$$U = f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) \quad \text{ekvation (3.8)}$$

Det antas också oftast att nyttan för varje ytterligare konsumerad enhet är positiv men avtagande i storlek. Detta illustreras i Figur 3.3.

I den vänstra figuren nedan ser vi hur nyttan ökar med ökande konsumtion av vara x_i, då alla andra varor hålls konstanta. I den högra figuren visas ökningen i nyttan då vi ökar x_i, även kallat marginalnyttan (MU).

Figur 3.3: Funktioner för nytta och marginalnytta



Om en individ har riskneutrala preferenser innebär det att hon varken ogillar eller gillar risk. En riskneutral individs beslut påverkas inte av risken i en situation, d.v.s. en riskneutral individ är indifferent i valet mellan två alternativ där det förväntade värdet är samma även om det ena alternativet är mer riskfyllt. Att vara indifferent mellan två alternativ innebär att individen värderar alternativen lika högt. Ta till exempel en person som erbjuds antingen 100 kronor eller 50 procents chans var på 200 kronor och 0 kronor. En riskneutral person skulle inte föredra det ena framför det andra därför att väntevärdet av det osäkra alternativet är

$$0{,}5 \cdot (200) + 0{,}5 \cdot (0) = 100 \qquad \text{ekvation (3.9)}$$

d.v.s. lika mycket som det säkra alternativet.

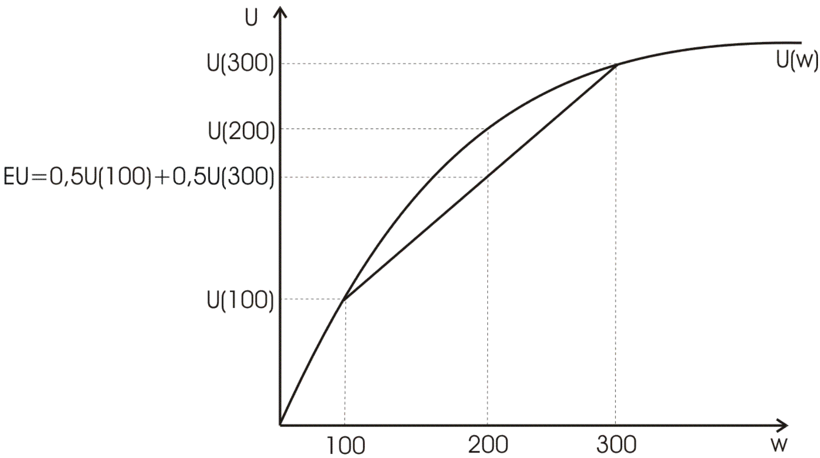
Normalt antar vi att människor ogillar risk. Nationalekonomer använder begreppet riskaversion för att beskriva ogillandet av risk. Definitionen av begreppet riskaversion är att en individ är riskaversiv då hennes nytta av det förväntade värdet är högre än den förväntade nyttan. Låt oss anta att individen ska spela ett spel kallat ”kasta ett mynt”. Om myntet visar klave innebär det en förlust på 100 kronor. Skulle myntet visa krona blir det vinst på 100 kronor. Anta vidare att spelaren har en ursprunglig förmögenhet på 200 kronor. Det förväntade värdet av detta spel är 200 kronor enligt beräkningen

$$0{,}5 \cdot (200 - 100) + 0{,}5 \cdot (200 + 100) = 200 \qquad \text{ekvation (3.10)}$$

d.v.s. samma som spelaren har från början. Vi kan uttrycka nyttan av det förväntade värdet som U(200), medan den förväntade nyttan kan utryckas som EU=0,5·U(100)+0,5·U(300). Vid riskaversion gäller att U(200)>EU, eller med andra ord, att man hellre vill ha 200 kronor i handen än spela ett spel där det förväntade värdet är 200 kronor. Situationen är beskriven i Figur 3.4 där w är det monetära värdet eller förmögenhet (w = wealth).

Nedanstående nyttofunktion beskriver nyttan som en funktion av förmögenhet (istället för konsumtion).

Figur 3.4: Riskaversion

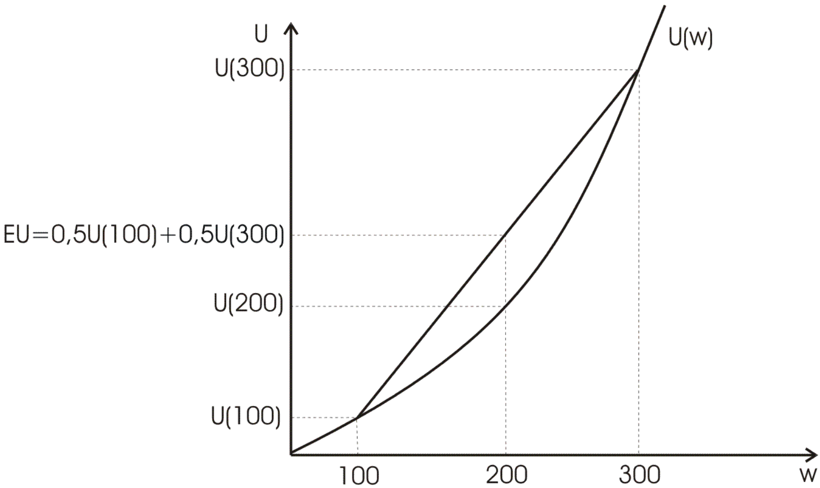


Alla nyttofunktioner ser inte ut så här. Även om man kan förvänta sig att nyttan ökar med förmögenheten (w) kan formen på nyttofunktionen variera mycket beroende på beslutsfattarens preferenser.

I Figur 3.4 ovan kunde vi se att beslutsfattarens nytta ökade med förmögenheten men till en avtagande takt. Vi kan med andra ord säga att en ökning med 1 krona i w leder till en mindre och mindre ökning i nytta då vi ökar w. Dessa beslutsfattare föredrar spel med mer säkert utfall framför ett med mindre säkert utfall trots att det förväntade värdet på alternativen är lika.

En beslutsfattare vars nytta ökar med w men till en ökande takt, d.v.s. en ökning i w med 1 krona leder till en större och större ökning i nyttan för stigande *w,* är en riskälskare och visas i Figur 3.5. En riskälskare väljer hellre att spela ett spel där det förväntade värdet är 200 kronor än att ha 200 kronor i handen, d.v.s. U(200)<EU.

Figur 3.5: Spelglädje

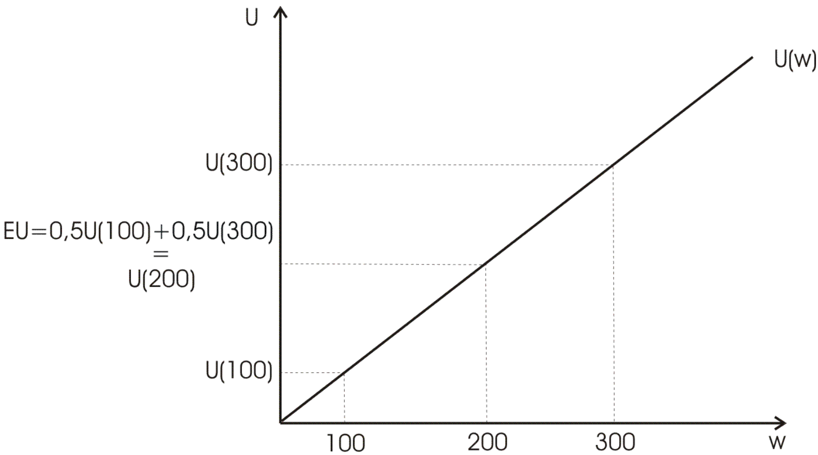


Nyttofunktionen i Figur 3.6 visar en riskneutral beslutsfattare. Här ser vi att nyttofunktionen ökar med en konstant takt. Detta innebär att en ökning med 1 krona i *w* leder till en konstant ökning i nyttan vid ökande *w*. För en riskneutral individ skulle U(200)=EU. Nyttofunktionen är med andra ord en linjär funktion av *w*,

$$U = a + bw \qquad \text{ekvation (3.11)}$$

Där U är nytta, *w* är förmögenhet och *a* och *b* är konstanter med *b* > 0.

Figur 3.6: Riskneutralitet



Nedanstående exempel illustrerar diskussionen om beslutsfattares riskpreferenser på ett enkelt sätt.

Exempel: Riskaversiv eller riskälskare?

Klara och Finn erbjuds båda att välja mellan en säker vinst på 200 kronor eller att delta i ett spel där sannolikheten att vinsten blir 400 kronor är 0,5 och 0,5 att man förlorar 100 kronor.

Klara väljer att spela spelet och Finn väljer den säkra vinsten på 200 kronor. Kan vi dra slutsatsen att Klara är en riskälskare och att Finn är riskaversiv?

Eftersom spelets förväntade värde är

$$0{,}5 \cdot (400) + 0{,}5 \cdot (-100) = 150 \qquad \text{ekvation (3.12)}$$

måste Klara vara en riskälskare eftersom hon väljer ett alternativ med mindre säkert utfall trots att det förväntade värdet är lägre än det säkra alternativet.
När det gäller Finn så skulle han antingen kunna vara riskaversiv eller riskneutral. Om han var riskaversiv skulle han välja det säkra utfallet eftersom det både har högre förväntat värde och ger mindre risk jämfört med att spela spelet. Men om han var riskneutral skulle han också välja de säkra 200 kronorna eftersom de har högre förväntat värde jämfört med spelets.

I den fortsatta diskussionen kommer vi att anta att beslutsfattaren är riskneutral.

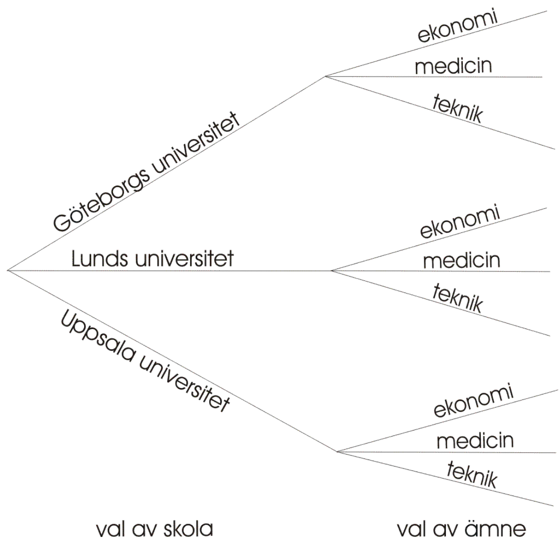
3.4 Beslutsträd

I många praktiska situationer är det viktigt att kunna beräkna det antal sätt på vilka en händelse kan inträffa. Sådana beräkningar måste ofta utföras i syfte att beräkna sannolikheten för en händelse.
Vi börjar med några exempel utan osäkerhet. Till exempel, på hur många sätt kan en student välja skola och inriktning för sina universitetsstudier?
Ett användbart sätt att lösa sådana problem kan vara med ett träddiagram eftersom det visar varje valbart steg i processen och slutligen vad utfallen blir. Figur 3.7 visar ett träddiagram med de val en student står inför. Som vi kan se finns tre grenar öppna vid studen-

tens första val: Göteborgs universitet, Lunds universitet och Uppsala universitet. När den unga studenten valt skola går hon vidare i trädet och skall välja inriktning på sina studier.

Som vi kan se av träddiagrammet är det tre alternativ vid varje val. Först tre alternativ vid val av skola och sedan tre alternativ vid val av ämne. Vi ser då att genom att para ihop alla olika möjliga alternativ ger det studenten $(3) \cdot (3) = 9$ olika sätt att kombinera dessa. Detta betyder att när det andra steget har slutförts finns det nio olika utfall som motsvarar punkterna på högra sidan av Figur 3.7.

Figur 3.7: Träddiagram för en students två val



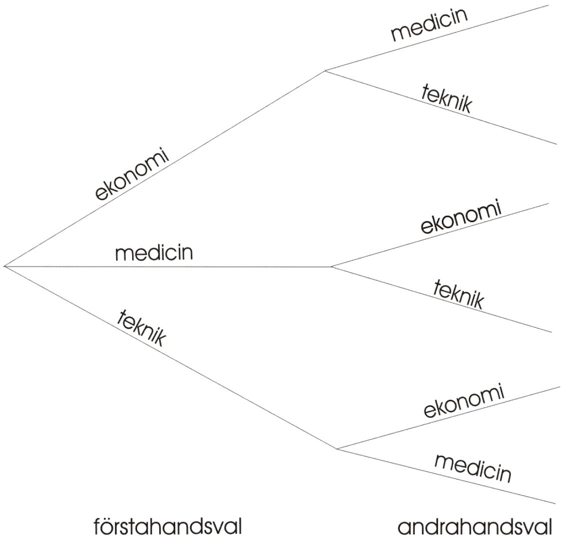
Om vi skall generalisera detta kan vi säga att om det finns m olika val totalt och det finns n_1 objekt (valalternativ) vid första valet och n_2 objekt vid det andra, …, och n_m objekt vid det m-te valet kan antal sätt detta kan kombineras skrivas

$$n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_m \qquad \text{ekvation (3.13)}$$

För att illustrera detta kan vi ta ett exempel. Anta att studenten ska söka två av de tre utbildningarna (ämnena) vid Göteborgs universitet från exemplet ovan. Hon ombeds rangordna utbildningarna vid inlämnandet av sin ansökan, d.v.s. hon måste ange sitt förstahandsval och sitt andrahandsval.

Hon har tre ämnen att välja bland vid sitt första val, men när hon sen valt en utbildning finns det bara två kvar då hon ska göra sitt andra val. Detta illustreras i träddiagrammet i Figur 3.8 nedan.

Figur 3.8: Träddiagram av studentens rangordning av utbildning



Alltså, i det här exemplet blir antalet val 2 (m) och antal alternativ vid första valet är 3 (n_1) och antalet alternativ vid andra valet är 2 (n_2), d.v.s.

$$n_1 \cdot n_2 = (3) \cdot (2) = 6 \qquad \text{ekvation (3.14)}$$

3.6 Beslut under osäkerhet

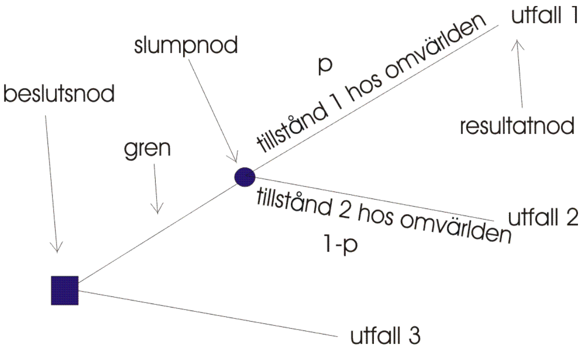
Beslutsfattaren måste göra ett val, eller kanske en serie av val bland olika handlingsalternativ. Vidare leder detta val till någon konsekvens, men beslutsfattaren kan inte i förväg veta exakt vilken typ av

konsekvens eftersom det beror på någon oförutsägbar händelse, eller serie av händelser, samt på valet i sig.
Beslutsteori beskriver hur man bäst bör fatta beslut i en värld där vi inte har fullständig information och inte fullständig kontroll över vad som kommer att ske. Vi kan uttrycka det som en situation med två spelare. Den ena är beslutsfattaren och den andra är omvärlden. Beslutsfattaren gör olika analyser och beräkningar och beslutar sig sedan för en viss handlingsstrategi i ett försök att uppnå ett så gynnsamt resultat som möjligt. Den andra spelaren är helt omedveten. Omvärlden gör inga analyser eller beräkningar och försöker heller inte uppnå något speciellt utfall eller resultat. Omvärlden genererar händelser på ett rent slumpmässigt sätt.

Hittills har vi ritat träddiagram eller beslutsträd utan noder. En nod är det som knyter ihop två eller flera grenar. På ett beslutsträd finns det tre olika sorters noder: beslutsnoder (fyrkanter), slumpnoder (cirklar) och resultatnoder (siffror som representerar utfall).

Efter varje beslutsnod går det lika många grenar som det finns beslutsalternativ i den situationen. Från varje slumpnod går lika många grenar som det finns möjliga tillstånd. En gren är den logiska sekvensen mellan noderna. Vid en resultatnod går det inga grenar utan nu har vi kommit till slutet och här står utfallet av denna gren. Två viktiga begrepp inom beslutsteori är beslutsalternativ och tillstånd hos omvärlden. I Figur 3.10 nedan finner vi ovanstående begrepp.

Figur 3.10: Exempel på beslutsträd med noder



I figuren ovan finns endast en beslutspunkt (beslutsnod) och två alternativ. Slumpnoden har bara två grenar och det innebär att det bara finns två tillstånd hos omvärlden.

Med hjälp att ett beslutsträd kan beslutsfattaren enkelt visualisera problemet. Men beslutsträd är viktigare än det verkar. Genom att rita upp ett beslutsträd, även då sannolikheter och dess utdelningar inte bedömts korrekt och gör att beslutsfattaren tvivlar på optimaliteten av lösningen hon har fått, kommer hon att ha fått en bättre förståelse för sitt beslutsproblemet. Enbart detta i sig bör hjälpa beslutsfattaren att hitta en bra lösning på problemet. Ett beslutsträd är alltså också ett bra psykologiskt verktyg.

Payoff-matris

En payoff-matris är en samling information i tabellform innehållande de värden som utdelningen ger i samband med alla tänkbara åtgärder inom varje tillstånd i ett beslutsproblem. Om vi listar alla de *n* alternativ (a_1, a_2, …, a_n) som beslutsfattaren kan välja mellan som rader och alla de *k* olika tillstånden hos omvärlden (s_1, s_2, …, s_k) som kolumner kan vi fylla varje utfalls payoff i tabellen och på så sätt erhålla en payoff-matris. Denna payoff-matris illustreras i Tabell 3.1 nedan.

Tabell 3.1: Payoff-matris

	Tillstånd hos omvärlden				
Alternativ	s_1	s_2	s_3	$\cdots$	s_k
a_1					
a_2					
a_3					
$\vdots$					
a_n					

Vad är det beslutsfattaren försöker åstadkomma med sitt beslut? Om vi antar att hon är en rationell beslutsfattare, så kommer beslutsfattaren att studera payoff-erna och välja det alternativ som tillfredsställer hennes behov bäst.

Beslutsanalysens steg

Vi kommer att använda oss av flera enkla exempel för att visa hur beslutsanalys fungerar. Dessa exempel är endast avsedda för att illustrera tekniken och är inte fullt realistiska som beslutsproblem.

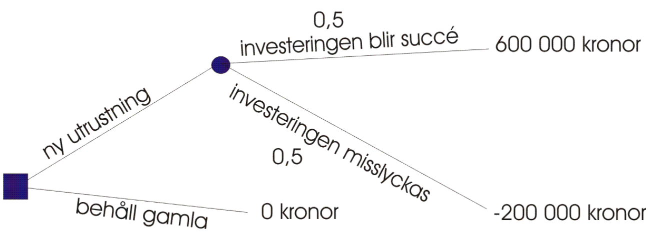
Innan vi tar ett exempel ska vi strukturera upp stegen i en beslutsanalys.

1. Rita trädet: Det första steget kanske låter enkelt men det är ofta det svåraste. Här måste du tänka ut de logiska sekvenserna, d.v.s. hur grenarna ska vara och deras relation till varandra.
2. Fyll i utfallen (payoff-erna): Nästa steg blir att fylla i alla utfall. Dessa ska in i slutet av varje gren på trädet.
3. Stoppa in sannolikheterna: Vissa grenar sitter ihop med en slumpnod. Efter dessa måste de kommande grenarna få sannolikheter. Observera att grenar som kommer från beslutsnoder inte har sannolikheter på sig eftersom beslutsfattaren inte chansar när han eller hon väljer gren från en sådan nod.
4. Baklängesinduktion: Vid det här steget börjar vi att lösa problemet bakifrån. Proceduren går till som så att vi startar med utfallen och arbetar oss bakåt till början av trädet.
5. Summera den optimala vägen: Det sista steget innebär att vi inspekterar våra resultat från baklängesinduktionen och hittar den optimala vägen genom trädet.

Exempel: Ny utrustning på sjukhusavdelning

En sjukhusavdelning måste bestämma sig för om de skall investera i en ny utrustning av något slag eller behålla den de har. Konsekvensen av detta val är osäkert eftersom beslutsfattaren inte vet säkert om den nya utrustningen kommer att vara betydligt bättre än den nuvarande. Anta att den nya utrustningen kostar 200 000 kronor. Om den nya utrustningen är bättre, kommer sjukhusavdelningen att spara 800 000 kronor (vilket ger ett resultat på 800 000 – 200 000 = 600 000 kronor), men om den inte förbättrar deras verksamhet har den kostat avdelningen 200 000 kronor. Anta vidare att den riskneutrala beslutsfattaren för avdelningen tror att det är 50 procents chans att investeringen blir lyckad och 50 procents chans att den blir misslyckad. Nedanstående figur illustrerar detta med ett beslutsträd.

Figur 3.11: Beslutsträd för sjukhusavdelningen



När vi nu har ett sådant beslutsträd, är det lätt att avgöra vilken gren beslutsfattaren bör välja för att maximera förväntat extra resultat till avdelningen.

Den process genom vilken vi löser detta problem, baklängesinduktion, kräver att vi börjar på den högra sidan av beslutsträdet, där det ekonomiska utfallet finns. Det första steget är att beräkna det förväntade värdet för grenarna som ligger omedelbart till vänster om dessa siffror. Eftersom det finns en sannolikhet på 0,5 att den gren som kulminerar i en vinstökning på 600 000 kronor kommer att vara utfallet och en sannolikhet på 0,5 att den gren som kulminerade i en vinstminskning av 200 000 kronor kommer att vara utfallet, beräknas det förväntade värdet av att välja att genomföra denna investering enligt

$$
\begin{aligned}
&E(\text{utfall vid slumpnoden}) = \\
&= 0{,}5 \cdot (600\,000) + 0{,}5 \cdot (-200\,000) = 200\,000
\end{aligned}
$$

ekvation (3.15)

Det uträknade talet på 200 000 kronor är det förväntade värdet av att befinna sig på denna gren. Nu flyttar vi längre åt vänster och ser att beslutsfattaren står inför valet mellan (1) att med säkerhet inte få någon extra vinst d.v.s. ett resultat på 0 eller (2) det förväntade värdet på 200 000 kronor i extra vinst. Om beslutsfattarens mål är att maximera det förväntade värdet (i detta fall avdelningens vinst) borde han välja att köpa in den nya utrustningen eftersom 200 000 > 0. Ibland skriver man denna siffra (200 000) vid slumpnoden och markerar den andra grenen (den som inte är optimal) med två streck över grenen.

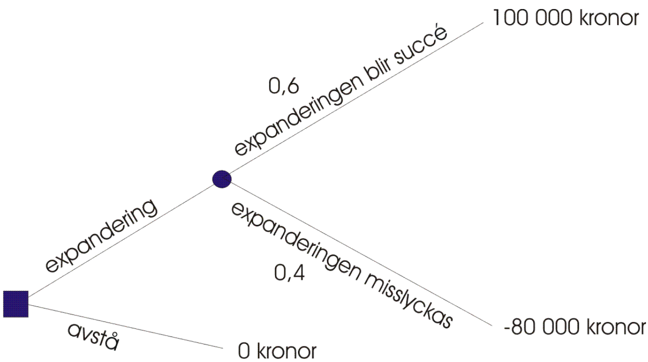
Exempel: Expandera eller inte?

En beslutsfattare på ett företag måste bestämma om de skall expandera en avdelning eller inte. Han tror att sannolikheten för att expansionen lyckas är 0,6 och att den misslyckas är 0,4. Om expansionen lyckas blir resultatet 100 000 kronor och om den misslyckas blir resultatet en förlust på 80 000 kronor.
Nu konstruerar vi ett beslutsträd och löser problemet givet att beslutsfattaren är riskneutral.

Vi beräknar väntevärdet av alternativet expandera och erhåller

$$0{,}6 \cdot (100000) + 0{,}4 \cdot (-80000) = 28000 \qquad \text{ekvation (3.16)}$$

Figur 3.12: Beslutsträd för företaget



Beslutsfattaren skulle välja att expandera.

Skulle beslutsfattarens beslut ändras om han trodde att sannolikheten för att lyckas istället var 0,5?

Vi ställer upp samma ekvation som tidigare men byter ut sannolikheterna till 0,5 och beräknar sedan väntevärdet igen.

$$0{,}5 \cdot (100000) + 0{,}5 \cdot (-800000) = 10000 \qquad \text{ekvation (3.17)}$$

Nej, han skulle inte ändra sitt beslut.

Vilken sannolikhet för att lyckas skulle göra beslutsfattaren indifferent mellan att expandera och att avstå?

Vi skriver sannolikheten för att lyckas med X och sannolikheten för att misslyckas (1-X). Vi låter därefter det förväntade värdet vara noll och löser ekvationen.

$$\begin{aligned} X \cdot (100000) + (1 - X) \cdot (-80000) &= 0 \\ 100000X - 80000 + 80000X &= 0 \\ X &= \frac{4}{9} \approx 0{,}44 \end{aligned} \qquad \text{ekvation (3.18)}$$

En sannolikhet på 0,44 för att lyckas och 0,56 för att misslyckas skulle göra beslutsfattaren indifferent mellan valen.

Exempel: Äldreomsorg i Bjureks kommun

En kommun behöver upprätta nya enheter inom äldreomsorgen och står inför olika val gällande bemanningen. De ingår i den årliga utvärderingen av kommunens tjänster. Alternativen som kommunen står inför är att de kan hyra in tjänster från grannkommunen eller hyra in från utlandet alternativt själva utföra tjänsten.

Problemet är att alla dessa alternativ har olika kostnader och nyttor förknippade med sig. Om kommunen väljer att själva bemanna enheterna måste de investera i dyr utbildning till personalen men å andra sidan skulle personalens löner spenderas i kommunen i större utsträckning än i de andra alternativen. Att hyra in tjänsten från grannkommunen är dyrt men å andra sidan skulle verksamheten kunna komma igång snabbare. Skulle kommunen hyra in från utlandet är priset lägre men det kan uppstå vissa kommunikationsproblem om de inte talar svenska.

Anta att kommunen har fått hjälp med att uppskatta kostnaderna och nyttorna med samtliga alternativ beroende på hur kommande utvärderingar av deras verksamhet ser ut. Nedanstående tabell sammanfattar resultatet gällande de tre olika alternativen fördelat på tre olika utfall gällande rankingen i utvärderingen.

Tabell 3.2: Kommunens resultat vid olika utfall

Beslut	Resultat av utvärderingen		
	låg	medel	hög
Utföra själva	-15	10	55
Hyra in från grannkommunen	5	20	40
Hyra in från utlandet	10	25	30

Tabellen ovan är en payoff-matris eftersom den visar de finansiella konsekvenserna utifrån de alternativ som finns.

Givet informationen ovan, vilket alternativ skulle du råda kommunen att välja? Anta att erfarenheten från tidigare publicerade rankingar visar att kommunens sannolikhet för låg ranking i utvärderingen är 0,2, för medelhög ranking 0,5 och för hög ranking 0,3. Här är det möjligt att illustrera kommunens alternativ med ett beslutsträd. Beslutsträdet illustreras i Figur 3.11.

Vi beräknar det förväntade värdet av varje beslut.

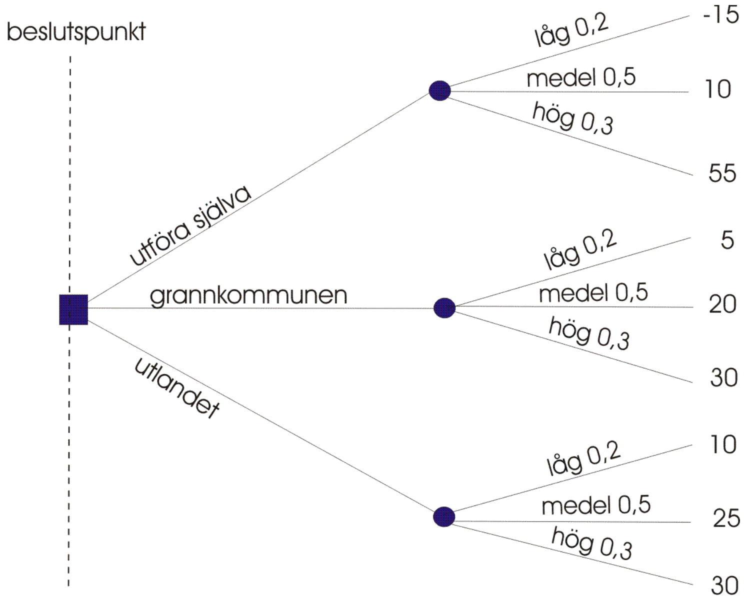
Utföra själva: $0{,}2 \cdot (-15) + 0{,}5 \cdot (10) + 0{,}3 \cdot (55) = 18{,}5$

Grannkommunen: $0{,}2 \cdot (5) + 0{,}5 \cdot (20) + 0{,}3 \cdot (40) = 23$

Utlandet: $0{,}2 \cdot (10) + 0{,}5 \cdot (25) + 0{,}3 \cdot (30) = 23{,}5$

Högst förväntat värde ges av alternativet ”hyra in tjänsten från utlandet”.

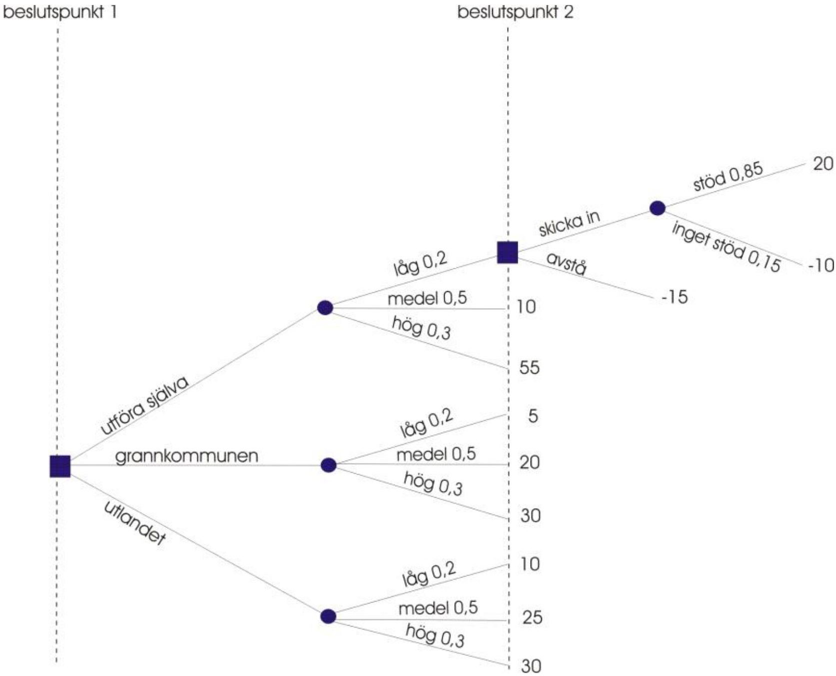
Figur 3.13: Beslutsträd för Bjureks kommun



Anta nu vidare att givet att kommunen väljer att själva utföra tjänsten och utvärderingen av kommunens tjänster kommer att ge en låg ranking, så har kommunen möjligheten att ansöka om att få stöd från staten. Att ansöka om detta kostar pengar eftersom ett team måste lägga ner mycket tid för att samla ihop informationsunderlag. Sannolikheten för att kommunen skall få igenom ansökan om stödet är 0,85. Om de får stödet blir deras resultat 20 och om de inte får det erhåller de -10.

Vi uppdaterar vårt beslutsträd. Detta illustreras i Figur 3.14.

Figur 3.14: Beslutsträd för Bjureks kommun



Med de nya förutsättningarna finns nu två beslutsnoder. Baklänges-induktion innebär att vi först måste ta reda på vilket alternativ kommunen skall fatta vid beslutsnod 2. Vi börjar alltså från besluts-trädets högra sida med att ta reda på för vilket val som det förväntade värdet är störst.

Skicka in ansökan: $0{,}85 \cdot (20) + 0{,}15 \cdot (-10) = 15{,}5$

Avstå från att skicka in: -15

Eftersom 15,5 > -15 bör man alltså skicka in ansökan vid beslutsnod 2.

Nu ska vi se vad de förväntade värdena för varje alternativ är vid beslutsnod 1. Det är endast alternativet ”själv utföra tjänsten” som har förändrats.

Utföra själva:	$0{,}2 \cdot (15{,}5) + 0{,}5 \cdot (10) + 0{,}3 \cdot (55) = 24{,}6$
Grannkommunen:	23
Utlandet:	23,5

Högst förväntat värde ges nu av alternativet ”utföra tjänsten själva”.

Exempel: Brobygge i Göteborgs stad

Anta att Göteborgs stad har ett förslag på ett nytt broprojekt. Syftet med den nya broförbindelsen är att bidra till stadens utveckling och att knyta samman de norra och de södra delarna av staden. Bron kommer att skapa tidsbesparingar för stadens resenärer genom förkortad resväg vilket skulle gynna både det kringliggande näringslivet och stadens invånare samt förbättra stadsbilden och öka attraktionskraften inom turismen. Staden har en budget på 200 miljoner för brobygget. De har möjligheten att först göra en undersökning för att tydligare kartlägga behovet av bron och uppskatta den nytta bron skulle ge staden. Undersökningen kan resultera i ett positivt besked (där undersökningens rapport visar att investeringen kommer att vara lönsam) eller ett negativt besked (där undersökningens rapport visar att investeringen inte kommer att vara lönsam) beroende på vad undersökningsgruppen kommer fram till. Man antar att sannolikheten för att undersökningen ger ett positivt besked är 0,55 (och att den ger ett negativt besked 0,45).

Undersökningen bygger på att uppskattningar av stadens nytta genomförs av ett stort team och kring denna finns stor osäkerhet. Detta innebär att de kan ha överskattat alternativt underskattat nyttan av den färdiga bron. En genomförd undersökning kostar 40 miljoner och tar ett år att genomföra. Staden kan välja att avstå från att först göra en undersökning, d.v.s. bespara sig kostnaden för denna och sätta igång med brobygget direkt. Som ett tredje alternativ kan de avstå från brobygget helt. Att bygga bron tar ett år och kostar 150 miljoner kronor. När bron väl är färdigbyggd finns risken att den inte kommer att generera så hög nytta för staden som man först hoppats på eller som förundersökningen visat. Anta att de uppskattat några sannolikheter och att sannolikheten att bron genererar minst lika hög nytta som rapporten visade då rapporten ger ett positivt besked är 0,82 och att den genererar en lägre nytta är 0,18. Anta vidare att sannolikheten för att bron genererar minst lika hög nytta som rapporten visade då rapporten från undersökningen ger ett negativt besked är 0,35 och att den genererar en lägre nytta är 0,65. De besparingar staden skulle göra i de olika utfallen är följande.

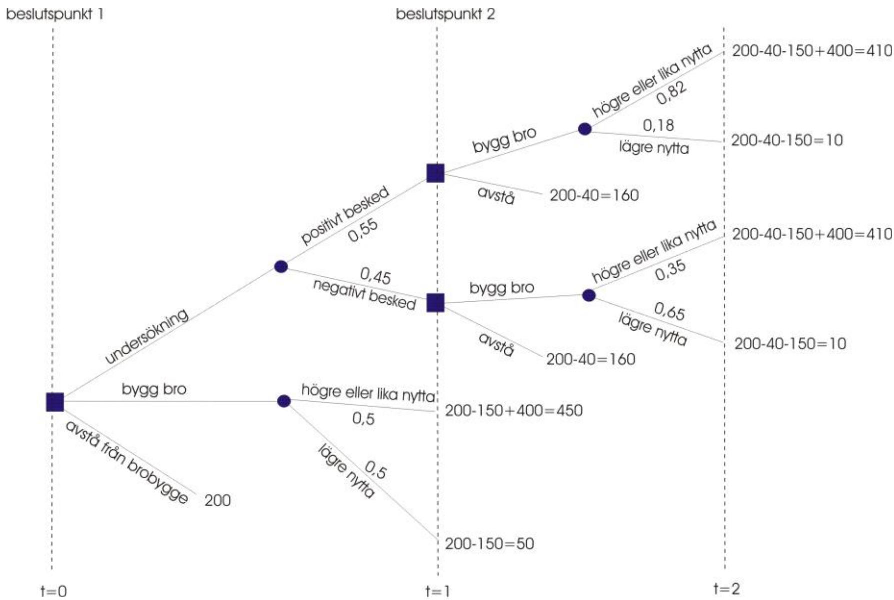
Efter genomfört brobygge sparar staden 400 miljoner kronor då bron genererar minst lika hög nytta som man först trodde eller som förundersökningen visade. I det fall bron genererar lägre nytta än man först trodde alternativt vad undersökningen visade är besparingen noll.

Sannolikheten att brobygget genererar minst lika hög nytta som man trodde innan man startade bygget utan förundersökning är 0,5 samt 0,5 att den genererar en lägre nytta. Anta vidare att Göteborgs stad räknar med en kalkylränta på 7 procent.

Sammanfattning:

- Budget på 200 miljoner
- Brobygge kostar 150 miljoner och tar ett år
- Lyckat brobygge genererar 400 miljoner
- Sannolikheten för lyckat bygge utan undersökning 0,5
- Undersökning kostar 40 miljoner och tar ett år
- Sannolikhet för positivt besked från undersökning 0,55
- Sannolikhet för lyckat bygge vid positivt besked 0,82
- Sannolikhet för lyckat bygge vid negativt besked 0,35
- Kalkylränta 7 %

Figur 3.15: Beslut om brobygge



Val vid beslutsnod 2:

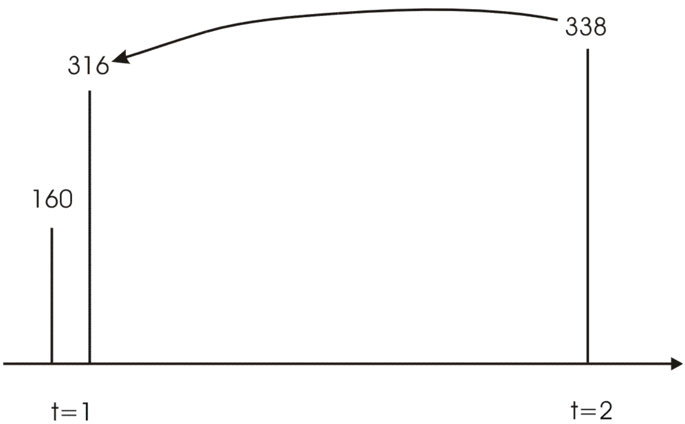
För att komma fram till vilket av alternativen staden skall välja i beslutspunkt 1 och 2 måste vi börja från höger. Vi börjar med att beräkna det förväntade värdet av att de valt att genomföra en undersökning och sedan efter ett positivt besked bygga bron. Vi befinner oss nu högst upp till höger i beslutsträdet.

$$0{,}82 \cdot (410) + 0{,}18 \cdot (10) = 338 \qquad \text{ekvation (3.19)}$$

Detta jämför vi med beslutet att inte bygga bron vid beslutsnod 2 (160). Eftersom de 160 miljonerna finns vid tidpunkt 1 ($t = 1$) och 338 miljoner vid tidpunkt 2 ($t = 2$) måste vi göra dessa jämförbara med hjälp av kalkylräntan. Vi beräknar nuvärdet av 338 miljoner kronor i tidpunkt 1 ($t = 1$).

$$338 \cdot (1 + 0{,}07)^{-1} \approx 316 \qquad \text{ekvation (3.20)}$$

Figur 3.16: Nuvärdesberäkning av förväntat värde



Eftersom 316 är större än 160 är beslutet att bygga bron i denna beslutspunkt (beslutsnod 2).

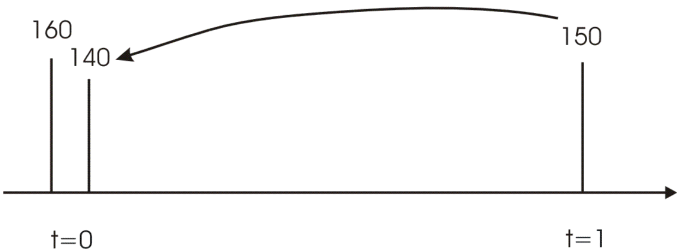
Nu tar vi utfallen då rapporten ger ett negativt besked och vi börjar med att beräkna det förväntade värdet av att ta beslutet att bygga bron.

$$0{,}35 \cdot (410) + 0{,}65 \cdot (10) = 150 \qquad \text{ekvation (3.21)}$$

Detta jämför vi med beslutet att inte bygga bron vid beslutspunkt 2 (160). Eftersom de 160 miljonerna finns vid tidpunkt 1 ($t = 1$) och 150 miljoner vid tidpunkt 2 ($t = 2$) måste vi göra dessa jämförbara med hjälp av kalkylräntan. Vi beräknar nuvärdet av 150 miljoner kronor i tidpunkt 1 ($t = 1$).

$$150 \cdot (1 + 0{,}07)^{-1} \approx 140 \qquad \text{ekvation (3.22)}$$

Figur 3.17: Nuvärdesberäkning av förväntat värde



Eftersom 160 är större än 140 är beslutet att avstå från att bygga bron i beslutsnod 2.

Val vid beslutsnod 1:

Nu kan vi ta oss längre till vänster i beslutsträdet och beräkna de förväntade värdena för alternativen i beslutsnod 1. Vi börjar uppifrån.

Undersökning: Det förväntade värdet av att först genomföra en undersökning beräknas genom att ta sannolikheten att rapporten blir positiv (för då väljer vi att bygga i beslutsnod 2) multiplicerat med det förväntade värdet (316 i $t = 1$) samt sannolikheten att rapporten blir negativ (för då väljer vi att avstå i beslutsnod 2) multiplicerat med det förväntade värdet (160 i $t = 1$), d.v.s.

$$0{,}55 \cdot (316) + 0{,}45 \cdot (160) \approx 246 \qquad \text{ekvation (3.23)}$$

Vi beräknar sedan nuvärdet (vid $t = 0$) av detta och erhåller

$$246 \cdot (1 + 0{,}07)^{-1} \approx 230 \qquad \text{ekvation (3.24)}$$

Bygga direkt: Därefter beräknar vi det förväntade värdet av att bygga bron direkt utan förundersökning.

$$0{,}5 \cdot (450) + 0{,}5 \cdot (50) = 250 \qquad \text{ekvation (3.25)}$$

Vi beräknar sedan nuvärdet (vid $t = 0$) av detta och erhåller

$$250 \cdot (1 + 0{,}07)^{-1} \approx 234 \qquad \text{ekvation (3.26)}$$

Avstå från brobygge: Slutligen har vi alternativet att avstå från brobygge vilket ger 200 miljoner kronor eftersom staden inte använder sin budget.

Eftersom 200 < 230 < 234 innebär det att staden bör välja att bygga bron direkt utan att först göra en för undersökning eftersom då är det förväntade värdet maximerat (234 miljoner kronor).

Referenser

Aczel, A. D. (1992) *Complete Business Statistics*, Irwin.

Mas-Colell, A., M. D. Whinston och J. R. Green (1995) *Microeconomic Theory*, Oxford University Press.

Northcott, D. (1992) *Capital Investment Decision-Making*, The Dryden Press.

Råde, L. och B. Westergren (1990) *BETA – Mathematics Handbook*, Studentlitteratur, Chartwell-Bratt Ltd.