GÖTEBORGS UNIVERSITET

# Strukturella problem inom addition och subtraktion
# - en fallstudie i grundskolans år 3

Annie Andréen
Eva Strid

”Matematik/ämnesdidaktik/LAU350”

Handledare: Per-Olof Bentley

Rapportnummer: VT07-2611-137

*Abstrakt*

- Titel: Strukturella problem inom addition och subtraktion - en fallstudie i grundskolan år 3
- Författare: Annie Andréen och Eva Strid
- Termin och år: Vt 2007
- Kursansvarig institution: Sociologiska institutionen
- Handledare: Per-Olof Bentley
- Examinator: Florentina Lustig
- Rapportnummer: VT07-2611-137
- Nyckelord: Matematik, multienhet, begreppsstrukturer, subtraktion, räknemetoder

---

**Syfte**
Syftet med studien var att ringa in de största strukturella problemområdena inom addition och subtraktion i den aktuella undersökningsgruppen. Genom kartläggning av elevernas kunskaper i skolår 3 identifierade vi brister och undersökte orsakerna till att de uppkommit.

**Metod**
För att nå vårt syfte använde vi oss av tre olika metoder. Vi började med att eleverna fick genomföra en diagnos som vi sedan analyserade för att identifiera de strukturella problemområdena. Diagnosen följdes sedan upp med elevintervjuer för att reda ut vilka tankestrukturer och begreppsuppfattningar eleverna använde sig av.
Därefter genomförde vi samtal med några av lärarna på de berörda skolorna för att få reda på hur undervisningen kan ha påverkat elevernas tankestrukturer och begreppsuppfattningar.

**Resultat**
Studien visade att många elever hade bristfälliga begreppsuppfattningar för multienheter. En del av dessa elever hade den felaktiga begreppsuppfattningen av flersiffriga tal som siffror placerade i en rad, vad vi i studien kallat *en sammanlänkad entalsuppfattning.* Andra elever visade tydliga tecken på en *en-enhetsuppfattning,* en begränsad begreppsstruktur som grundas på uppfattningen av tal bestående av multienheter som enbart samlingar av ental.
Det största strukturella problemområdet vi identifierade var att eleverna inte diskriminerade ordningen vid subtraktionsberäkningar. Detta kan dels bero på brister i begreppsuppfattningen av subtraktion och dels på att eleverna använder sig av räknemetoder som de inte har någon förståelse för.

# Innehållsförteckning

## Bilagor:



## Tabell och figurförteckning:

# 1. Inledning

Resultat från insamling av ämnesproverna i årskurs 5 från 2006 visar att 19 % av eleverna inte nått kravnivån i Delprov C i Matematik som behandlar huvudräkning och uträkningar med skriftliga räknemetoder samt taluppfattning för hela tal (Skolverket, 2006).
Även internationella undersökningar påvisar svenska elevers brister inom matematik.
År 2003 deltog Sverige i den internationella undersökningen TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study) som jämför matematikkunskaper hos elever från 45 länder. De deltagande ländernas förutsättningar skiljer sig markant åt och därför jämförs Sveriges resultat med en grupp på 20 länder som är medlemmar i OECD (Organisation for Economic Co-operation and Development) och/eller EU (Europeiska Unionen) samt Ryska federationen och Singapore (Skolverket, 2005, s. 4). Undersökningen visar att de svenska eleverna presterar signifikant sämre än 20-landsgruppens medelvärde i aritmetik (Skolverket, 2005, s. 6). De hade även ett sämre medelvärde totalt än gruppens medelvärde.

Matematik är ett viktigt ämne som eleverna behöver behärska för att klara sig i dagens samhälle men även för att få möjligheten att utbilda sig vidare. Det är ofta brister i den grundläggande matematiken som leder till svårigheter hos eleverna. Vi har därför valt att kartlägga strukturella problemområden inom matematik i år 3 på två skolor i Göteborg i syfte att kunna hitta orsakerna till att problemen uppstår. Vi hoppas i och med det kunna öka medvetenheten hos lärarna om de moment och metoder som kan leda till att eleverna utvecklar felaktiga eller begränsade tankestrukturer.

Vi har valt att avgränsa studien till att enbart omfatta räknesätten addition och subtraktion samt att bara innefatta elever från två skolor belägna i samma område. Det hade varit önskvärt med en större undersökningsgrupp där olika områden är representerade för att få ett mer generaliserbart resultat. Detta har vi dock inte kunnat göra på grund av den begränsade tid vi haft till förfogande, men vi hoppas att detta kan bli ett framtida forskningsprojekt.

## 2. Syfte och problemformulering

Syftet med denna fallstudie är att ringa in de största strukturella problemområdena i år tre inom addition och subtraktion i den aktuella undersökningsgruppen.
Genom att kartlägga elevernas kunskaper vill vi kunna identifiera brister och deras orsaker. Detta skulle underlätta för lärarna att anpassa sin undervisning och skapa bättre förutsättningar för elevers lärande.

Utifrån syftet har vi formulerat följande frågeställningar:

- Vilka är de strukturella problemen inom addition och subtraktion hos undersökningsgruppen?

- Vilka orsaker ligger bakom de strukturella problemen?

- Hur påverkar undervisningen och lärares val av läromedel och räknemetod elevernas resultat och förståelse?

# 3. Teoretisk anknytning

I den teoretiska anknytningen presenterar vi teorier, litteratur och styrdokument.
Först beskriver vi för arbetet relevanta delar av LPO94 och målen för matematik.
Därefter kommer en sammanfattning av en av teorierna om hur barn bildar en uppfattning om begrepp. Vi har även med en bakgrund om barns talutveckling och tankestrukturer när det gäller addition och subtraktion av hela tal. Därefter fördjupar vi oss i begreppsstrukturer för multienheter. Vi tar även upp några felaktiga begreppsstrukturer för multienheter som skolans undervisning kan leda till att barn konstruerar. Avslutningsvis tar vi upp de räknemetoder som idag är vanliga i skolan.

## 3.1 Styrdokument

Läroplanen är varje lärares viktigaste redskap som undervisningen ska utgå ifrån.
I läroplanen beskrivs mål och riktlinjer som ska följas. Ett av målen att uppnå i grundskolan är att varje elev ska behärska grundläggande matematiskt tänkande och kunna tillämpa det i vardagslivet (Utbildningsdepartementet, 1994). Kursplanerna, som kompletterar läroplanen, är uppdelade i mål att sträva mot och mål att uppnå. I strävansmålen anges de kunskapskvaliteter som läraren ska arbeta för att eleverna ska nå under grundskolans nio år. I strävansmålen i matematik vill vi särskilt lyfta fram följande mål (Skolverket, 2006):

> Skolan skall i sin undervisning sträva efter att eleven:
> - utvecklar intresse för matematik samt tilltro till det egna tänkandet och den egna förmågan att lära sig matematik och att använda matematik i olika situationer,
>   […]
> - inser värdet av och använder matematikens uttrycksformer,
> - utvecklar sin förmåga att förstå, föra och använda logiska resonemang, dra slutsatser och generalisera samt muntligt och skriftligt förklara och argumentera för sitt tänkande,
> - utvecklar sin förmåga att formulera, gestalta och lösa problem med hjälp av matematik, samt tolka, jämföra och värdera lösningarna i förhållande till den ursprungliga problemsituationen,
> - utvecklar sin förmåga att använda enkla matematiska modeller samt kritiskt granska modellernas förutsättningar, begränsningar och användning,

### 3.1.1 Preliminära mål i år 3

Regeringen har gett skolverket i uppdrag att ta fram mål att uppnå även för det tredje skolåret för att kunna skapa ytterligare ett avstämningstillfälle, ett nationellt prov, i syfte att försäkra sig om en lägsta nivå av elevernas kunskapsutveckling. En projektgrupp har tillsatts som har tagit fram förslag till mål i matematik, svenska och svenska som andraspråk för år tre. Förslagen kommer att skickas till regeringen för ett slutgiltigt beslut i vecka 23, 2007 (Skolverket, 2007).
I förslagen till mål att uppnå i år 3 kan man läsa:

> Eleven skall ha förvärvat grundläggande kunskaper i matematik som möjliggör att konkreta och elevnära företeelser kan beskrivas och förklaras med olika uttrycksformer inklusive grundläggande matematiska symboler och begrepp. Eleven skall också ha utvecklat en förmåga att samtala om och lösa problem med hjälp av grundläggande matematiska modeller såväl muntligt, skriftligt som med tekniska hjälpmedel samt kunna reflektera kring tillvägagångssätt och resultat.

Inom denna ram skall eleven:

- ha en grundläggande taluppfattning och kunna undersöka och dela upp naturliga tal samt beskriva deras egenskaper och relationer,
  […]
- ha en grundläggande förståelse för innebörden av de fyra räknesätten och kunna beskriva deras inbördes samband,
- kunna utföra beräkningar med hjälp av addition och subtraktion i huvudet, med skriftliga räknemetoder och tekniska hjälpmedel samt kunna hantera enkla multiplikationer och divisioner,
  […]

## 3.2 Begreppsbildning

När man pratar om begreppsbildning måste man först definiera vad som menas med förståelse för begrepp. Det är inte de konkreta eller abstrakta begreppen som menas, objekten, utan den uppfattning av begreppen som skapas i hjärnan, alltså förståelsen för vad objektet faktiskt är och representerar. Att en elev vet att en fyrkant kallas kvadrat betyder inte att eleven har förståelse för begreppet Kvadrat. För det krävs det även att eleven kan begreppets attribut, till exempel, att en kvadrat har fyra hörn, vinklarna är räta och att samtliga fyra sidor är lika långa. Alla begrepp karakteriseras av deras attribut och deras relation till helheten.

Barn lär sig nya begrepp genom att exponeras för och lära sig att urskilja begreppets attribut. Denna inlärning och urskiljning av attributen sker vanligtvis omedvetet. Det finns två olika processer vilka man kan lära sig begrepp genom, theory revision och redescription. I båda fall utnyttjar man tidigare begrepp med fokus på särskiljande begreppsattribut. Vilken process som används är beroende av begreppets natur och på vilket sätt inlärningen sker.
Inlärning genom theory revision innebär att barnet först får en preliminär uppfattning om begreppet, till exempel att hav är en stor vattensamling. Över tid preciseras sedan de särskiljande begreppsegenskaperna, en sjö eller en bäck kan inte vara ett hav eftersom havet inte har några gränser, och tillslut tänker man helt i begreppet (Bentley, 2007, in press).

Inlärning genom redescription innebär att barnet utsätts för en högfrekvent exponering av begreppet och dess attribut vid upprepade tillfällen under en begränsad tidsperiod. Barnen bildar då en uppfattning av begreppet i den associativa delen av arbetsminnet. När uppfattningen av begreppet fungerar tillfredsställande flyttas begreppet över till långtidsminnet. Genom redescription sker begreppsbildningen på kortare tid (Bentley, 2007, in press).

En förståelse för ett begrepp innefattar kännedom av dess attribut, av andra begrepp som involveras i begreppet och om relationen inom helheten. Man kan dela upp begrepp i metabegrepp och subbegrepp. Ett exempel på ett metabegrepp är tal. Ett subbegrepp till begreppet tal är då till exempel 7 (Bentley, 2007, in press).

## 3.3 Barns tankestrukturer i addition och subtraktion

Barn använder sig av flera olika begreppsstrukturer då de löser uppgifter, vilket resulterar i flera olika lösningsprocedurer för samma uppgift, både korrekta och inkorrekta. För att kunna hjälpa barnen att utveckla den förståelsen för ett begrepp som är nödvändig för att kunna utföra beräkningar, måste man känna till vilka tidiga tankestrukturer och tolkningar barnen kan använda sig av.

### 3.3.1 Talutveckling

Barns första användning av talord visar sig i användning av talraden (genom att säga talord i en följd), användning av räkning (genom att relatera varje objekt till en siffra) och en kardinal användning (för att bestämma ett antal föremål i en mängd med ett ensamt talord). En del barn börjar använda talord redan innan de fyllt två år och under de följande sex åren av utveckling blir det inbördes förhållandet mellan de tre användningsområdena för talord allt tydligare. Den här utvecklingen av taluppfattningen sker i flera nivåer (Fuson, 1992, Research on whole number addition and subtraction, s. 248).

. Karen Fuson, en framstående forskare inom matematikdidaktik på Northwestern University, USA, har (1992) gjort en uppdelning med fem utvecklingsnivåer.

I den första utvecklingsnivån ”string” ser barnen talraden som en enda lång ramsa utan att urskilja talen som ord.

I nästa nivå, ”Unbreakable list” har barnen lärt sig att urskilja de specifika talen, men till en början ser de fortfarande talraden som en ramsa utan användningsområden. Inom denna nivå utvecklar barnen så småningom sina kunskaper till att först kunna räkna föremål genom att para ihop räkneorden med föremålen. I nästa steg börjar barnen utveckla en kardinal aspekt av tal. Barnen kan se att det sista uppräknade ordet bestämmer antalet föremål i mängden. Med den här vetskapen kan de addera två givna tal genom att räkna alla från början.

I den tredje nivån, ”breakable chain” har barnen utvecklat sin förståelse för talraden så till vida att de kan börja räkna från ett godtyckligt tal.

I den fjärde nivån ”numberable chain” behöver barnen inte längre föremål för att kunna addera mängder utan de använder sig av namnen i talraden. Dock behöver barnen någon metod för att hålla reda på vilka räkneord som är sagda i den andra termen, till exempel genom fingerräkning eller dubbelräkning.

I den sista nivån, ”bidirectional chain” ser barnen varje ord i talraden både som ord i talföljden, talets ordinala aspekt, och som tal med en kardinal aspekt. De har en förståelse för att varje tal representerar sig självt och samtliga tal före i talraden, och de förstår att varje efterföljande talord är ett tal som är 1 större än det föregående, både vad gäller den ordinala och den kardinala aspekten. De kan se båda termerna i en uppgift både som enskilda delar och som delar av en summa. Snart kan barnen bryta ner ett givet tal till alla dess möjliga adderingspar. Förståelsen för förhållandet mellan termerna och summan leder till att barnen kan se addition och subtraktion som varandras motsatser (Fuson, 1992, Research on whole number addition and subtraction, s. 248).

### 3.3.2 Grundläggande addition och subtraktion

Fuson (1992) menar att det finns fyra olika huvudtyper av additions- och subtraktionssituationer, vilka är: jämföra, kombinera, förändra - lägga till och förändra - ta bort. Kombinera och förändra –lägga till är additionssituationer och jämföra och förändra – ta bort är subtraktionssituationer. Det finns även ytterligare en subtraktionssituation, utjämna, som är en kombination av situationerna jämföra och förändra (Fuson, 1992, Research on whole number addition and subtraction, s. 244).

Additionssituationen kombinera innebär att eleverna ska urskilja en saknad del av den första termen från en saknad del av den andra termen. Detta kan antingen göras rent fysiskt (med objekt) eller begreppsmässigt. Ett exempel på en kombinationsuppgift är: ”När Jonas och Per lägger ihop sina kulor så har de 8 kulor tillsammans. Jonas har tre kulor. Hur många kulor har Per?”

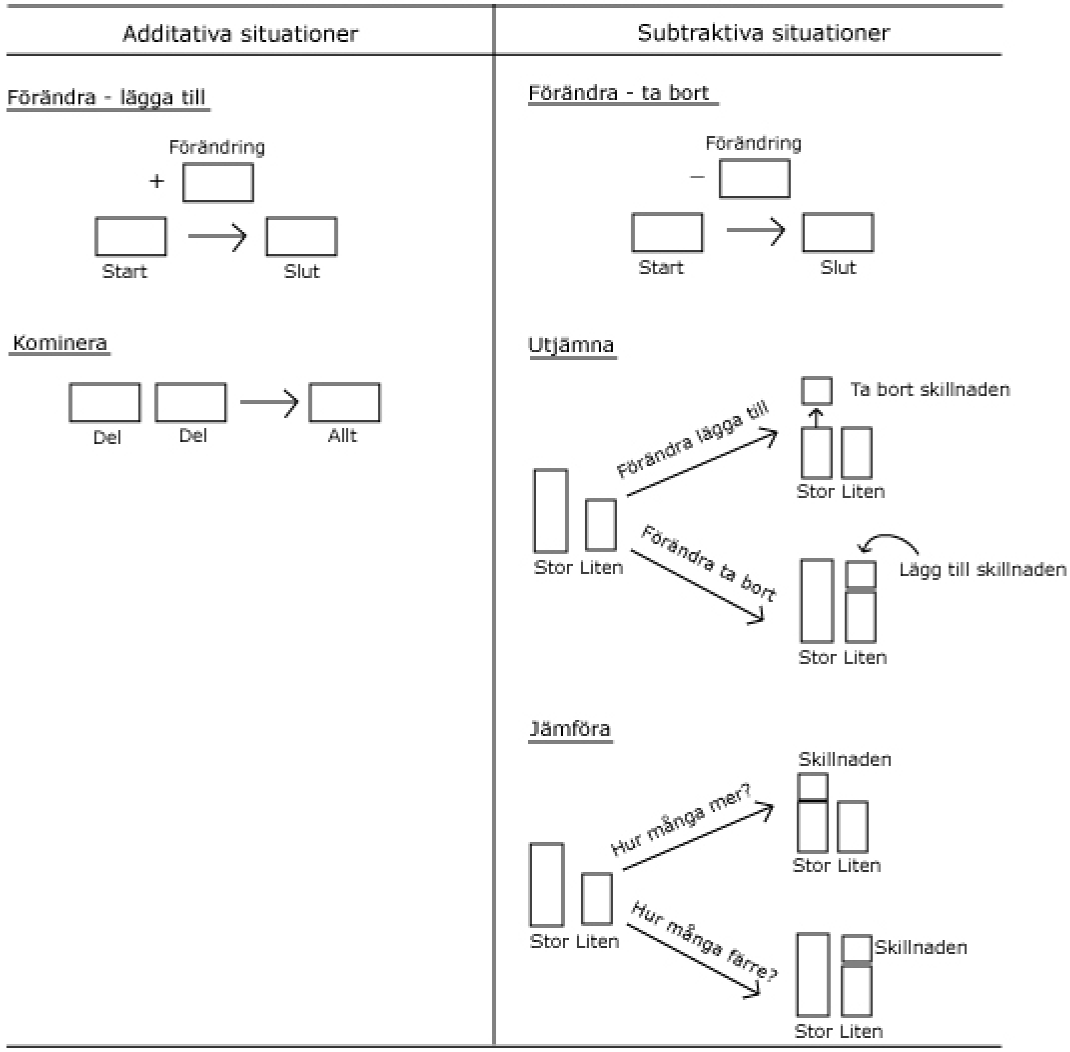
Uppgifter av typen 24 + _ = 26 innebär en förändra – lägga till situation. Eleverna startar då på 24 och räknar upp till 26, dvs. i två steg.
Jämföra innebär att eleverna jämför två mängder i en subtraktion och ser skillnaden mellan de två mängderna, dvs. hur mycket mer eller mindre den ena mängden är. Ett exempel på en jämförelseuppgift är: ”Mattias har 8 gröna kulor och 6 gula kulor. Hur många fler gröna än gula kulor har Mattias?”

Situationen förändra – ta bort innebär att eleverna tar bort den mindre mängden från den större genom att räkna ner. Ett exempel på en sådan uppgift är: ”Caroline har 20 kronor. Hon köper en klubba för 4 kronor. Hur mycket har hon sedan kvar?”

I subtraktionssituationen Utjämna finns det två mängder. Uppgifterna löses genom att lägga till eller ta bort från en av mängderna för att jämna ut skillnaderna mellan de olika mängderna. Ett exempel på en sådan uppgift lyder: ”Tommie har 9 bullar. Ulrika har bara 5 bullar. Hur många bullar måste Tommie äta upp för att de ska få lika många?” (Fuson, 1992, Research on whole number addition and subtraction, s. 246)

Varje additions- och subtraktionssituation involverar tre mängder (till exempel term, term och summa), där vilken som helst av dem kan vara okänd (Fuson, 1992, Research on whole number addition and subtraction, s. 244).
Beroende på vilken mängd som är okänd är uppgiftstyperna också olika inom additionssituationerna och subtraktionssituationerna, se tabell 1 (Fuson, 1992, författarnas översättning).

Tabell 1 Additions- och subtraktionssituationer




Eftersom problemsituationerna i olika uppgifter kan skilja sig åt, kan +, - och = tolkas på en mängd olika sätt av barnen. Exempelvis kan – och = i uppgiften 14 - 6 = 8 få betydelsen ”14 äpplen – ta bort 6 äpplen blir 8 äpplen”. Subtraktionstecknet har i detta fall betydelsen ”förändra – ta bort” och likhetstecknet betydelsen ”blir”. Samma uppgift kan även betyda ”Jämför 6 med 14 för att ta reda på hur mycket större eller mindre det är”, vilket ger subtraktionstecknet betydelsen ”jämför” och likhetstecknet betydelsen ”är samma tal som”. En ytterligare betydelse är ”alla 14 objekt minus de 6 objekt som är en del av 14 är den andra delen av 14”. Med denna uppfattning av uppgiften har subtraktionstecknet betydelsen ”kombinera – okänd del” och likhetstecknet har betydelsen ”är identisk med”, eftersom bara en uppsättning av objekt är involverad i kombinera-situationen. Det innebär att de objekt som representerar sexan och åttan också representerar de 14 objekten. Den mening som ”jämföra” ger likhetstecknets betydelse är den som stämmer bäst överens med den matematiska meningen för ”lika med” eller ”är lika med”.

I läroböcker ges inte någon nämnvärd möjlighet för barnen att överväga olika betydelser för +, -, och =. Den betydelse som oftast förmedlas i läroböckerna är betydelsen förändra – ta bort och förändra - lägga till. Det kanske är därför som många barns tolkning av likhetstecknet är ”det blir” eller ”det resulterar i”. Att likhetstecknet antar en betydelse som innebär ”att något görs” och att det inte finns några alternativa betydelser tillgängliga för barnen, kan bero på det sätt som läroböckerna är utformade och på hur lärare använder övningsblad med additions- och subtraktionsuppgifter bestående av enbart skriftliga taluppgifter (Fuson, 1992, Research on whole number addition and subtraction, s. 245).

## 3.4 Multienheter

Ett flersiffrigt tal består av flera enheter. En av dessa enheter är entalet som är en en-enhet. De övriga enheterna kan vara tiotal, hundratal, tusental, tiotusental och så vidare. Alla enheter över entalet har det gemensamma samlingsnamnet multienhet (multiunit). Det som särskiljer multienheterna från en-enheterna är att den skrivna siffran för multienheten, till exempel *5* i *5*00, beskriver antalet av multienheten, inte den totala mängden. I det muntliga talsystemet markeras detta genom att man i talordet uttalar enheten, till exempel fem*hundra*.

### 3.4.1 Begreppsstrukturer för flersiffriga tal

Fuson, Wearne, Hiebert, Murray, Human, Olivier, Carpenter och Fennema (1997) har funnit fem olika korrekta begreppsstrukturer för tvåsiffriga tal. De benämner de fem strukturerna som UDSSI- modellen. Namnet kommer från de fem begreppsstrukturerna som är: Unitary (en-enhet), Decade and ones (grupper av tior och ettor), Sequence (sekvenser), Separate (delningsbar) och Integrated (sammankopplad). Eleverna kan ha flera olika begreppsstrukturer samtidigt som de använder vid olika tillfällen. Även en sjätte begreppsstruktur har upptäckts, dock felaktig, benämnd som Incorrect concatenated single digit conception, vilken vi kallar för Sammanlänkad entalsuppfattning och som beskrivs ingående i ett eget kapitel (Fuson et al. 1997, s. 138).

Varje begreppsstruktur innefattar förhållanden mellan siffernotationen, den språkliga notationen och mellan mängden. I den första begreppsstrukturen en-enhetsuppfattningen (Unitary single digit conception) byggs förståelsen för entalsenheter upp, vilket är en förkunskap för att kunna förstå flersiffriga tal. Här utvecklar barnen en förståelse för hur talen som hör till varje skriven siffra inom talområdet ett till nio läses och sägs, hur siffran som hör till det specifika talade ordet skrivs och vilken uppräknad mängd som ingår i varje tal (Fuson et al. 1997, s.138).
Denna begreppsstruktur är sedan för flersiffriga tal baserad på en-enheter (Unitary multidigit conception) som är en förlängning av en-enhetsuppfattningen. Här relateras språklig notation, hela mängder och siffernotation till varandra, men på denna nivå ser dock barnen dem inte som uppdelbara. Detta innebär att för mängden 15 exempelvis, kan de ej relatera 1: an till 10 objekt (Fuson et al. 1997, s.140).

Nästa begreppsstruktur är uppfattningen om tiogrupper och grupper av ental (Decades and ones conception). Denna begreppsstruktur kan byggas upp av barn från länder vars benämning av talsystemet är uppbyggt som vårt eller på liknande sätt. Denna uppfattning innebär att eleverna i den språkliga notationen börjar kunna särskilja tiodelen (exempelvis 20, 30, 40) och delen av ettor i ett flersiffrigt tal. De börjar då även kunna relatera den del av mängden som står för tiotalen och den mängd som står för entalen. Ett problem uppstår dock ofta hos många barn på denna nivå när det gäller siffernotationen och en speciell feltyp är särskilt vanlig. Feltypen innebär att barnen först skriver in tiotalet, men eftersom talet i den språkliga notationen är sammankopplat, entalsordet följer tiotalsordet, sammankopplar barnen då även siffrorna i siffernotationen och följden blir att exempelvis femtiotre skrivs som 503. Tillslut lär sig barnen dock att nollan inte skrivs ut (Fuson et al. 1997, ss.140-141).

Barn som har fått erfarenhet av att räkna i tiosteg i talraden och som har fått gruppera och räkna föremål i grupper om tio, kan utveckla en tiostrukturerad version av begreppsstrukturen ovan. Denna tiostrukturerade begreppsstruktur kallas sekvenser av tio- och ensteg (Sequence-tens and ones conception) och kräver dels en förmåga att kunna räkna i tiotal och dels att kunna se grupperna om tio inuti en mängd och välja att räkna dem i tiotal.
Eleven måste här kunna skifta från den ordinala aspekten, den sista uppräknade tiogruppen (säga femtio, samtidigt som han/hon pekar på den femte och sista gruppen om tio) till att kunna se den kardinala aspekten, allt som är räknat dittills (Fuson et al. 1997, s.141).

Barn som i en situation där de har en mängd med objekt som är grupperade i tiogrupper hellre fokuserar på att räkna grupper med objekt i, än att räkna objekten i grupperna använder sig av en begreppsstruktur med åtskild tiotals- och entalsuppfattning (Seperate-tens and ones conception). Denna begreppsstruktur är svårare att utveckla för barn från Sverige och många andra europeiska länder på grund av oregelbundenheterna, vad gäller bennämningen av tiotal, i våra sätt att benämna talsystemet. De kan därför behöva mycket hjälp och stöd för att kunna se grupper om tio som tio, istället för att enbart se dem som samlingar av ett antal objekt där alla objekt måste räknas (Fuson et al. 1997, ss.141-142).

Den sista begreppsstrukturen för tvåsiffriga tal är Integrerad sekvens- och åtskild tiotalsuppfattning (Integrated sequence-separate tens conception). Denna begreppsstruktur kan utvecklas av barn som både har begreppsstrukturen sekvenser av tio-steg (sequence-tens) och åtskilda grupper om tio (seperate tens) för tvåsiffriga tal. De har då möjlighet att snabbt växla fram och tillbaka mellan de båda begreppsstrukturerna beroende på situationen och vilken operation som ska utföras. Barnen har då också etablerat dubbelriktade förhållanden mellan den språkliga notationen, siffernotationen och mellan mängden, både vad gäller tiotalen och entalen i de båda begreppsstrukturerna sekvenser av tiosteg och åtskilda tiogrupper (sequence och separate). Barn med denna uppfattning kan direkt svara att femtio har fem tiotal. Innan en integrerad sekvens- och åtskild tiotalsuppfattning finns måste barn som bara har begreppsstrukturen sekvenser av tiosteg räkna i tiosteg tills de kommer till femtio samtidigt som de behöver hålla reda på hur många tiosteg det är, för att kunna veta antalet tior i femtio. Barn som bara har begreppsstrukturen åtskild tiotalsuppfattning måste räkna fem tior för att få reda på att de blir femtio. Med den integrerade begreppsstrukturen är barnen flexiblare när de närmar sig och löser tvåsiffriga uppgifter. De kan till exempel se femtio munkar som fem öppna lådor med tio munkar i varje låda (fem grupper med tio ental) och som fem stängda lådor (fem tiotal) (Fuson et al. 1997, ss.142).

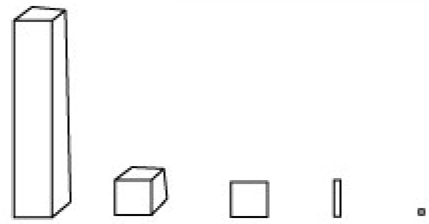
### 3.4.2 Begreppsstrukturer för multienheter

En fullt utvecklad begreppsstruktur för multienheter innefattar flera olika aspekter av begreppet. Dels behöver eleverna förståelse för två aspekter av det skriftliga systemet och två aspekter av det muntliga systemet, och dels behöver de förståelse för ytterligare sex strukturer som ger det skriftliga och muntliga talsystemet mening (Fuson et al. 1997, ss. 136-137).
När det gäller det skriftliga talsystemet måste barnen ha en förståelse för den *visuella layouten* och för *ökningen av värde beroende av det relativa positionsvärdet från höger sett.*
När det gäller det muntliga talsystemet måste barnen förstå och kunna *multienheters namn* och ha en förståelse för *namnvärdets minskning från vänster sett* när det sägs.
Det kan även vara svårt att översätta och att växla emellan det skriftliga talsystemet och det

muntliga. De muntliga talordens värde bestäms av dess namn, medan en siffras värde i det skriftliga talsystemet bestäms av dess position. Detta kan leda till att barn som hör femhundra sextiotvå vill skriva 500602, eftersom det är de namn de hör. Dessutom har siffrorna i skriftsystemet inget absolut värde, så som de muntliga har, utan deras värde är relativt och bestäms av antalet siffror till höger. Det innebär att man måste börja på siffran längst till höger, räkna upp och öka värdet för varje position med ett steg för att kunna säga ett skrivet flersiffrigt tals namn. Först efter denna bakvända procedur, som kan vara svår för många barn, kan man läsa talet framifrån. Att siffrans värde bestäms av dess position i det skriftliga talsystemet innebär även att man måste fylla ut med en nolla för att markera när någon multienhet saknas, något som man inte behöver göra i det muntliga talsystemet (Fuson, 1992, Research on whole number addition and subtraction, ss. 263-265).

Den första av de andra sex begreppsstrukturerna för multienheter som barn måste ha för att kunna förstå och operera med flersiffriga tal är förståelse för *multienheter som mängder*. Även fast det skriftliga och muntliga talsystemet har vissa skillnader utgår de ifrån samma multienhets-mängder, mängderna tio, hundra, tusen och så vidare, som är den ökande multipeln av tio och som bestämmer siffrans namnvärde i talsystemet och positionsvärde i det skriftliga systemet. För att få en korrekt förståelse för multienheter måste barnen förstå att multienheternas namn baseras på dessa mängder. För att se detta kan barnen behöva perceptuellt stöd. Material som presenterar samlingar av tiotal, hundratal och tusental storleksmässigt, gör det lättare för barn att bilda en begreppsuppfattning om multienheter som mängder och att sammanlänka dessa mängder med det skrivna och det muntliga talsystemet. Även fast man använder sig av ett tiobasmaterial betyder det dock inte att barnet använder sig av begreppet multienhet för materialet. Barnet kan fortfarande se ett tiotal enbart som tio sammansatta enskilda en-enheter även fast barnet använder ordet tiotal för det materialet/mängden. Man bör därför skilja mellan en möjlig samlingsbar mängdsuppfattning baserad på begreppsstrukturer för en-enheter, och på en uppfattning av multienheter som en samlad mängd (Fuson, 1992, Research on whole number addition and subtraction, ss. 264-265). Barnen behöver även förstå att man kan göra större och större multienhetsmängder genom att växla en av den ”nästa högre” multienheten till tio av den aktuella multienheten, till exempel att 1 hundratal och 2 tiotal kan växlas till 12 tiotal, utan att mängden förändras. Motsvarande behöver barnen även förstå att tio av en multienhet kan växlas till en av den ”nästa högre” multienheten. Den här kunskapen om *Regelbundna tio-mot-en och en-mot-tio växlingar* är avgörande för att barnen ska kunna förstå och utföra additioner och subtraktionen med tiotalsövergång. Barnen kan få en förståelse för detta genom att använda sig av begreppsstrukturen multienheter som mängder (Fuson, 1992, Research on whole number addition and subtraction, s. 265).

Tabell 2. Begreppsstrukturer för multienhetstal

| Namn på begreppsstrukturen | Betydelsen av begreppstrukturen | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Utmarkande drag för skriftlig notation<br>Visuell layout<br>Ökningen av värde beroende av det relativa positionsvärdet från höger sätt | Femte | Fjärde | Tredje | Andra | Första |
| Utmarkande drag för muntlig notation<br>Multienheters namn<br>Namnvärdets minskning från vänster sätt | Totusen | Tusen | Hundra | Tio | En (ones) |
| Strukturer för multienheter<br>Multienheter som mängder |  | | | | |
| Regelbundna tio-mot-en och en-mot-tio växlingar | Tio tusental<br>one | Tio hundratal<br>tio one | Tio tiotal<br>tio one | Tio ental<br>tio one | tio |
| Positioner/värden som växande växlingar | Fyra växlingar | Tre växlingar | Två växlingar | En växling | Inga växlingar |
| Positioner/värden som växande multipler av tio | Fyra multippler av tio<br>t x t x t x t | Tre multippler av tio<br>t x t x t | Två multippler av tio<br>t x t | En multipel av tio<br>t | Inga multippler av tio |
| Positioner/värden som ord som innehåller en exponent för multipler av tio | Tio upphöjt i fyra | Tio upphöjt i tre | Tio upphöjt i två | Tio upphöjt i ett | Tio upphöjt i noll |
| Positioner/värden som symboler som innehåller exponenter för multipler av tio | $10^4$ | $10^3$ | $10^2$ | $10^1$ | $10^0$ |

De första fyra begreppsstrukturerna i tabellen ovan (Fuson, 1992, författarnas översättning) kan existera oberoende av varandra medan de följande fyra bygger på varandra. Först måste barnen förstå *positioner/värden som växande växlingar*. Detta är en nödvändig struktur för att kunna utföra växlingar över flera led, som innebär att barnet känner till och förstår antalet växlingar som krävs mellan de olika multienheterna. Från ental till tusental krävs det till exempel tre växlingar; först från ental till tiotal, sedan från tiotal till hundratal och slutligen från hundratal till tusental. Nästa struktur, *positioner/värden som växande multipler av tio*, är en utveckling av föregående struktur som innebär att man ser växling som ett skapande av en multipel.

Dessa sex första strukturer räcker för att barnen ska kunna utföra och förstå operationer med addition och subtraktion av flersiffriga tal med tiotalsövergångar om barnen kan relatera strukturerna till varandra. Men för att senare kunna klara av multiplikation och division, exponenter och vetenskaplig notation (scientific notation) utan att problem eller tveksamheter uppstår, behöver barnen ytterligare två strukturer. Dels förståelse för *positioner/värden som ord som innehåller en exponent för multipler av tio*, och dels måste de förstå *positioner/värden som symboler som innehåller exponenter för multipler av tio* (Fuson, 1990, tabell 2, s. 348).

### 3.4.3 Addition och subtraktion med tal bestående av multienheter

Det krävs tre komponenter för att förstå hur man adderar multienheter. För det första måste barnen förstå att man måste addera de multienheter som är samma med varandra, det vill säga tiotal med tiotal och hundratal med hundratal. De måste även förstå att det är samma sak som att addera ental, bara det att resultaten representerar ett antal för den multienheten. Att addera 2 tiotal och 3 tiotal kräver alltså samma procedur som att addera 2 och 3, fast svaret blir ett antal tiotal. De sex begreppsstrukturerna i Tabell 2 ger olika stöd för förståelsen av multienhetsaddition som att addera lika multienheter med varandra. Bara begreppsstrukturerna visuell layout och ökningen av värde beroende av det relativa positionsvärdet från höger sett ger inget sådant stöd, därför är det viktigt att eleverna har alla sex begreppsstrukturerna med sig. Den begreppsstruktur som ger bäst stöd för förståelsen för adderandet av de lika multienheterna är multienheter som mängder. Konkretiserande tiobasmaterial är särskilt bra för att ge barnen förståelse för denna aspekt av addition av multienheter. För det tredje måste barnen förstå och kunna lösa problemet med att få för många, dvs. mer än nio, av en multienhet. Barnen måste förstå att när summan av två multienheter överstiger nio kan den inte längre skrivas som vanligt i den multienhetens position, eftersom detta skulle knuffa siffrorna för de högre multienheterna ett steg längre till vänster vilket skulle öka deras positionsvärde. För att kunna lösa detta problem måste barnen ha begreppsstrukturerna multienheter som mängder eller Regelbundna tio-mot-en och en-mot-tio växlingar för att förstå att de ska växla tio av den multienheten mot en av den därefter större multienheten. Det här kravet på att växla när du har för många kommer från det skrivna siffersystemet. Om du inte växlar blir svaret fel eftersom positionsvärdet förändrar talet. I det talade siffersystemet kan det fungera utan växling, man kan till exempel säga tretton hundra, vilket kan ställa till problem för barnen. En annan aspekt som kan ställa till problem för barnen är att när du måste växla en given multienhet, blir summan av den multienheten mindre än de två addenderna i den skrivna uträkningen. Om barnen inte förstår att summan faktiskt är större än de båda addenderna men att tio av den summan är skriven i den efterföljande större multienheten, kan det bli motsägande och svårbegripligt för barnen, eftersom addition vanligtvis gör tal större (Fuson, 1990, ss. 352 – 354).

Subtraktion av två multienheter har samma tre komponenter som addition. Man opererar med de lika multienheterna, denna subtraktion kan utföras som en ensiffrig subtraktion för varje multienhet och slutligen måste barnen kunna känna igen och lösa problem där växling krävs.
I subtraktion måste växlingen ske innan barnet ens kan börja subtrahera de lika multienheterna om de har för få av den givna multienheten, dvs. om multienheten som ska subtraheras är större än multienheten det ska subtraheras ifrån (Fuson, 1990, s. 354).

Addition och subtraktion är varandras motsatser och varje flersiffrigt additionstal har ett omvänt förhållande till två subtraktionstal, dvs. de två tal som fås genom att subtrahera varje addend från summan. Växling i subtraktion, en-mot-tio växling åt höger, är alltså motsatsen till tio-mot-en växling åt vänster i addition. Förståelsen för det motsatta förhållandet mellan addition och subtraktion kommer ganska sent eftersom det krävs en god kunskap om växling i addition och subtraktion innan man kan reflektera över förhållandet mellan dessa två typer av växling. Barn kan utföra subtraktioner av multienheter utan att ha förståelse för den motsatta relationen till addition ifall de kan den korrekta ordningen på subtraktion och förstår att subtraktion inte är kommutativ. Ifall barn inte har denna kunskap löser de problem av typen 3 – 8 genom att räkna 8 – 3 = 5, istället för att använda sig av växling. Detta är ett problem som är mycket vanligt.

I nästa steg kan barnen generalisera sin kunskap till att förstå att samma strukturer och komponenter gäller för tal med fler multienheter, det vill säga större tal (Fuson, 1990, ss. 352 – 356).

### 3.4.4 Den oregelbundna benämningen av talsystemet

Det svenska språket har, i likhet med många andra germanska och romanska språk, ett sätt att benämna talsystem som innehåller flera oregelbundenheter vilket kan orsaka svårigheter för elever som lär sig matematik. Särskilt talen inom talområdet elva till tjugo kan ställa till problem eftersom logiken i talens namn är svår att se. Räkneorden elva och tolv visar inte på något sätt att talet består av ett tiotal och ett ental, och ett tiotal och två ental. I räkneorden tretton t.o.m. nitton sägs tioordet i en motsatt ordning. I fem-ton sägs entalet (fem) före tiotalet (ton), till motsats från talen i området 20 -99, där tiotalet benämns först och därefter entalet som till exempel 35 som sägs på det regelbundna sättet tre-tio-fem. Detta kan leda till att barnen vänder på siffrorna när de ska skriva 15 och istället skriver 51, eftersom de skriver siffrorna i den ordningen de hör dem. Oregelbundenheten mellan uttalet av fjorton och arton, och de ental fyra och åtta som de bygger på, kan också göra det svårt för eleverna att se vad talen representerar. Ytterligare en svårighet är att tiotalet uttalas på två olika sätt i det svenska sättet att benämna talsystemet. I talområdet 13 - 19 representeras tiotalet av ton, medan det i talområdet 30-99 representeras av tio eller i tal språk bara ti, vilket är ytterligare en svårighet för svenska barn att hantera. Däremellan har vi talområdet 20-29, där räkneordet tjugo representerar två tio, något som inte går att uttyda. Även i fyrtio och sjuttio är det en oregelbundenhet i uttalet som kan göra det svårt för barnen att koppla talen till fyra tio och sju tio. De svenska tioorden skrivs på ett förhållandevis logiskt sätt efter tjugo: trettio, fyrtio, femtio och så vidare men i talspråk säger man tretti, förti, femti och så vidare vilket ger dåligt stöd för förståelsen av vad talet betyder (Rönnberg & Rönnberg, 2001, s. 38). Alla dessa oregelbundenheter gör det svårare för svenska barn att förstå talsystemets uppbyggnad runt tiobasen och att lära sig och förstå talens positionsvärde.

Undersökningar har visat att kinesiska barn har en väl mer utvecklad taluppfattning än amerikanska barn (som har ett talsystem motsvarande det svenska). Om en elev i år ett i USA får i uppgift att skapa ett flersiffrigt tal av ett tiobasmaterial med klossar för entalen och stavar för tiotalen använder de amerikanska barnen bara entalsklossarna för att bygga tvåsiffriga tal, även om de undervisats om tiotal och ental. Kinesiska barn använder sig av både tiostavar och entalsklossar redan innan de fått undervisning i skolan om sådana tal (Fuson, 1992, Research on whole number addition and subtraction, s. 266). Avsaknaden av en klar och tydlig tio-struktur i den svenska benämningen av talsystemet gör det även svårare för svenska elever att konstruera och använda begreppsstrukturer för multienheter och att addera och subtrahera flersiffriga tal på ett meningsfullt sätt (Fuson, 1992, Research on whole number addition and subtraction, s. 266). Problemen uppstår redan när svenska barn ska addera och subtrahera två ental där summan överstiger tio, tex. $8 + 4 = 12$. Eftersom summan tolv inte benämns som en multienhet, tolv borde ha hetat tio två i ett regelbundet talsystem, får barnen inget stöd i sin förståelse av tiobas-systemet utan barnen får i första hand en entalsuppfattning av talet tolv, de ser alltså tolv och senare alla andra tal mellan tio och hundra som samlingar av ental. Konsekvensen blir att när svenska barn ska börja addera och subtrahera flersiffriga tal måste de konstruera nya fungerande begreppsstrukturer för multienheter, samtidigt som de har en djupt befäst och automatiserad begreppsstruktur för ental, en en-enhetsuppfattning, som de vanligtvis använder sig av. Denna en-enhetsuppfattning stör den nya konstruktionen av begreppsstrukturer för multienheter som är nödvändig för att barnen ska kunnas utföra och förstå operationer med flersiffriga tal (Fuson, 1992, Research on whole number addition and subtraction, s. 266). Detta leder i sin tur till att när eleverna senare ska addera och subtrahera med tvåsiffriga tal som kräver växling, växlar de fram och tillbaka mellan en begreppsstruktur för multienheter och den de har vana av att använda för ental. Om en elev till exempel ska räkna uppgiften 38+24, adderar de först entalen och använder sig då av sin begreppsstruktur för ental för att få fram svaret tolv. Därefter växlar de tio av de tolv entalen till ett tiotal som ska adderas med de övriga tiotalen, och får två ental kvar. I asiatiska språk får man svaret på 8 + 4 i en multienhetsstruktur redan från början som tydligt visar att det är ett tiotal och två ental, tio två.

### 3.4.5 Sammanlänkad entalsuppfattning

De skrivna symbolerna/siffrorna för multienheter är förförande lika de för ensiffriga tal. En 4:a ser tillexempel lika dan ut oavsett om den representerar ett ental, tiotal eller hundratal. Många barn ser därför flersiffriga tal som ensiffriga tal placerade sida vid sida. De har vad vi kallar en sammanlänkad entalsuppfattning av multienheter.

Många skolor ger idag inte barnen tillräckligt stöd för att konstruera, förstå och använda samtliga begreppsstrukturer som behövs för att operera med multienheter, utan fokuserar istället på att lära barnen regler och procedurer av hur man behandlar de skrivna symbolerna i olika operationer (Fuson, 1992, Research on whole number addition and subtraction).

För många barn är den felaktiga sammanlänkade entalsuppfattningen så stark att de inte reagerar över ifall de får ett annat svar om de använder en annan metod. Barn kan acceptera att de får olika svar när de använder sig av en vertikal uppställning och när de använder sig av en en-enhetsuppfattning. Till exempel kan de i den vertikala uträkningen få 37 + 8 till 315 genom att addera entalen vilket ger 15 ental som skrivs ut som de är utan växling efter tiotalstrean och vid huvudräkningen få svaret 45 genom att räkna upp åtta steg från 37 (Fuson, 1992, Research on whole number addition and subtraction, s. 263).
De barn som har en sammanlänkad entalsuppfattning gör ofta många fel och avbrott från de procedurstyrda reglerna. De kan använda sig av reglerna på ett korrekt sätt när de bara har en sammanlänkad entalsuppfattning utan de behöver fler regler för att förstå vilka siffror de ska addera eller subtrahera med varandra. Karen Fuson har sammanfattat några av dessa regler som barnen använder i Tabell 3 (Fuson,1992, författarnas översättning).

Tabell 3. Regler för addition och subtraktion av sammanlänkade ental

| Nummer | "rule statement" |
|---|---|
| **Additions regler** | |
| Regel 1 | Skriv talen vertikalt, ett ovanför det andra. |
| a | Ändra inte siffrorna i talen. |
| b | Ordna flersiffriga tal efter ena sidan. |
| c* | Ordna flersiffriga tal åt höger. |
| Regel 2 | Addera siffrorna i varje vertikal kolumn. |
| Regel 3 | Om summan överstiger nio: |
| a | Skriv inte båda siffrorna i den tvåsiffriga summan. |
| b | 1:an från summan måste skrivas någon annanstans. |
| c | 1:an från summan måste adderas till den intillliggande kolumnen. |
| d* | 1:an från summan måste adderas till den till vänster tintillliggande kolumnen. |
| e* | Om summan överstiger 19 skrivs tiotalets siffra. |
| f* | I den långa additionsalgoritmen ska siffran längst till höger i den tvåsiffriga summan ordnas under den adderade kolumnen och siffran till vänster ska skrivas i nästa position till vänster. |
| Regel 4 | En blank siffra (ett blanksteg i en vertikal kolumn): |
| a* | ska behandlas som 0. |
| b* | x + 0 = x |
| **Subtraktions regler** | |
| Regel 1 | Skriv talen vertikalt med det större talet högst upp |
| a | Ändra inte siffrorna i talen. |
| b | Ordna flersiffriga tal efter ena sidan. |
| c* | Ordna flersiffriga tal åt höger. |
| Regel 2a | Subtrahera siffrorna i varje vertikal kolumn. |
| Regel 2b* | Subtrahera det understa talet från det övre talet i varje vertikal kolumn. |
| **Forts. Subtraktions regler** | |
| Regel 3 | Om det undre talet är större än det övre: |
| a | Så går det inte att genomföra subtraktionen. |
| b | Så måste du göra det övre talet större eller lika stort som de undre. |
| c | Så får du mer genom att ta det du behöver från en annan kolumn. |
| d | Så får du mer genom att ta ett från en annan kolumn och skriva 1 i kolumnen som behöver det som ett tvåsiffrigt tal. |
| e | Så får du mer genom att ta ett från en intillliggande kolumn och skriva 1 i kolumnen som behöver det som ett tvåsiffrigt tal. |
| f* | Så får du mer genom att ta ett från den till vänster intilliggande kolumnen och skriva 1 i kolumnen som behöver det som ett tvåsiffrigt tal. |
| g | Om den till vänster intillliggande kolumnen är en nolla, måste du förflytta dig till den första kolumnen utan nolla åt vänster och ta ett därifrån och skriva 1 i varje nollkolumn. |
| h | Om den till vänster intillliggande kolumnen är en nolla, måste du förflytta dig till den första kolumnen utan en nolla åt vänster och ta ett därifrån och skriva 1 i den kolumn som behöver det som ett tvåsiffrigt tal. |
| i* | Om den till vänster intillliggande kolumnen är en nolla, måste du förflytta dig till den första kolumnen utan en nolla åt vänster och ta ett därifrån och skriva 1 som ett tvåsiffrigt tal i den till höger intillliggande kolumnen (och fortsätter att använda denna regel tills 1 är skrivet i den kolumn som behöver det. |
| Regel 4 | En blank siffra (ett blanksteg i en verikal kolumn): |
| a* | ska behandlas som som en nolla. |
| b* | x - 0 = 0 |

* Korrekt procedurregel

Additionsregel 3 gäller tal där summan av tvåmultienheter överstiger nio, och det är vanligtvis här som problemen uppdagar sig. De här reglerna fungerar som ett substitut för de elever som inte har förståelse för att det inte går att skriva en tvåsiffrig summa på platsen för en multienhet, utan att tio av den summan måste växlas till en av den nästa högre enheten. Eftersom ingenting i den sammanlänkade entalsuppfattningen motsätter att man skriver siffror där man vill, ger vissa barn med denna uppfattning svaret 514 på uppgifter av typen 35 + 29, eftersom 3+2 är 5 och 5+9 är 14. Andra barn har lärt sig regeln 3a men har inget begreppsstruktur som hjälper dem att förstå vad de istället ska göra. De kan då antingen ignorera 1:an (tiotalet) i den flersiffriga summan eller så kan de skriva den i en intilliggande kolumn. Här kan barnen antingen ha den korrekta uppfattningen att tiotalet ska adderas till den nästliggande vänstra kolumnen eller så kan de ha en felaktig uppfattning om i vilken ordning talen ska adderas och går ifrån vänster till höger, och placerar då 1:an (tiotalet)överst i kolumnen närmast till höger istället.
Många barn som adderar två tvåsiffriga tal med tiotalsövergång på ett korrekt sätt har ändå visat sig ha en sammanlänkad entalsuppfattning som de använder i kombination med den inlärda regeln 3d. De placerar ettan från tiotalet i den nästintilliggande vänstra kolumnen, men ettan får inget värde, vare sig ett namnvärde (tiotal) i den nya kolumnen eller ses som tio som kommer

från den tvåsiffriga summan. 1:an i kolumnen över tiotalen är helt enkelt en etta, utan betydelse, som skrivs för att reglerna säger det. Även när det gäller subtraktion är det först när barnen stöter på tal med tiotalsövergångar eller när de ska subtrahera två tal med olika antal siffror som deras tidigare strukturer för sammanlänkade ental inte fungerar utan måste kompletteras med fler regler (Regel 3 i tabell 3). Även om barnen har en av de fungerande begreppsstrukturerna för flersiffriga tal och använder den uppfattningen för att addera och subtrahera tal på ett korrekt och meningsfullt sätt kan det hända att barnet använder den sammanlänkade entalsuppfattningen när de presenteras för vertikala uppgifter, och då gör fel på uppgifter de annars klarar (Fuson et al. 1997, s. 42). Den vertikala placeringen av de flersiffriga talen delar in talen i vertikala uppställningar av ensiffriga tal och den för många barn ”onaturliga användningen av vänster-högerpositionen som en viktig betydelse”, kan leda till att barnen använder sig av den felaktiga uppfattningen att talet består av flera ensiffriga tal bredvid varandra, trots att de har mer meningsfulla begreppsstrukturer.

## 3.5 Skriftliga räknemetoder

I Mål att uppnå för år 5 och i de preliminära målen för år 3, kan man bland annat läsa att eleverna ska kunna räkna med naturliga tal med hjälp av skriftliga räknemetoder. De vanligaste metoderna för addition och subtraktion i dagens svenska skola är skriftlig huvudräkning och standardalgoritmen.

### 3.5.1 Skriftlig huvudräkning

Skriftlig huvudräkning utvecklades av Birgitta Rockström i början av 80-talet och används som ett alternativ till algoritmräkning. I den skriftliga huvudräkningen räknar eleverna horisontellt, till skillnad mot algoritmernas vertikala uppställning. Eleverna räknar till en början med mellanled för att förenkla uträkningen. I mellanledet kan läraren följa elevernas tankegångar och deras utveckling. Grundläggande är att räkna varje talenhet för sig med start från den största talenheten och inte med entalen som vid algoritmräkning. Likhetstecken används också vid uppställningen. Till exempel så kan 56 – 34 räknas ut genom att först subtrahera 30 från 50 (50 - 30 = 20) och sedan fyra från sex (6 – 4 = 2). De båda delresultaten läggs sedan ihop, vilket ger svaret 22 (20 + 2 = 22).

Rockströms skriver att den skriftliga huvudräkningsmetodens fördelar är att den förenklar uträkningar eftersom mellanledet kan skrivas ner, den stärker och utvecklar elevers taluppfattning och tabellkunskaper, ger förståelse för positionssystemet och klargör likhetstecknets innebörd. Metoden tar enligt Rockström också vara på elevers fantasi, samt stimulerar och tränar ett kreativt, flexibelt och logiskt tänkande. Ytterligare fördelar som Rockström ser med metoden är att eleverna utvecklar sin förmåga till att använda räknelagarna och till att se samband mellan de olika räknesätten. Det leder till att eleverna också kan dra egna slutsatser. Den skriftliga huvudräkningen tränar även eleverna i att uttrycka sig matematiskt korrekt, både i tal och skrift, samt stärker deras självförtroende och lust så att de vågar och vill räkna ut allt svårare uppgifter (Rockström, 2000, s. 22).

Det krävs dock ett antal förkunskaper för att kunna använda skriftlig huvudräkning på ett meningsfullt sätt. En viktig förkunskap är att inse likhetstecknets betydelse, eftersom det möjliggör förenkling av uttryck. Eleverna måste förstå att samma uttryck kan skrivas om på flera olika sätt utan att uttryckets värde ändras (Rockström, 2000, s. 13).

Andra viktiga förkunskaper är att ha en god kännedom om siffrornas positionsvärde i ett tal, samt att ha goda tabellkunskaper (Rockström, 2000, s. 14). Eftersom Rockströms tanke bakom den skriftliga huvudräkningen är att eleverna ska använda sig av just huvudräkning samtidigt som de dokumenterar sina tankar, är just automatiserade tabellkunskaper en förutsättning för att eleverna ska lyckas med metoden. Om tabellkunskaperna är automatiserade i långtidsminnet, så kan eleven snabbt och utan ansträngning ta fram den aktuella kombinationen när den behövs (Rockström, 2000, s. 15).

I addition kan mellanleden skrivas på olika sätt. Antingen kan varje talenhet räknas för sig (67 + 31 = 90 + 8 = 98) eller så kan ental flyttas över från den ena termen till den andra (699+ 247 = 700 + 246 = 946). Ett annat alternativ kan vara att ändra ordningen av termerna så att enklare kombinationer synliggörs (Rockström, 2000, ss. 22-23).

I subtraktion kan olika mellanled användas. Eleverna kan dels räkna varje talenhet för sig (93 - 48 = 50 – 5 = 45), eller öka båda termerna (95 – 50 = 45, båda termerna ökas med två) eller så kan de använda utfyllnadsmetoden (2 + 43 = 45, utfyllnad från 48 till 50) (Rockström, 2000, s. 27). Genom att låta eleverna skriva mellanleden på olika sätt till samma uppgift, stimuleras elevernas flexibla tänkande (Rockström, 2000, s. 29).

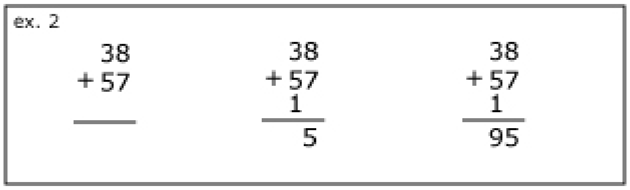
### 3.5.2 Algoritmer

En algoritm är en procedur, eller ett schema som används vid olika beräkningar (Kilborn, 2002, s. 55). En förkunskap till att kunna använda algoritmer effektivt är att behärska lilla och i vissa algoritmer även stora additions- och subtraktionstabellen.
Den vanligaste additionsalgoritmen i Sverige innebär att talen som ska adderas skrivs nedanför varandra, ett summastreck ritas ut och nedanför det skrivs summan (se exempel 1). För att räkna ut summan adderas talenheterna för sig med start från höger. Först räknas kolumnen för ental ut genom att alla ental adderas ihop och summan noteras på entalsplatsen i summaraden. Om summan av entalen överstiger tio, vilket är detsamma som minst ett tiotal, skrivs tiotalet/tiotalen överst i tiotalskolumnen och de resterande entalen noteras i entalskolumnen. Tiotalen adderas sedan, både de som från början fanns i uppställningen och de eventuellt tillkomna efter att entalen adderats ihop. Om tiotalen blir fler än tio, alltså minst ett hundratal, skrivs hundratalet/hundratalen antingen överst i hundratalskolumnen om en sådan finns eller direkt på summaradens plats för hundratal.

ex. 1

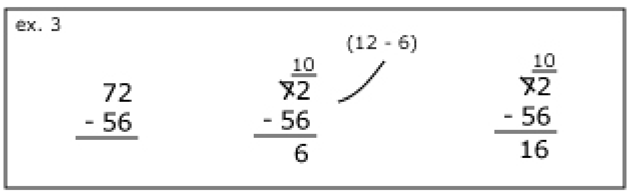
```
             1          1
  36        36         36
 +17       +17        +17
 ---       ---        ---
             3         53
```

Detta är den vanligaste additionsalgoritmen i Sverige, men det finns även andra som kan vara enklare för många barn att förstå. Ett exempel på en sådan algoritm, som beskrivs av Kilborn (2002), är när en rad lämnas tom mellan de båda talen som ska adderas och summaraden. De tio- hundra- eller tusental och så vidare som är ett resultat av adderingen av talenheterna i kolumnen innan och som i vår vanligaste algoritm skrivs överst i kolumnerna, noteras istället på den tomma raden alldeles ovanför summastrecket. 24 + 57 skrivs då på följande vis:




Tiotalet finns då diagonalt till vänster om entalen och det är lättare att se att tiotalsettan och entalsfemman är samma sak som 15 ental. Kilborn (2002) menar att andra fördelar med detta sätt är att bokföringen då blir mer logisk, eftersom tiotalsettan först skrivs direkt över summastrecket och efter det skrivs entalsfemman strax nedanför till höger summaraden. Detta sker då i samma ordning som när talet 15 skrivs vanligtvis. Han menar också att det oftast är enklare att lägga till 1:an sist än först, då det bara är att öka med ett (Kilborn, 2002, s. 56).

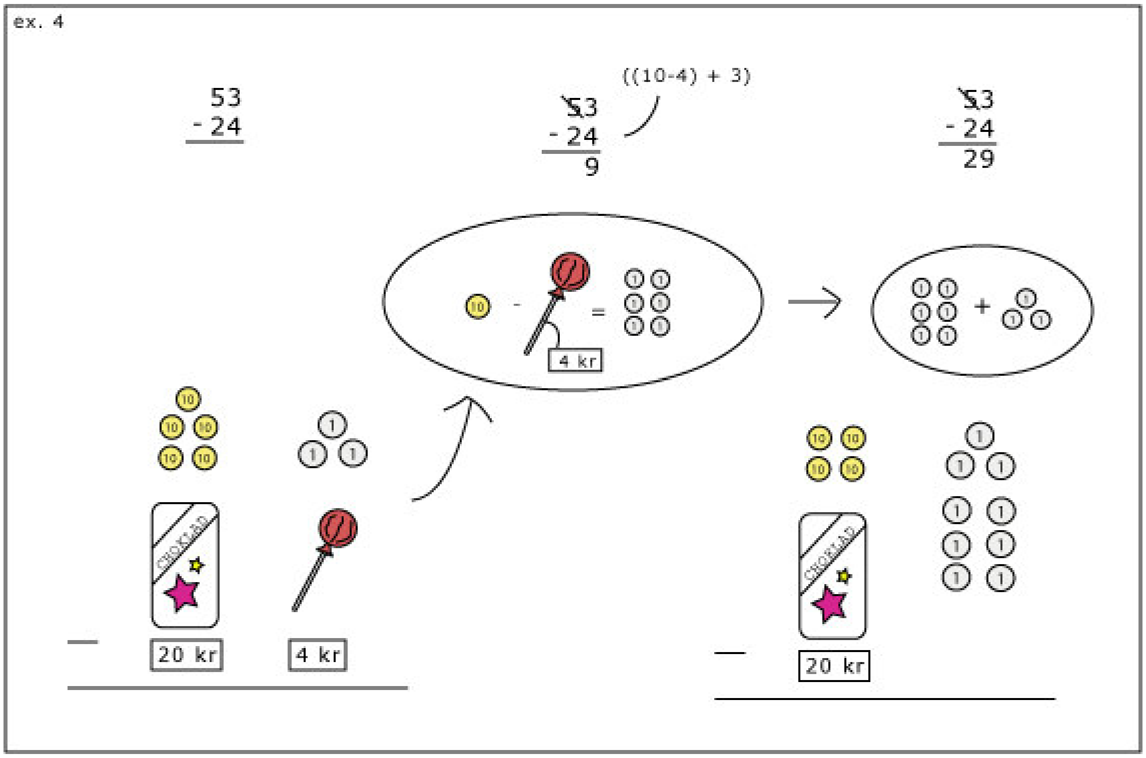
Den vanligaste subtraktionsalgoritmen i Sverige är den så kallade lånemetoden. Talen skrivs nedanför varandra, det största talet överst och det mindre under, ett differensstreck ritas ut och nedanför det noteras sedan differensen av operationen. Differensen räknas ut genom att subtrahera talenheternas kolumner för sig med start från höger. Om talenheten i den övre raden är lägre än talenheten i den undre raden "lånas" en högre talenhet från den översta talenheten till vänster. Denna talenhet växlas sedan till tio av de lägre talenheterna.




I exemplet ovan kan ej sex ental tas bort från två ental enligt denna metod. Därför lånas ett tiotal från de sju tiotalen som också växlas till tio ental. De tio entalen adderas ihop med de två ental som redan fanns där, vilket ger 12 ental. Därefter subtraheras 12 ental med 6 ental och på differensraden noteras delresultatet 6. Kvar bland de övre tiotalen finns då bara sex tiotal. För att komma ihåg att ett tiotal har lånats stryks tiotalssjuan över. Nästa steg är att subtrahera 6 tiotal med 5 tiotal för att till sist skriva 1 tiotal på differensraden. Uppgiften är nu uträknad och resultatet 16 kan utläsas på differensraden.

En annan subtraktionsalgoritm som är relativt vanlig i Sverige är utfyllnadsmetoden. Den bygger på samma operationer som används i vardagen när barnen handlar i affärer. Den är därför enkel att konkretisera och barnen får lättare en förståelse för algoritmen. Genom att leka med pengar och samtidigt bokföra vad de gör kommer många elever naturligt på utfyllnadsmetoden. Metoden bygger på uppräkning och enbart lilla subtraktionstabellen används till skillnad från lånemetoden där även den stora subtraktionstabellen krävs. I utfyllnadsmetoden skrivs talen till en början på samma sätt som i lånemetoden. Det största talet skrivs överst, det mindre nedanför, sedan ett differensstreck och under det finns det plats för att notera delresultaten. Även i utfyllnadsmetoden subtraheras talenheternas kolumner för sig, men när den övre talenheten är mindre än den undre skiljer sig tankesättet dock åt från lånemetodens. Det sker då ingen växling utan en av den högre talenheten används direkt genom subtraktion med det undre talet. Resultatet av den operationen läggs sedan ihop med de övriga i denna talenhet, alltså de som står överst i kolumnen.

I exempel 4, där eleven ska köpa godis, beräknas subtraktionen 53 – 24 med utfyllnadsmetoden. Istället för att växla en tiokrona till enkronor använder man tiokronan direkt för att betala klubban för fyra kronor och får då sex kronor tillbaka. Tillsammans med de tre kronor man redan hade, har man då nio kronor. Därefter använder man två av de fyra tior man nu har till att betala chokladkakan. Kvar i plånboken har man nu nio enkronor och två tior, det vill säga 29 kronor.




Löwing och Kilborn menar att eleverna bör få pröva både informella och formella algoritmer. En informell algoritm är en som enbart fungerar för den aktuella uppgiften i just den situationen, medan en formell räknemetod alltid fungerar för alla liknande uppgifter, en algoritm (Löwing & Kilborn (2002) s. 138). Wiggo Kilborn menar att en väl inövad algoritm är tids- och minnesbesparande sätt. Det är dock viktigt att barnen inte blir så låsta vid algoritmen att de använder den, även då det finns bättre sätt att lösa uppgiften på. Han menar också att om så är fallet är det då en följd av bristande undervisning (Kilborn, 2002, s. 52).

# 4. Metoder och tillvägagångssätt

I Metoder och tillvägagångssätt presenterar och argumenterar vi för val av metoder och undersökningsgrupp. Vi kommer även att gå igenom genomförandet av diagnoser, elevintervjuer och lärarsamtal. Avslutningsvis kommer vi att diskutera undersökningens tillförlitlighet.

## 4.1 Metodval

För att få en bättre förståelse för vilka kunskaper eleverna har valde vi att använda oss av ett diagnosmaterial. Materialet är framtaget på uppdrag av skolverket av Madeleine Löwing. Materialet ska användas av lärare för att kartlägga elevernas kunskapsutveckling och genom det kunna förebygga att eleverna får svårigheter till följd av bristande förkunskaper (Löwing, 2007, in press). ” Kunskapsdiagnosens främsta syfte är att med precision ringa in elevens svårigheter i avsikt att eliminera dem.” (Löwing, 2007, in press)

Vi har valt att använda oss av två delar i materialet. Den första diagnosen Aritmetik Grundläggande 4 (AG4) behandlar grundläggande aritmetik och innehåller additioner och subtraktioner inom talområdet 20 – 99, med och utan tiotalsövergång. Den andra diagnosen Aritmetik skriftlig 1 (AS1) behandlar aritmetik och skriftlig räkning inom området additions- och subtraktionsproblem inom talområdet 0 – 999.

Vi valde de här delarna i samråd med en lärare som ansåg att eleverna borde behärska områdena. Vi anser även att dessa diagnoser ger indikationer på vilka begreppsstrukturer barnen använder. AG4 är rena taluppgifter av typen 84 + 9 = _ , som visar ifall eleverna kan generalisera det lägre talområdets additioner och subtraktioner (Löwing, 2007, in press). AS1 består av textuppgifter där eleverna ska visa att de kan tolka och teckna den addition eller subtraktion som texten efterfrågar, samt om de kan utföra den aktuella beräkningen (Löwing, 2007, in press, s.56).

## 4.2 Val av undersökningsgrupp

Vi kom i kontakt med de skolor som deltagit i undersökningen genom internetsidan *Nationella ex-jobb poolen*. Här hade rektorerna i ett område i Göteborg lagt ut en förfrågan om det fanns några studenter som i sitt examensarbete var intresserade av att undersöka elevernas svårigheter i matematik i år 5. Efter att ha besökt skolorna och pratat med några berörda rektorer och lärare bestämde vi oss för att istället genomföra undersökningen i år 3. Detta beslut grundades dels på att lärarna på en av de berörda skolorna inte hade tid och möjlighet att delta i undersökningen och att undersökningsgruppen i år 5 då hade blivit för liten. En annan orsak till beslutet var att eleverna i år 3 bör ha tillägnat sig tillräckliga kunskaper för att ha utvecklat begreppsstrukturer inom addition och subtraktion, de områden vi valt att undersöka närmare.

## 4.3 Genomförande av diagnos

Vi besökte skolorna under ordinarie lektionstid. Sammanlagt gjorde 67 elever på två olika skolor diagnosen. Eleverna hade blivit förberedda på att vi skulle komma. Vi började med att presentera oss själva och vårt syfte med besöket. Vi betonade särskilt att diagnoserna inte var ett prov för eleverna utan ett redskap i vår undersökning. Detta för att minska stressen och prestationsångesten för eleverna. Efter instruktioner om genomförandet delades diagnos AG4 ut till samtliga elever i år 3. Berörda elever samlades i klassrum/grupprum och arbetade enskilt under tystnad med diagnosen. Gruppstorleken varierade mellan 5 och 22 elever åt gången.

När eleverna var färdiga noterades tiden och om de använt fingerräkning, dock inte så att eleverna såg det. Därefter fick de omedelbart börja med diagnos AS1. Här kunde de få hjälp att läsa uppgifterna och tolka svåra ord, flera elever hade svenska som andraspråk, men för övrigt gavs ingen hjälp utan eleverna uppmanades att göra så gott de kunde. Deras lärare var ej närvarande under diagnostillfället. När diagnos AS1 var klar noterades återigen tiden och eleven fick återvända till den ordinarie undervisningen.

## 4.4 Genomförande av elevintervjuer

Efter att ha analyserat diagnoserna och kartlagt de strukturella problemområdena besökte vi skolorna igen för att intervjua eleverna. Av de 67 eleverna som genomförde diagnoserna intervjuade vid de 35 som lämnat in påskrivna tillståndsblanketter vid dagen för besöket. Intervjuerna genomfördes antingen i enskilda rum, eller i klassrummet under lektion beroende på vad som passade bäst organisationsmässigt. Intervjuerna spelades in vilket eleverna var medvetna om och godkände. Eleverna fick se ej ifyllda diagnoser där vi pekade ut de uppgifter vi ville att eleverna skulle förklara. De fick tillgång till papper och penna. På AG4 valde vi ut fyra uppgifter av varierande karaktär, där eleverna visat brister i diagnosen:

**_ - 3 = 90** Uppgiften valdes för att kartlägga elevernas kännedom och hantering av öppna utsagor.

**77 – 75 = _** Uppgiften valdes för att se hur eleverna hanterar subtraktioner med två tvåsiffriga tal.

**84 + 9 =_** Uppgiften valdes för att se vilken metod eleverna använder sig av vid addition och eventuellt kunna urskilja om eleverna använder sig av en en-enhetsuppfattning.

**51 – 49 = _** Uppgiften valdes för att se vilken metod eleverna använde sig av när de presenterades för huvudräkningsuppgifter med subtraktion och tiotalövergång.

Vid behov fick eleverna även förklara fler uppgifter för att vi med större säkerhet skulle kunna fastställa felaktiga och otillräckliga tankegångar.

På AS1 fick eleverna förklara hur de löst två av uppgifterna:

**Morfar är 63 år och mamma är 37 år.
Hur mycket äldre är morfar än
mamma?**

**Nicolas hoppar 528 cm i längdhopp.
Hans lillasyster Stina hoppar 376 cm.
Hur mycket längre hoppar Nicolas än
Stina?**

Vi valde ut dessa två uppgifter, nr 2 och 3 på diagnosen, eftersom dessa två uppgifter orsakat stora problem för eleverna och vi ville få en förtydligad bild av elevernas räknemetoder vid subtraktion med tiotalsövergång.

## 4.5 Genomförande av lärarsamtal

För att även få en bild av hur undervisningen såg ut på de olika skolorna hade vi samtal med lärarna där de fick beskriva med egna ord hur de genomförde sin matematikundervisning. Vi samtalade med sammanlagt nio lärare som representerade samtliga inriktningar och skolår från båda skolorna. Vi valde att ha ett informellt samtal istället för en intervju med färdiga frågor eftersom vi trodde att lärarnas spontana beskrivning skulle bli ärligare om de inte upplevde den pressen på "korrekta" svar som inspelade intervjuer kan innebära. Vi valde istället att föra anteckningar. Genom frågor ledde vi in samtalen på för undersökningen relevanta områden. De specifika frågorna vi var intresserade av handlade om organisationen av undervisningen, vilka talområden som berörts och när, vilka läromedel som används och på vilket sätt, när och hur eleverna presenteras för subtraktion med multienheter och för tiotalsövergångar. Slutligen var vi intresserade av vilken metod som användes när huvudräkning inte räcker till, dvs. om de använde sig av den skriftliga huvudräkningsmetoden eller av uppställning i algoritm.

## 4.6 Studiens tillförlitlighet

Vi har valt att presentera studiens tillförlitlighet utifrån de tre begreppen reliabilitet, validitet och generaliserbarhet. Dessa tre begrepp kan användas för att fastställa undersökningens kvalité (Stukát, 2005, s. 125). För att studiens reliabilitet ska bli så hög som möjligt har vi använt oss av flera olika mätinstrument.

Först genomfördes diagnosen, där varje område som berördes testades med fyra liknande uppgifter för att täcka upp för eventuella slarv- och slumpfel, vilket ökar resultatets tillförlitlighet. Vi följde sedan upp diagnoserna med elevintervjuer, som skedde i en för barnen välkänd och avspänd miljö där vi försökte reducera pressen på barnen genom att inte fokusera på om de gav rätt svar. Elevintervjuerna spelades in för att inget skulle glömmas bort eller förvrängas i efterhand och vi gick sedan igenom samtliga intervjuer gemensamt.

Vi gjorde även en genomgång och analys av de aktuella läroböckerna och samtalade med lärarna om undervisningen för att hitta bakgrunderna till och ytterligare bekräfta elevernas tankestrategier och begreppsstrukturer.

Vi ville i vår studie undersöka dels vilka de stora strukturella problemområdena var och dels vad som kunde ha orsakat dem.
Diagnosen är ett utmärkt mätinstrument för att mäta om eleverna kan lösa uppgifterna, men inte om de förstår begreppen. Diagnoserna gav dock en misstanke om orsaker som sedan kunde bekräftas i och med intervjuerna. Vi anser i och med detta att studiens validitet är god.

Undersökningen är dock inte helt generaliserbar eftersom det är en fallstudie i ett specifikt område. Generaliserbarheten ökar något i och med det relativt höga antalet elever som deltagit, men sjunker samtidigt något med tanke på att samtliga elever kommer från samma område. Men eftersom de fel och missuppfattningar som studien avslöjat visat sig vara såpass högfrekventa i undersökningsgruppen finns det stor anledning att tro att detta är resultat som kan visa sig gälla även mer generellt.

## 4.7 Etik

Vi har valt att redogöra för studiens etiska perspektiv utifrån Vetenskapsrådets fyra etiska krav på forskning; informationskravet, samtyckeskravet, konfidentialitetskravet och nyttjandekravet (Vetenskapliga rådet, 2007).

Informationskravet har vi uppfyllt genom att informera barnen och dess målsmän om studiens syfte via ett brev till hemmet. I brevet upplyste vi även om att deltagandet var frivilligt och när som helst fick avbrytas.

Samtyckeskravet har vi uppfyllt genom att genom samma brev få skriftligt tillstånd från vårdnadshavare till de barn som deltog. De elever som hade tillstånd fick sedan själva välja om de ville bli intervjuade.

Konfidentialitetskravet uppfylls genom att allt material behandlas konfidentiellt och att slutrapporten är helt avidentifierad.
Nyttjandekravet uppfylls eftersom materialet enbart kommer användas i vetenskapligt syfte och inga personuppgifter, förutom förnamn, finns med i det insamlade materialet.

# 5. Resultat och analys

Resultaten kommer att redovisas skola för skola. Vi börjar med att beskriva matematikundervisningen. Denna beskrivning baseras på lärarsamtalen. Sedan kommer en redovisning av resultaten från diagnosen och intervjuerna. Därefter följer en genomgång av läroböckerna. Slutligen presenteras en gemensam analys.

## 5.1 Skola A

Skola A är en F-3 skola i norra Göteborg. Skolan är indelad i fyra spår med ca 8 elever i år 3 i varje klass. Spåren är åldersintegrerade med elever från F-3 och i varje spår arbetar fyra stycken pedagoger med olika utbildning.
I Skola A deltog 31 elever från fyra olika grupper i undersökningen.

### 5.1.1 Matematikundervisningen (enligt lärarna)

Lärarna på Skola A har utarbetat ett eget material i matematik som de kallar för Matteschemat och som uppdateras regelbundet. Matteschemat används av tre av fyra spår på skolan på varierande sätt. Materialet innefattar många spel och andra praktiska aktiviteter och fokuserar mycket på den grundläggande taluppfattningen. Eleverna arbetar för det mesta individuellt och självständigt med materialet medan läraren går runt och hjälper till.
Innan eleverna påbörjar arbetet med Matteschemat har de arbetat med talområdet 0 - 5. I det första steget i Matteschemat arbetar man med talområdet 0 - 10. Eleverna introduceras för både addition och subtraktion redan från början och man arbetar mycket med förhållandet mellan de båda räknesätten. Man arbetar även mycket med öppna utsagor och likhetstecknets betydelse. Tanken med materialet är att eleverna ska få möjlighet att träna samma sak på många olika sätt om de behöver det. Lärarna har valt bort att arbeta med en lärobok eftersom de anser att i böckerna förutsätts det att alla elever behöver samma och lika mycket träning inom varje moment. Med Matteschemat känner lärarna att de har större möjlighet att individualisera. Efter att ha arbetat med talområdet 0 -10 utökas arbetet till att innefatta talområdet 0 - 100 med uppgifter utan tiotalsövergångar eller operationer med två stycken tvåsiffriga tal. Arbetet med matteschemat sträcker sig över ca två år, men det är väldigt individuellt från elev till elev.
Efter att Matteschemat är färdigt, vanligtvis i början av år 3, går eleverna över till att använda läromedlet Matteboken 3A och senare 3B (Rockström & Lantz, 1998). Anledningen till att de då går över till att arbeta med en lärobok är att den skola som eleverna börjar i efter år tre har efterfrågat detta. I Matteboken 3A introduceras barnen för operationer med tvåsiffriga tal och tiotalsövergångar. Metoden som används är Skriftlig huvudräkning med mellanled, en metod framtagen av Birgitta Rockström. Lärarna har valt att arbeta med just denna bok efter en inspirationsföreläsning av Rockström själv. Lärarna anser att skriftlig huvudräkning är bättre än andra metoder eftersom den visar mer på siffrornas positionsvärde i talet.
I Matteboken 3B introduceras även algoritmer med lånemetoden som ett komplement till den skriftliga huvudräkningen. Tre av spåren följer läroboken medan det fjärde spåret hoppar i boken för att arbeta färdigt med en sak isänder. Detta spår arbetar även tematiskt med den största delen av matematiken. Två spår använder sig av hela Matteschemat och ett spår använder sig bara av den första delen och går redan i år två över till Matteboken 2A. Det fjärde spåret har utarbetat ett eget material som påminner mycket om Matteschemat. Den största skillnaden är att eleverna här arbetar sammanhållna.
Ett pass i veckan arbetar samtliga spår med nivågrupperad matematik. Inom spåret placeras då eleverna i grupper styrda av elevernas behov och kunskaper. På de här timmarna arbetar eleverna

mycket med problemlösning, men pratar mycket matematik och lärarna håller genomgångar om det finns ett behov av det.

### 5.1.2 Resultat

Diagnosen visar att flera elever på Skola A har otillräckliga tankestrukturer när det gäller huvudräkning av addition och subtraktion inom talområdet 0 – 100. Över hälften av eleverna tar över tio minuter på sig för att lösa uppgifterna i diagnos AG4. Enligt anvisningarna bör en elev som behärskar talområdet 0 – 100 klara diagnosen på 4-5 minuter och diagnosen bör avbrytas efter ca tio minuter eftersom elever som kräver så lång tid sannolikt saknar kunskaper inom området. Åtminstone 14 av de 31 eleverna i gruppen tar tydlig hjälp av fingrarna under diagnosen.

Problemområden tycks vara ganska samlade inom gruppen, även fast vi stöter på en del specifika problem hos eleverna. Det största problemområdet är subtraktion av flersiffriga tal med tiotalsövergångar. Bara 13 % av eleverna klarade uppgiften 63 – 37 och när talområdet utökades till tresiffriga tal var det endast 2 elever som klarade subtraktionen 528 – 376, vilket motsvarar 6 %. Även subtraktion av två tvåsiffriga tal utan tiotalsövergångar visade sig vara ett problem för många elever. Nästan 30 % av eleverna kunde inte lösa uppgiften 77 – 75 korrekt. Några av dessa angav att det inte gick att lösa uppgiften medan de andra angav svaret 72 eller annat inkorrekt svar. Även talet 51 – 49, som enkelt kan lösas med hjälp av ”lägga till metoden”, orsakade stora problem för många elever. Bara drygt 40 % av eleverna löste uppgiften korrekt. Av de 18 elever som inte löste uppgiften svarade sju stycken att svaret blev 18, ytterligare sju valde att inte svara alls och fyra elever angav andra felaktiga svar.

### 5.1.3 Intervjuer

I intervjuerna med eleverna tydliggörs problemområdena ytterligare. Många elever har svårt att förklara varför de utför sina beräkningar på ett visst sätt och visar ingen förståelse för operationerna. Många elever räknar med metoden skriftlig huvudräkning utan att förstå den korrekt. En elev förklarar att det alltid är minus i mellanledet vid skriftlighuvudräkning om det är en subtraktionsuppgift och plus om det är en additionsuppgift. Flera elever, som får fram rätt svar, förklarar att man skriver minus i mellanledet när det är tal som ”inte går”. Talet 63 – 37 löses till exempel genom att eleverna först subtraherar tiotalen och får fram 30. Därefter ska de subtrahera entalen, men konstaterar att det ”inte går”. Då sätter de ut ett minustecken i mellanledet efter 30, vänder på entalen och räknar 7 – 3 och får fram 4, vilket ger mellanledet 30 – 4 som leder till det korrekta svaret 26.

En elev, som angett svaret 18 på uppgiften 51 – 49, förklarar att hon först räknat tiotalen och fått 50 – 40 = 10 och sedan 9 – 1 = 8 vilket ger svaret 18. Hon förklarar att hon tar det större talet först och subtraherar det mindre för att hon ”gillar det bäst”. Flera elever visar tydligt under intervjuerna att de inte förstått betydelsen av talens ordning i subtraktion, utan subtraherar alltid det mindre talet från det större.

En elev börjar räkna ut 51 - 49 som flickan ovan, men när han ska skriva 18 som svar ändrar han sig och vill skriva 2 istället. Detta eftersom han kommit på att det är lättare att räkna upp från 49 till 51 i två steg genom huvudräkning. Dock reagerar han inte över att de två svaren han fått fram med olika metoder skiljer sig markant åt, utan kommenterar att "de är ju olika sätt", och accepterar alltså att det då kan bli olika svar.

I intervjuerna framkommer det även att flera elever inte förstår positionssystemets betydelse. De adderar ental med tiotal om vartannat. En elev förklarar sitt svar 51 – 49 = 0 på följande sätt:

”Först tar jag bort 40 från 50 så blir det 10 [tiotalen]. Sen tar jag bort 9 [9: an i 49] från 10 [från tiotalssubtraktionen] så blir det 1. Sen tog jag bort 1 från 1 [1: an i 51] så blev det 0.”
Ett annat exempel är två elever som angett att 63 - 37 = 40. Detta svar har de fått fram genom att först subtrahera 60 – 30 och fått fram 30 för att i nästa steg addera entalen 3 och 7 och få fram 10 som i ett tredje steg adderas med talet 30 och på så sätt får de fram att 63 – 37 = 40.
Ytterligare ett exempel är en elev som räknar ut 528 - 376 till 201. Eleven subtraherar först hundratalen och få fram 200, när tiotalen subtraheras byter eleven ordningen och räknar 7 - 2 = 5, inte 50, och tillsist subtraheras entalen 8 - 6 där eleven får svaret 4. Mellan ledet ser nu ut på följande sätt: 200 - 5 - 4, vilket eleven räknar ut och får fram svaret 201.
Det förekommer även exempel där eleverna byter plats på ental och tiotal eller bara behandlar det ena tresiffriga talets tiotal och ental.

## 5.2 Skola B

Skola B är en F-5 skola och är indelad i åldersintegrerade spår. På skolan finns det fem F-2:or och fem 3-5:or. På Skola B finns även två Montessoriklasser, men eftersom de arbetar på ett annat sätt än övriga skolan har vi valt att ta upp Montessorieleverna i ett särskilt avsnitt som kommer benämnas Skola B-M.
I Skola B deltog 24 elever från fem olika grupper i undersökningen.

### 5.2.1 Matematikundervisningen (enligt lärarna)

I år 1-2 arbetar barnen mycket med konkretiserande material, såsom kulramar och pengar. Eleverna arbetar först med talområdet 0 - 9 som senare utökas till området 0 -100. De använder sig av Matteboken 1A – 2B. Alla elever arbetar i sin egen takt och det är stor spridning på eleverna. De har gemensamma genomgångar ibland men oftast förklarar läraren nya moment för eleverna en och en. Barnen introduceras för den skriftliga huvudräkningsmetoden i Matteboken 2. Läraren uppfattar det som att vissa barn har svårigheter med mellanledet, men tycker själv att det är en bra och enkel metod.

I 3-5:orna på Skola B används läroboken Matteboken 3A och 3B för de flesta elever i år tre. I år fyra byter man till läroboken Matteborgen (Andersson & Picetti, 2006). Det är inte lärarna själva som har valt läromedlet Matteboken, utan det är ett material som funnits på skolan en längre tid. Lärarna själva är inte speciellt positivt inställda till Matteboken, utan anser att den är ostrukturerad och komplicerad för eleverna. Därför kommer de till hösten att byta lärobok till Matteborgen även för treorna.
Arbetet med Matteboken kompletteras vid behov med stenciler, läxor och praktiska aktiviteter. Eleverna använder själva mycket praktiskt material när de räknar i böckerna eller gör andra uppgifter, såsom till exempel pärlor, bönor, klossar, Cusinairs stavar och plastpengar.

En lärare berättar att hon ibland får möjlighet att ha matematiklaborationer enbart med eleverna i år tre, men att det tyvärr inträffar väldigt sällan. Klasserna är åldersintegrerade och det är stor spridning vad gäller kunskaperna hos de få elever av samma ålder som finns i varje klass. Därför anser lärarna att det inte är meningsfullt med genomgångar i grupp och har inte det, förutom under de speciella mattepassen en gång i veckan, då eleverna främst arbetar med problemlösning. Lärarna introducerar och förklarar därför varje enskilt moment för en och en i det vanliga arbetet. Om flera elever är på samma ställe, så kan det bli möjligt att förklara momentet för några få. Annars arbetar eleverna självständigt i sin egen takt.

Av intervjuerna framkom också att eleverna inte har så stora möjligheter till ”matteprat”, vilket lärarna anser vara synd. Anledningen till det är enligt en lärare åldersintegreringen och den stora spridningen på elevernas kunskapsnivå.

Vad gällde den skriftliga huvudräkningsmetoden, som Matteboken grundar sig på, visade det sig att lärarna var negativt inställda till den. De ansåg att eleverna hade svårt för att förstå räkning med mellanled, även om meningen med metoden är att på lång sikt utveckla bättre tankestrategier. Lärarna uppmanar ofta eleverna att ställa upp uppgiften med lånemetoden eller räkna ut det på något annat sätt och inte bry sig om den skriftliga huvudräkningen. Lärarna påpekade också att de tycker att det är en brist att boken baseras så mycket på den skriftliga huvudräkningen.

### 5.2.2 Resultat

På Skola B visade diagnosen att många av eleverna saknade effektiva tankestrategier, vilket bland annat visade sig i att enbart 50 % av eleverna klarade AG4 på under 10 minuter. Diagnosen visade också att även här var subtraktion med flersiffriga tal ett stort problemområde och då speciellt vad gällde i vilken ordning talen ska subtraheras. Uppgiften 63-37 klarade enbart hälften av eleverna och 29 % av eleverna har angett svaret 34. Av de sju som angav svaret 34 använde sig fem av skriftlig huvudräkning och två av uppställning i algoritm. Den nästföljande textuppgiften som handlade om subtraktion av två tresiffriga tal klarade 11 elever, vilket motsvarar drygt 41 %. Sju av dessa elever har använt sig av uppställning i algoritm och de återstående fyra har inte visat några uträkningar.
Eleverna hade också stora problem med uppgiften 51-49 där över 60 % inte angav korrekt svar och hälften av dessa angav svaret 18.
En annan uppgift som vållade stora problem var 77-75. Nästan 40 % av eleverna klarade inte av att räkna ut den korrekt och de vanligaste felaktiga svaren var 72 och 70. Svaren 0, 12 och 20 förekom också.
Drygt 45 % angav inget eller ett felaktigt svar på uppgiften _ - 3 = 90. 27 % av dem angav svaret 87.

### 5.2.3 Intervjuer

I elevintervjuerna framkommer det att många elever har svårt med öppna utsagor av typen _ - 3 = 90 och de kan inte ge något svar på uppgiften. En av eleverna som angett 87 som svar i diagnosen intervjuades, och i intervjun framgick det tydligt att eleven uppfattat att det var en subtraktion. En elev förklarar att han inte vet hur han ska lösa uppgifter av typen öppna utsagor och på frågan hur han gör med de uppgifterna i läroboken svarar eleven att han då får hjälp, men förstår inte själv hur han ska göra.
Flera elever berättade dessutom att det inte spelar någon roll om de räknar 3 - 7 eller 7 - 3. Även några av de elever som fick ett korrekt svar med hjälp av skriftlig huvudräknings metoden, visade sig ha de här felaktiga tankeformerna. De korrekta svaren fick de genom att de visste att de skulle sätta dit ett minustecken när talet som ska subtraheras från det andra är större än den andra. Flera elever säger att det inte går att räkna under noll.
Det framkom även att åtminstone 3 elever hade en sammankopplad entalsuppfattning. En elev beskrev detta genom att förklara och visa att fyran i 40 var lika mycket som fyra fingrar.
En annan elev visar sin bristande förståelse på flera uppgifter. 77 - 75 blir enligt eleven 71, 58 - 57 blir 51. 84 + 9 får eleven till 89. Eleven har ingen förståelse för att 8: an i 84 är ett tiotal, eller

för vad tiotal innebär. Eleven får även fram fel svar när hon räknar tal med tiotalsövergång (72 - 8 = 68) och om uppgiften dessutom innehåller två tvåsiffriga tal vet hon inte alls hur hon ska göra. Många elever visade att de kunde dela upp ett tal och använda sig av den kommutativa lagen vid addition och uppgiften 84 + 9 löstes som 89 + 4 eller som 83 + 10 av flera elever.

## 5.3 Skola B-M

Montessoriklasserna på Skola B är uppdelade på två klasser, med sammanlagt tretton elever i år 3.
I Skola B-M deltog tolv elever från två olika grupper i undersökningen.

### 5.3.1 Matematikundervisningen (enligt lärarna)

I båda klasserna arbetar man på liknande sätt med matematik. De arbetar mycket med praktiskt material, men också med läromedlet Flex (Öreberg, Brogren, Johansson, Paulsen, Torstensson, Vogel, 2000). Boken styr undervisningen och eleverna arbetar fritt och självständigt. Då och då har de gemensamma genomgångar och för en del blir det då introduktion och för andra repetition. I läroboken finns det inga förklaringar av nya moment, utan läraren får ha individuella genomgångar med varje elev. Typiskt för Montessori är att eleverna arbetar individuellt, vilket de även gör på skola B-M, men läraren försöker även få in problemlösning i grupp som ett komplement till det individuella arbetet. Huvudräkning tränas genom att eleverna räknar de olika tabellerna på lösa blad varje dag. I F-2 har eleverna inte arbetat med läroböcker, utan de arbetar med små häften och med laborativt material. I år 1 arbetar eleverna inom talområdet 1-9, därefter utökas området till 0-20. Parallellt med motsvarande ental arbetar de också med de jämna tiotalen, till exempel 9-2 och 90-20. Innan eleverna börjar år 3 har de även arbetat med hundratal och tusental med hjälp av konkret material. I år 3 introduceras eleverna för addition och subtraktion med tiotalsövergångar. De använder konkretiserande material såsom tiobasmaterial, pengar och spel. I år 3 introduceras även subtraktion med två flersiffriga tal. Eleverna får först lära sig att beräkna uppgifterna med hjälp av huvudräkning, för att sedan i slutet av år 3 få lära sig algoritmer. Detta för att läraren anser att eleverna då kan och förstår positionssystemet. Läroboken Flex använder sig av både algoritmer en typ av skriftlig huvudräkning, som de kallar skriftlig huvudräkning vågrät. I addition fungerar den likadant som Rockströms skriftliga huvudräkningsmetod, hundratalen adderas först, sedan tiotalen och till sist entalen. Slutligen adderas hundratal, tiotal och ental ihop för att få fram svaret. I subtraktion ska eleverna använda sig av utjämna med hjälp av tallinjen.
Läraren brukar använda sig av huvudräkning och algoritmer bara när det krävs.

### 5.3.2 Resultat

Diagnosen visar att två av eleverna saknar grundläggande förståelse för multienheter. De visar stora brister i förståelsen av positionsvärde, vilket visar sig i svar av typen 40 + 30 = 43 och 48 + 24 = 612. Många svar saknar även helt rimlighet. Dessa elever visar även på stora kunskapsluckor inom flera andra områden. Bland annat kan de inte avgöra om de ska använda addition eller subtraktion för att lösa textuppgifterna, samt att deras räknestrategier är uppenbart bristfälliga och kräver mycket tid vid huvudräkningsuppgifterna.
Det största problemområdet som diagnosen avslöjade var att flertalet elever har problem med subtraktion med tio- och hundratalsövergångar vid flersiffriga tal.
På uppgiften 51 - 49 angav 50 % av eleverna det korrekta svaret 2, 18 % angav svaret 18, 17 % har inte angett svar och 17 % angav andra svar (11 och 91). Bara knappt 17 % av de eleverna

kunde lösa följande uppgift korrekt: Morfar är 63 år och mamma är 37 år. Hur mycket äldre är morfar än mamma? Drygt 58 % av eleverna angav svaret 34.
Två av eleverna gjorde även växlingsfel vid algoritmräkning på den skriftliga delen av diagnosen, där svaret blivit ett tio- hundra- eller ental fel.
Diagnosen visade även att fler än hälften av eleverna använde sig av alltför tidskrävande tankestrategier som ofta ledde till fel. Hälften av eleverna tog över tio minuter på sig att lösa diagnosen AG4, som enligt anvisningarna bör avbrytas efter ca 10 minuter eftersom elever som kräver så lång tid sannolikt saknar kunskaper inom området. Den elev som behövde längst tid blev avbruten när hon efter 22 minuter fortfarande inte var klar.
I den skriftliga delen av diagnosen har sex av tolv elever använt sig av algoritmer, en har använt sig av både algoritmer och skriftlig huvudräkning, två har använt sig enbart av skriftlig huvudräkning och ytterligare tre har bara angett svar.

### 5.3.3 Intervjuer

På skola B-M var det bara tre av tolv eleverna som hade tillståndslappen för intervjun med sig vid den aktuella dagen, vilket leder till en liten intervjugrupp från skolan.

En av de tre eleverna löste textuppgifterna med operationerna 63 - 34 och 528 - 376 med hjälp av den vågräta huvudräkningsmetoden som presenteras i läroboken Flex. Eleven löste uppgifterna korrekt och kunde beskriva tillvägagångssättet, men han ställde upp uppgiften som en standardalgoritm med talen ovanpå varandra.

En elev löste 63 - 37 genom att först subtrahera 30 från 60 och sedan 3 från 7 och fick svaret 34. Eleven förklarade att hon måste byta ordningen på 3: an och 7: an eftersom det inte går att komma under noll. Den sista eleven kunde inte ge något svar på uppgifterna med tiotalsövergång alls. Han förklarade att man skulle räkna ut vad man skulle plussa till 37 för att det skulle bli 63, men visste inte hur han skulle gå tillväga.

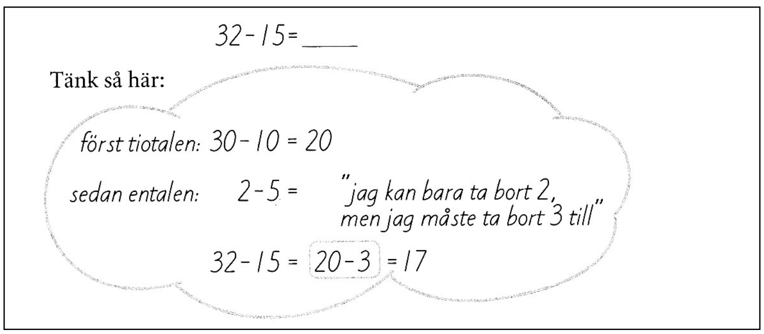
En elev, som angett svaret 11 på diagnosen för uppgiften 51 - 49, förklarar uträkningen genom att beskriva att hon la till 1 till 49 för att få 50. Sedan tog hon 51 - 50 och fick då 1 kvar, hon adderar de två ettorna och får i intervjun svaret två, medan hon i diagnosen skrivit ut sina två ettor bredvid varandra istället och fått svaret 11.

## 5.4 Genomgång av aktuella läroböcker

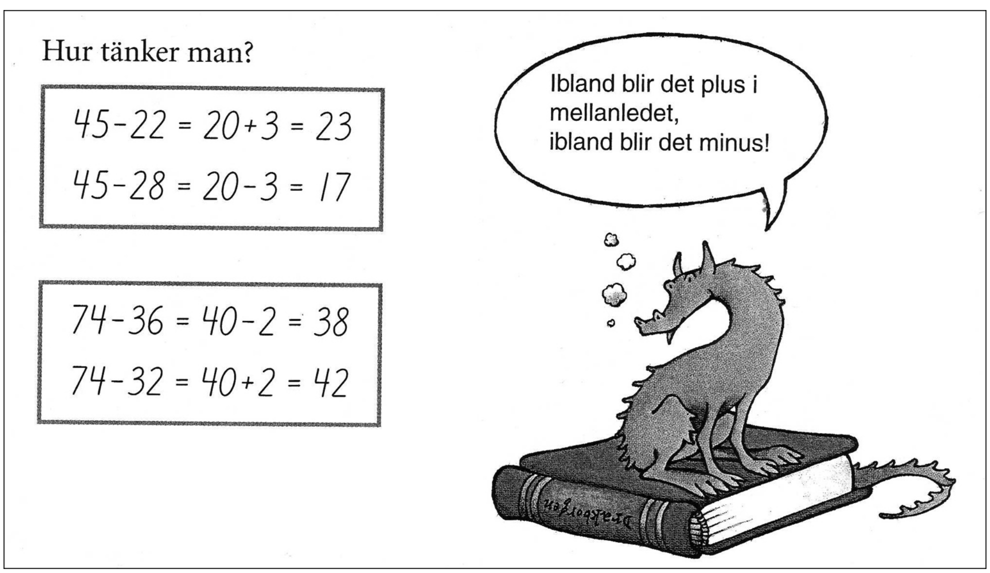
I vår genomgång av läroböckerna koncentrerar vi oss på räknemetoder för uppgifter som är svåra att lösa med huvudräkning.

### 5.4.1 Matteboken

I Matteboken, författad av Rockström och Lantz (1998), används metoden skriftlig huvudräkning med mellanled för operationer som eleverna inte kan utföra i huvudet. Eleverna presenteras för metoden första gången i bok 2A, vilken vanligtvis används höstterminen i år 2. Eleverna får först lära sig att räkna ut additioner med två tvåsiffriga tal utan tiotalsövergångar. I bok 2B presenteras addition och subtraktion inom talområdet 100 - 500 utan tiotalsövergång. I denna bok möter eleverna även additioner av två tvåsiffriga tal med tiotalsövergång och subtraktioner med två tvåsiffriga tal utan tiotalsövergång.
I bok 3A möter barnen talen upp till 1000. Där presenteras eleverna för subtraktionen med två tvåsiffriga tal med tiotalsövergång på följande sätt (Rockström & Lantz, 1998, s. 56):




I nästa steg ska eleverna utföra beräkningar med två tresiffriga tal med en tiotalsövergång, vilket innebär att det blir både plus och minus i mellanledet, vilket presenteras så här (Rockström & Lantz, 1998, s. 58):

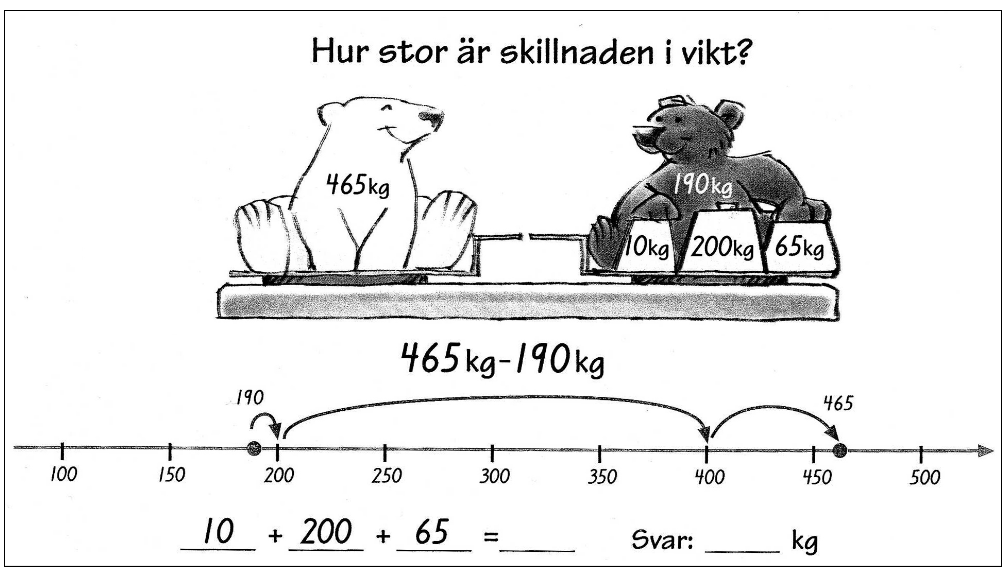



I bok 3B presenteras eleverna för standardalgoritmen parallellt med den skriftliga huvudräkningen. När tiotalsövergången presenteras i algoritmuppställningen är det lånemetoden som används.

### 5.4.2 Flex

Flex är författad av Öreberg med flera (2000). I läroboken används olika metoder för addition och subtraktion. Vid addition av flersiffriga tal, som är komplicerade att räkna i huvudet, ska eleverna använda sig av skriftlig huvudräkning vågrätt och skriftlig huvudräkning lodrätt. Det som författarna benämner som skriftlig huvudräkning vågrätt är i addition detsamma som Rockströms skriftliga huvudräkningsmetod. Den introduceras ungefär i mitten av Flex 6, vilken är den bok som eleverna vanligtvis räknar i under vårterminen i år 3, där även addition med två tvåsiffriga tal kommer in. Efter ett par kapitel med bland annat räkning med tal av denna typ introduceras sedan den skriftliga huvudräkningen lodrätt, som är detsamma som den vanligaste additionsalgoritmen i Sverige.
Efter att addition med två tvåsiffriga tal räknats i några kapitel, introduceras eleverna för subtraktion med två tvåsiffriga tal. Även här kommer den skriftliga huvudräkningsmetoden vågrätt först för att sedan i slutet av boken Flex 6 följas av den skriftliga huvudräkningsmetoden lodrätt, den vi vanligtvis kallar för lånemetoden.
I den vågräta skriftliga huvudräkningsmetoden för subtraktion används tallinjen för att i flera steg räkna ut skillnaden mellan de båda talen. Liksom i Rockströms skriftliga huvudräkningsmetod använder sig eleverna av ett mellanled, men i Flex använder man enbart utfyllnadsmetoden, man subtraherar alltså inte de olika talenheterna med varandra utan man utgår ifrån det lägsta talet och räknar i etapper upp till det högre. Tallinjen är alltid utritad i anslutning till uppgifter som ska beräknas med skriftlig huvudräkning.

Uträkningen går till på följande vis (Öreberg et al. 2000, s. 100):




För talet 465 - 190 börjar eleverna med att titta på tallinjen för att räkna ut hur mycket det är från 190 till 200 och noterar att det är 10. I nästa steg tar eleven reda på differensen mellan 200 och 400, vilket är 200. Eleven noterar även det och räknar sedan ut hur mycket det är mellan 400 och 465. Svaret 65 noteras innan eleven slutligen lägger ihop alla tre delresultat för att få det korrekta svaret 275. I Läroboken Flex finns det inga förklaringar, annat än beskrivna när nya moment introduceras, utan det är lärarens uppgift att stå för dem.

## 5.5 Analys av resultat

Samtliga tre skolor som deltog i undersökningen arbetar på ett liknande sätt med den grundläggande matematiken. De använder mycket konkretiserande material som komplement till läroboken. Samtliga klasser är ålderintegrerade, vilket lett till få gemensamma genomgångar. Undervisningen är hastighetsindividualiserad och eleverna arbetar självständigt i sin egen takt.

### 5.5.1 Problem med multienheter

Hos eleverna kunde vi se flera specifika och strukturella problem som tyder på att eleverna saknar nödvändiga strategier inom områdena addition och subtraktion, strategier som behövs för att klara matematiken både nu och i framtiden. Flera elever visar tydliga tecken på bristande begreppsstrukturer för multienheter. Detta visar sig bland annat i svårigheter att subtrahera två tvåsiffriga tal och att eleverna behöver lång tid på sig att lösa uppgifterna vilket kan bero på att eleverna använder sig av en en-enhetsstruktur vid beräkningen av multienheter.

En del av eleverna anger svar som helt saknar rimlighet vilket tyder på att de inte har utvecklat några fungerande tankestrategier alls för multienheter.
Fuson skriver att många barn har en sammanlänkad entalsuppfattning, dvs. att de ser flersiffriga tal som ental placerade bredvid varandra, istället för att se multienheternas betydelse i förhållande till siffrornas position, vilket kan vara en förklaring i detta fall (Fuson, 1992, Research on whole number addition and subtraction, s. 262).

### 5.5.2 Outvecklade och tidskrävande tankestrategier

Ett annat allvarligt strukturellt problem är att eleverna använder sig av outvecklade och alltför tidskrävande tankestrategier. Många använder sig av fingerräkning och får då stora problem när talområdet utökas. 48 % av eleverna klarar inte diagnos AG4 på den utsatta tiden tio minuter. Diagnosen avslöjade även strukturella svårigheter vid subtraktion av två närliggande tvåsiffriga tal. Detta är ett tecken på att eleverna saknar subtraktionsstrategin utjämna och bara använder sig av strategin förändra - ta bort.

Sammanlagt 7 av 67 elever angav svaret 87 till uppgiften _ - 3 = 90. I intervjuerna såg vi tecken som tydde på att detta inte berodde på ett slarvfel där eleven räknat addition istället för subtraktion, utan att orsaken istället låg i att eleverna har en bristande förståelse för räknesymbolernas betydelse. De ser de två mängderna 90 och 3 och subtraktionstecknet och utför då operationen
90 - 3 utan att reflektera över tecknens betydelse och position.
Ytterligare 15 elever hade svarat fel eller inte svarat på uppgiften.

### 5.5.3 Subtraktion med multienheter med tiotalsövergång

Det största problemområdet fann vi inom subtraktion med multienheter med tiotalsövergång. Bara 27 % av eleverna i de tre undersökningsgrupperna har angett det korrekta svaret 26 på uppgiften 63 - 37. 42 % av alla elever har istället angett svaret 34. I sina skriftliga uträkningar visar eleverna att de först subtraherat 3 från 6 och fått svaret 3. I nästa steg har de subtraherat 3 från 7 och fått svaret 4, vilket gett svaret 34. Eleverna subtraherar det minsta talet från det större utan att begrunda vad de gör. Detta är ett tecken på att de här eleverna har betydande problem med tiotalsövergångar inom subtraktion och även med förståelsen av begreppen subtraktion och

multienhet. Många av de elever som angett svaret 34 på uppgiften 63-37 har även svarat att 51 – 49 = 18, där de använt sig av samma tillvägagångssätt.
Här saknas tydligt rimlighet i svaret men elevernas begreppsuppfattning kan vara så stark att de inte ens reflekterar över orimligheten i svaret (Fuson, 1992, Research on whole number addition and subtraction, s. 262). Problemen kan ha sitt ursprung i att de i skolan utsatts för ett regelstyrt procedurbetonat arbetssätt där förståelsen kommit att bli underordnad.

### 5.5.4 Skillnader utifrån val av räknemetod

En stor skillnad mellan undersökningsgrupperna är att de valt att fokusera på olika räknemetoder för skriftliga uträkningar. I skola B använder eleverna sig av både standardalgoritm och skriftlig huvudräkning och lärarna förespråkar algoritmräkning med lånemetoden. Här ser vi ett betydligt bättre resultat när det gäller subtraktioner med tiotalsövergång, än i de båda andra undersökningsgrupperna där undervisningen fokuseras på den skriftliga huvudräkningsmetoden. I skola B löste 50 % av eleverna textuppgiften med operationen 63-37 korrekt, medan motsvarande procentsats på de båda andra skolorna var 13 % respektive 17 % (se diagram 1). På nästa uppgift som innehöll en subtraktion med två tresiffriga tal och en tiotalsövergång var skillnaden än mer markant. På skola B löste 41 % av eleverna den korrekt, 64 % procent av dem löste uppgiften med hjälp av uppställning i algoritm, medan de övriga 35 % inte visade någon uträkning. På skola A var lösningsfrekvensen 6 % och på skola B-M hade inte någon av eleverna angett rätt svar (se diagram 2).

**Diagram 1. Lösningsfrekvens i procent för uppgiften 63 - 37**

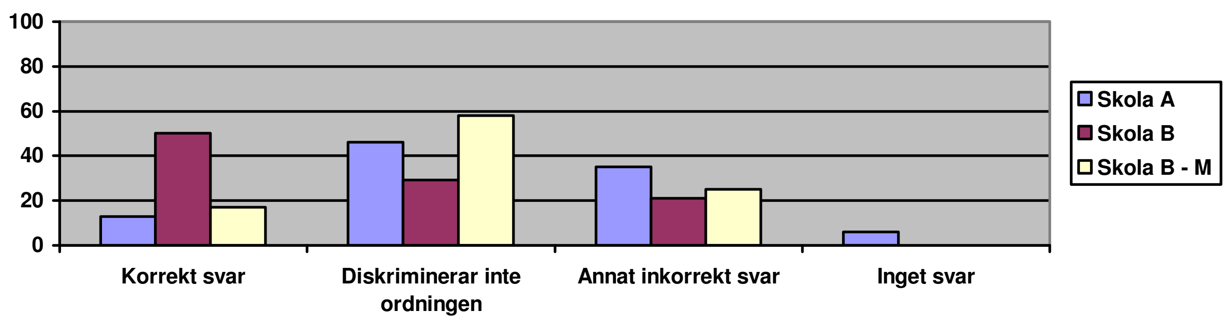
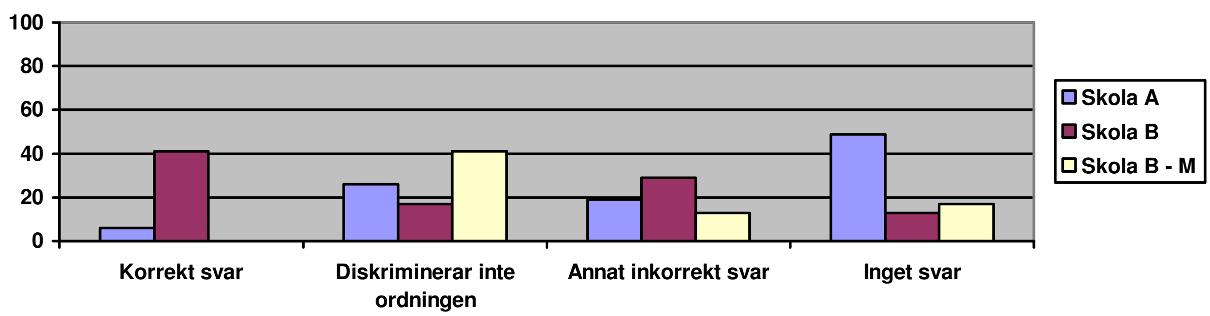



**Diagram 2. Lösningsfrekvens i procent för uppgiften 528 – 376**



I en analys av den skriftliga huvudräkningen har vi kunnat konstatera att metoden ofta leder till att eleverna inte diskriminerar subtraktionsordningen.
Vid addition fungerar metoden bra, men studien har visat att det förekommer elever som inte har förståelse för metoden utan uträkningen har för dem blivit en regelstyrd procedur.
Vid subtraktion däremot har vi tydligt sett att metoden inte fungerar för majoriteten av eleverna. I början räknar eleverna bara med subtraktioner utan tiotalsövergångar vilket ger plus i mellanledet. När tal med tiotalövergångar introduceras lär sig eleverna att de ska skriva minus i mellanledet men saknar förståelse för varför. Den korrekta betydelsen för minustecknet i mellanledet är att det är ett negativt tal. I uppgiften som 63 - 37 innebär det att eleven först ska räkna tiotalen och få 60 - 30 = 30 och skriva 30 i mellanledet. Därefter ska de räkna 3 - 7 som blir - 4, ett negativt tal. Denna negativa fyra ska sedan adderas i mellanledet vilket helt korrekt skulle ge 30 + ( - 4). Men eftersom eleverna helt saknar kännedom om negativa tal, många uttrycker tydligt att det inte finns tal under 0, är detta en tankeform de inte kan förstå på egen hand.
Då eleverna inte får tillräckligt med stöd för att förstå detta skapar de egna regler för hur uppgifterna ska lösas, till exempel att det alltid är minus i mellanledet om det är minus i uppgiften. En annan vanligt förekommande regel är att det blir minus i mellanledet då en subtraktion "inte går", det vill säga då differensen understiger noll.
Den största delen av eleverna vänder på talen och räknar exemplet 63 - 37 genom att subtrahera 60 - 30 = 30 och sedan 7 - 3 = 4. En del elever skriver även 3 - 7 = 4. I nästa steg, i mellanledet, använder sedan en del barn sig av addition och får det felaktiga svaret 34. Andra elever använder sig av subtraktion och får då det korrekta svaret 26, trots att en felaktig tankeform ligger bakom. Det är viktigt att lärarna uppmärksammar denna felaktiga tankeform, som kan vara svår att upptäcka, eftersom den inte bygger på förståelse för metoden och således inte är utvecklingsbar.
Även vid skriftlig huvudräkning vågrätt visar resultatet av diagnosen att få elever har förståelse för metoden och de flesta elever, i den undersökningsgruppen som arbetade med läroboken Flex, använde sig av andra metoder eller kunde inte beräkna uppgifter med större tal och tiotalsövergång alls. En anledning till detta kan vara att när eleverna tidigare i Flex har mött uppgifter som ska beräknas med den vågräta skriftliga huvudräkningen så har tallinjen alltid funnits utritad i anslutning till uppgifterna. En annan anledning kan vara att metoden inte är lämplig vid alla beräkningar. Vid en uppgift som till exempel 564 – 326 ska eleverna utgå från 326 och räkna upp till nästa jämna hundratal, vilket ger 74. Därefter räknar de upp till det andra talets hundratal (500), vilket ger 100. I nästa steg räknar eleverna upp från 500 till 564 och därefter ska de addera de tre delsummorna, i detta fall 74 + 100 + 64, en operation som kan vara komplicerad för eleverna att räkna i huvudet.

### 5.5.5 Analys av läromedelsgranskning

I genomgången av Matteboken såg vi bristfälliga förklaringar som inte bidrar till djupare förståelse hos eleverna. När eleverna utför beräkningar med tresiffriga tal med bara en tiotalsövergång blir det både plus och minus i mellanledet vilket beskrivs i boken med en bild på en drake som säger "Ibland blir det plus i mellanledet, ibland blir det minus!" något som inte bidrar till elevernas förståelse om varför det blir plus respektive minus och när.
I diagnoserna ser vi att en stor del av eleverna inte skriver ut mellanledet. En anledning till detta kan vara att i Matteboken uppmanas eleverna att försöka hoppa över att skriva ut mellanledet i additionsuppgifterna. Därefter introduceras skriftlig huvudräkning i subtraktion med tiotalsövergång. Detta kan lätt leda till att eleverna inte heller här skriver ut mellanledet. Eftersom tanken med mellanleden är att eleverna ska synliggöra sina tankegångar, är det av stor vikt för elevernas egen förståelse att de skriver ut mellanledet.

### 5.5.6 Brist på förståelse för de matematiska operationerna

Många elever tycks sakna förståelse för de operationer de utför och operationerna blir då procedurstyrda. Detta gäller både vid skriftlig huvudräkning och vid algoritmräkning. Ett problem med räkning i algoritm är att positionsvärdet inte är så tydligt på grund av den vertikala uppställningen. Detta kan bidra till att elever utvecklar en sammanlänkad entalsuppfattning. I elevintervjuerna framkom det att eleverna använde sig av lånemetoden vid algoritmräkning. Denna metod kräver att de behärskar stora subtraktionstabellen (kombinationerna i talområdet 0-20). I diagnosen ser vi att det förekommer vissa svårigheter här, vilket visar sig i räknefel.

Trots att elever övar mycket på uppgifter av samma typ lär de sig inte alltid hur de ska göra eftersom förståelsen ofta saknas. Istället kan den intensiva övningen leda till att eleverna befäster den begränsade tankeformen.

# 6. Slutdiskussion

I slutdiskussionen lyfter vi fram studiens väsentligaste delar under de två rubrikerna Konstruktion av begreppsstrukturer samt Räknemetoder och läromedel. Vi kommer sedan att knyta resultatet till tidigare forskning. Därefter diskuterar vi studiens begränsningar och uppfyllelse av syfte. Vi kommer sedan kort beröra vilken vidare forskning vi skulle vilja se i framtiden inom området. Diskussionen avslutas sedan med ett slutord.

## 6.1 Studiens centrala delar

Vi har i undersökningen avslöjat ett antal felaktiga och icke utvecklingsbara begreppsstrukturer som visat sig vara högfrekventa i undersökningsgruppen.

### 6.1.1 Konstruktion av begreppsstrukturer

Studien indikerar att flera elever har begreppsstrukturen sammanlänkad entalsuppfattning. Att eleverna ser flersiffriga tal som lösryckta siffror placerade i rad är ett mycket allvarligt fel som kan leda till att eleverna får stora problem i framtiden, om det inte upptäcks och korrigeras innan uppfattningen befästs. En orsak till att eleverna konstruerar en sammanlänkad entalsuppfattning kan vara att eleverna arbetar allt för länge enbart inom talområdet 0-9. På samtliga skolor som deltog i undersökningen arbetas det intensivt med talen inom talområdet 0-9 i år 1, och det dröjer innan eleverna introduceras för flersiffriga tal.

Nya begrepp byggs upp av redan existerande begrepp. När förståelsen för ett tvåsiffrigt tal byggs upp använder sig eleverna av den begreppsförståelsen de redan har av talen 0-9. Det är viktigt att i steget mellan förståelsen för de redan existerande begreppen, de ensiffriga talen, och det begrepp som ska konstrueras, det tvåsiffriga talet, peka på begreppsattributens skillnader. Läraren måste vara medveten om detta och hjälpa eleverna att förstå att det tvåsiffriga talet består av ental och tiotal. Oregelbundenheterna i det svenska språkets sätt att benämna talen i talområdet 11 - 29 försvårar uppbyggnaden av denna förståelse då till exempel talordet fjorton inte på något sätt visar för eleven att talet är uppbyggt av ett tiotal och fyra ental. Inte förrän eleverna möter talen 30 - 99 kan de med talordens hjälp få en förståelse för talens uppbyggnad, men detta är ett talområde som inte berörs förrän senare, då eleverna redan kan ha skapat och befäst en felaktig uppfattning för begreppet multienhet.

Studien visade även att många elever använder sig av en begreppsstruktur baserad på ental när de möter flersiffriga tal, en en-enhetsuppfattning, vilket innebär att de inte kan se de separata multienheterna som mängder (tiotal, hundratal etc.) utan ser ett flersiffrigt tal som en stor samling av en-enheter. Detta visar sig bland annat i diagnosen AG4. Ytterst få elever visade att de behärskade de matematiska områden som testades i diagnosen, det vill säga utförde diagnos AG4 på 4 - 5 minuter. En stor del av eleverna behövde över tio minuter, den tid diagnosen max bör ta, för att klara diagnosen och somliga behövde över 20 minuter. Att en elev behöver så lång tid betyder med stor sannolikhet att eleven använder sig av en-enhetsuppfattningen och behandlar talen som mängder av ental när de utför beräkningar. Denna metod är tidskrävande och kan ofta leda till fel. En elev kan klara sig bra med en-enhetsuppfattningen inom det lägre talområdet vilket gör det svårt för läraren att uppmärksamma den begränsade uppfattningen. Men ju större talområdet blir och ju svårare uträkningar eleverna ska beräkna desto mer krävande blir metoden. Även här kan konstruktionen av den bristfälliga begreppsuppfattningen bero på att eleverna arbetat för länge inom talområdet 0-9 utan att möta flersiffriga tal. När eleverna på de aktuella skolorna introduceras för operationer med tvåsiffriga tal, är det enbart det första talet som är tvåsiffrigt, medan talet som adderas eller subtraheras är ett ental. Detta leder till att eleverna kan ha kvar en en-enhetsuppfattning, som blir allt mer befäst. På diagnoserna och elevintervjuerna såg vi tydliga tecken på att en anmärkningsvärt stor del av eleverna har tydliga brister i förståelsen för hur operationer med två tvåsiffriga tal ska utföras.

Det största problemområdet fann vi inom subtraktion med tiotalsövergång. Det visade sig vara mycket vanligt att elever inte diskriminerar ordningen i subtraktion. De subtraherar alltid det lägre talet från det högre och undviker på så sätt tiotalsövergångar och växlingar vid uppgifter som 63 - 37. Eleverna uttrycker tydligt uppfattningen att subtraktionsordningen inte har någon betydelse.
Orsaken till detta kan ligga i att eleverna har brister i sin begreppsförståelse för subtraktion. De urskiljer inte det för subtraktionsbegreppet viktiga attributet att subtraktion inte är kommutativ. En anledning till att denna urskiljning inte görs kan vara att begreppsförståelsen för subtraktion byggts upp på förståelsen för addition, som är kommutativ, och att detta urskiljande attribut inte uppmärksammats tillräckligt.

### 6.1.2 Räknemetoder och läromedel

I vår studie har det framkommit att den skriftliga huvudräkningsmetoden fungerar relativt bra vid addition, men att det vid subtraktion och då särskilt vid subtraktion med tiotalsövergångar uppstår stora problem för större delen av eleverna i undersökningen. Eleverna har uppvisat en dålig förståelse för metoden. I elevintervjuerna framkom det att eleverna då har skapat egna regler för hur operationerna ska gå till. I vissa fall leder dessa regler till rätt svar, men tankestrukturen bakom är felaktig. Eleverna diskriminerar heller inte ordningen i subtraktion utan ser subtraktionen som kommutativ.

Inte heller elever som använder sig av vågrät skriftlig huvudräkning för subtraktion tycks ha någon förståelse för metoden. En stor del av eleverna vet inte ens hur de ska göra för att lösa operationer med flersiffriga tal när en utritad tallinje inte finns med. Det finns många tal som inte är lämpade för denna metod, som uppgifter då uträkningen i mellanledet innehåller tiotalsövergångar.

De elever som använde sig av uppställning i algoritm hade visserligen ett markant bättre resultat, men många visade en oförståelse för algoritmen. De berörda eleverna använde lånemetoden vid subtraktion, vilken vi anser innefattar vissa svårigheter. Dels krävs att eleverna behärskar stora subtraktionstabellen och dels kan eleverna ha svårt att relatera till metoden då den inte har en tydlig verklighetsanknytning.

## 6.2 Resultatet i relation till tidigare forskning

Fuson har genom sin forskning kunnat konstatera att amerikanska skolor inte ger eleverna tillräckliga möjligheter och stöd för att de ska kunna konstruera användbara och korrekta begreppsstrukturer för multienheter. I stället har undervisningen ofta fokuserats på att lära barnen regler och procedurer för hur man behandlar de skrivna symbolerna i olika operationer (Fuson, 1992, Research on whole number addition and subtraction, s. 263). Detta leder i sin tur till att eleverna kan skapa felaktiga begreppsstrukturer så som den sammanlänkande entalsuppfattningen, eller begränsande strukturer som en-enhetsuppfattningen. Vi har genom vår studie kunnat bekräfta att detta gäller även för de skolor och elever som ingått i vår undersökningsgrupp. Många elever växlar även mellan en sammanlänkad entalsuppfattning och andra begreppsstrukturer (Fuson, 1997, s. 137). Det kan vara en anledning till att många lärare inte upptäcker att eleverna har en felaktig eller otillräcklig begreppsuppfattning.

En annan anledning till att eleverna har brister i sin begreppsuppfattning av multienheter kan vara att de högre talområdena introduceras såpass sent för eleverna att de redan har en befäst tankestruktur om tal som en-enheter, vilket också Fuson upp i sin forskning. Detta såg vi tydliga tecken på i vår undersökning där de medverkande lärarna bekräftade att talområdet över nio introducerades först efter en lång och intensiv period av arbete med talområdet 0 -9, som ofta sträckte sig över hela det första skolåret. Även fast talområdet 10 - 20 introducerades och behandlades ingående kort därpå, ger dessa tal inget bra stöd för konstruktionen av begreppsstrukturer för multienheter. Detta beror på att deras ologiska benämning inte tydligt visar att talen består av tiotal och ental, vilket gör att eleverna fortfarande ser dessa tal som en mängd av bara ental (Fuson, 1992, Research on whole number addition and subtraction, s. 266).
I skolorna i undersökningen arbetas det mycket med konkretiserande tiobasmaterial för att eleverna ska förstå innebörden av tiotal och ental. I undersökningen har det dock avslöjats att många barn trots detta arbete inte har en korrekt förståelse för multienheter. Även fast de benämner tiotalen tiotal behandlar de dem som mängder av ental. Detta visar sig till exempel i det högfrekventa problemet med att lösa uppgifter med två tvåsiffriga tal. Fuson har i sin forskning konstaterat att elever inte behöver använda begreppsstrukturer för multienheter när de använder sig av tiobasmaterial, (Fuson, 1992, Research on whole number addition and subtraction, ss. 264 -265) något som bekräftar vår teori.

I vår undersökning märkte vi att en stor del av eleverna inte diskriminerar ordningen vid subtraktion och vi konstaterade att en anledning till detta kan vara att eleverna har brister i sin begreppsuppfattning för subtraktion. Forskning har visat att man vid bildandet av nya begrepp använder sig av de begrepp man redan kan (Bentley, 2007, in print). För elevernas del innebär det i detta fall att tankestrukturerna för subtraktion till stor del kan byggas på tankestrukturerna för addition. Om inlärningen sker via theory revision, det vill säga under en längre tid, skapar eleverna en preliminär uppfattning om begreppet subtraktion som då ofta grundar sig på begreppet addition. I denna uppfattning är även subtraktion kommutativ. Denna preliminära förståelse fungerar bra för barnen ända tills de stöter på uppgifter med tiotalsövergång. Då måste de precisera begreppsförståelsen och uppfatta det särskiljande attributet att subtraktion inte är kommutativt. Ofta möter inte elever uppgifter av den här typen förrän efter lång tid i skolan. Då har de i många fall redan specificerat och befäst sin förståelse för subtraktion som kommutativ, precis som addition. Eleven tänker då helt i den uppfattningen av begreppet och reagerar inte över de felaktiga svaren som denna begreppsuppfattning leder till.

Inlärningen kan även ske genom redescription, då begreppsbildningen sker under en kortare tid och genom att eleverna utsätts för en högfrekvent exponering av begreppet och begreppsattributen (Bentley, 2007, in print). Om eleven under denna tid exponeras för begreppets samtliga attribut, även att subtraktion inte är kommutativ, bör de få en bättre uppfattning för begreppet subtraktion. Fuson skriver att subtraktionsinlärningen ofta sker över alltför lång tid och att uppgifter med tiotalsövergångar presenteras alldeles för sent. Detta leder till att eleverna får begränsade möjligheter att generalisera sin kunskap och utveckla sitt kunnande (Fuson, 1992, Research on whole number addition and subtraction, s. 263).

Eleverna som deltog i undersökningen och som använder sig av metoden skriftlig huvudräkning diskriminerar inte ordningen i subtraktion. Rockström berör inte problemet i sin metodbok utan förutsätter att eleverna klarar av att förstå att entalsoperationen i uppgiften 63-37 kan ses som ”3-7, ta bort tre och du har fyra kvar att ta bort, alltså skrivs -4 i mellanledet”. Vår studie har dock visat att så inte är fallet i den deltagande undersökningsgruppen, där en större del av eleverna räknade uppgiften 63-37 som 60-30=30 och 3-7=4 och då fick svaret 34. En orsak till detta kan vara att eleverna inte har någon förkunskap om negativa tal, något som Rockström inte nämner som en nödvändig förkunskap. Vi anser att en begreppsuppfattning om negativa tal är en nödvändighet för att kunna använda metoden på ett meningsfullt sätt. Annars kan eleverna bilda uppfattningar som inte är utvecklingsbara och skapa egna regler för operationerna.

Studien har visat att de elever som använder sig av uppställning i algoritm har visat vissa brister i sin förståelse för metoden. Detta är särskilt tydligt vid subtraktionsuppgifter då eleverna använder sig av lånemetoden. Enligt Kilborn är detta en av de krångligaste subtraktionsalgoritmerna. Den stora anledningen till detta är att metoden kräver stora subtraktionstabellen. De elever som inte automatiserat stora subtraktionstabellen kan få problem med att hålla alla deloperationer i minnet, vilket lätt kan leda till räknefel (Kilborn, 2002, s. 62). Växlingarna kan även ställa till problem för eleverna då detta blir en onaturlig tankeform eftersom eleverna inte växlar på detta sätt i det dagliga livet. Både Kilborn och Löwing anser att utfyllnadsmetoden är ett bättre alternativ. Denna algoritm bygger på samma ”uppräkningsmetod” som används när man handlar i affärer, betalar och får pengar tillbaka (Löwing & Kilborn, 2002, s. 138-142).
Kilborn (2002, s. 63) beskriver den principiella skillnaden på lånemetoden och utfyllnadsmetoden så här:

> Om man har en tia och fem enkronor och skall köpa något som kostar 8 kr, *växlar man* i lånemetoden pengarna till 15 enkronor. Man betalar med 8 av dem och har därefter 7 kr över.
>
> I utfyllnadsmetoden *lämnar man fram* tian och får 2 kr tillbaka. Tillsammans med de 5 kr man hade från början, blir det 7 kr över. (s. 63)

Kilborn och Löwing menar att eftersom utfyllnadsmetoden är en direkt beskrivning av det som sker i verkligheten är den också rekonstruerbar (Löwing & Kilborn, 2002, s. 142), vilket vi anser medför att en förståelse för metoden lättare etableras hos eleverna.

## 6.3 Studiens begränsningar

Eleverna i studien kom från samma område, med samma socioekonomiska förhållanden, vilket inte gör studien helt generaliserbar. Majoriteten av eleverna är födda i Sverige men stor del av dem har inte svenska som hemspråk, vilket är ytterligare en faktor man måste ta hänsyn till. Man måste även ta hänsyn till barnens dagsform då de genomförde diagnoserna.
Vidare kan man inte heller vara helt säker på att lärarna gav en helt korrekt bild av undervisningen under intervjuerna, eller att vi som intervjuare tolkat deras svar på ett korrekt sätt.

## 6.4 Uppfyllelse av syfte

Genom diagnosen kunde vi kartlägga elevernas kunskaper och identifiera de största strukturella problemområdena. I analyserna av diagnossvaren och de efterföljande elevintervjuerna och efter en grundlig genomgång av teorier fick vi en god uppfattning om vari elevernas svårigheter ligger och vilka orsaker som kan tänkas ligga bakom. I genomomgången av läromedel och efter samtal med lärarna om hur undervisningen bedrivs fick vi ytterligare bekräftelse på att vår uppfattning stämde.

Vi anser att vi därmed uppfyllt studiens syfte och gett svar på frågeställningarna.

## 6.5 Framtida forskning

Vår studie indikerar att många elever uppfattar subtraktion som kommutativ. Vi skulle gärna se att det i framtiden forskades mer om hur elever uppfattar begreppet subtraktion och om hur de konstruerar dessa begreppsstrukturer.

Vi ser även ett stort behov av mer svensk aktuell forskning om begreppsförståelse för och operationer med multienheter.

Det finns även ett behov av en djupare undersökning om hur elever förstår och använder sig av den skriftliga huvudräkningsmetoden.

## 6.6 Slutord

Innan eleverna börjar räkna med multienheter måste de ha en ordentlig förståelse för begreppet multienhet. Detta innebär inte att barnen ska kunna ordet multienhet, utan att de ska ha en förståelse för begreppet och dess attribut. I vår fallstudie märkte vi att många elever verkade sakna en fullständig förståelse för begreppet multienhet. Vidare behöver eleverna även ha en helt utvecklad begreppsuppfattning för subtraktion som innefattar kännedom om det särskiljande attributet att subtraktion inte är kommutativ. Att eleverna inte diskriminerade ordningen i subtraktion visade sig vara ett mycket högfrekvent fel. Studien har även visat att val av räknemetod (skriftlig huvudräkning eller algoritm) tycks ha en betydande inverkan på resultatet.

# Referenser och referenslista


Andersson, P. & Picetti, M. (2006). *Matte direkt. Borgen.* Stockholm: Bonnier

Bentley, P-O (2007) *Mathematics Teachers and Their Conceptual Models*. In press

Fuson, K. C. (1992). Research on whole number addition and subtraction. Grouws, D. A. (Red.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.* (ss. 243-275) Library of Congress Catologing – in – Publication data.

Fuson, K. (1990). *Cognition and Instruction - Conceptual Structures for Multiunit Numbers: Implications for Learning and Teaching Multidigit Addition, Subtraction, and Place Value* Vol. 7, No. 4, ss. 343-403

Fuson, K. Wearne, D. Hiebert, J. Murray, H. Human, P. Olivier, A. Carpenter, T. Fennema, E. (1997). Journal *for Research in Mathematics Education. March 1997, Volume 28, Number 2. - Children´s Conceptual Structures for Multidigit Numbers and Methods of Multidigit Addition and Subtraction.*

Kilborn, W. (2002). *Didaktisk ämnesteori i matematik. Del 1: Grundläggande aritmetik.* Stockholm: Liber. Upplaga 1:6

Löwing, M. & Kilborn, W. (2003). *Huvudräkning. En inkörsport till matematiken*. Lund: Studentlitteratur

Löwing, M. (2006). *Matematikundervisningens dilemman.* Hur lärare kan hantera lärandets komplexitet. Lund: Studentlitteratur

Löwing, M. (2007). *Diamantprojektets diagnoser.* In Press.

Löwing, M. & Kilborn, W. (2002) Baskunskaper i matematik – för skola, hem och samhälle. Lund: Studentlitteratur

Rockström, B. (2000). Skriftlig huvudräkning – metodbok. Stockholm: Bonnier Utbildning

Rockström, B. & Lantz, M. (1998) Matteboken 2A Stockholm: Bonnier Utbildning

Rockström, B. & Lantz, M. (1998) Matteboken 2B Stockholm: Bonnier Utbildning

Rockström, B. & Lantz, M. (1998) Matteboken 3A Stockholm: Bonnier Utbildning

Rockström, B. & Lantz, M. (1998) Matteboken 3B Stockholm: Bonnier Utbildning

Rönnberg, I. & Rönnberg, L. (2001). *Minoritetselever och matematikutbildning: en litteraturöversikt.* Stockholm: Statens skolverk

Stukát, S. (2005). *Att skriva examensarbete inom utbildningsvetenskap.* Lund: Studentlitteratur.

Skolverket. (2005). *En sammanfattning av TIMSS 2003, Särtryck av rapport 255.*
http://www.umu.se/edmeas/timss2003/publ/Sartryck_sammanfattning.pdf

Skolverket. (2007). *Hur går det för femteklassarna på proven engelska, matematik och svenska? Resultat från insamling av ämnesproven i årskurs 5 2006*
http://www.skolverket.se/content/1/c4/18/57/Hur%20g%E5r%20det%20f%F6r%20femteklassarna%20p%E5%20proven.pdf

Skolverket. (2007) *Preliminära mål för skolår 3*
http://www.skolverket.se/sb/d/1819

Skolverket. (2006) *Kursplanen för Matematik*
http://www3.skolverket.se/ki03/front.aspx?sprak=SV&ar=0607&infotyp=23&skolform=11&id=3873&extraId=2087

Utbildningsdepartementet. *Läroplan för det obligatoriska skolväsendet, förskoleklassen och fritidshemmet*, Lpo 94.

Vetenskapsrådet, Forskningsetiska principer inom humanistisk- samhällsvetenskaplig forskning, http://www.vr.se/download/18.668745410b37070528800029/HS[1].pdf

Öreberg, C. Brogren, Johansson, Paulsen, Torstensson, Vogel. (2000) *Flex 6 - Mus.* Malmö: Gleerups

## Bilaga 1

Göteborgs Universitet
Madeleine Löwing

**Diagnos AG4** Namn................................................... klass ............

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1a | | 1b | |
| 40 + 30 = __ | 20 + 70 = __ | 90 – 60 = __ | 80 – 30 = __ |
| 50 + __ = 90 | 60 + __ = 80 | 70 – 20 = __ | 60 – __ = 40 |
| __ + 30 = 80 | __ + 40 = 90 | 90 – __ = 50 | 70 – __ = 30 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 2a | | 2b | |
| 40 + 7 = __ | 60 + 8 = __ | 95 – 5 = __ | 68 – 8 = __ |
| 30 + __ = 38 | 70 + __ = 74 | 56 – __ = 50 | 84 – __ = 80 |
| __ + 6 = 36 | __ + 40 = 49 | __ – 3 = 90 | __ – 9 = 70 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 3a | | 3b | |
| 27 + 1 = __ | 24 + 2 = __ | 38 – 2 = __ | 57 – 5 = __ |
| 5 + 42 = __ | 6 + 62 = __ | 77 – 75 = __ | 58 – 57 = __ |
| 72 +6 = __ | 81 + 8 = __ | 89 – 7 = __ | 65 – 4 = __ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 4a | | 4b | |
| 84 + 9 = __ | 75 + 8 = __ | 63 – 8 = __ | 54 – 6 = __ |
| 7 + 65 = __ | 6 + 78 = __ | 51 – 49 = __ | 91 – 89 = __ |
| 63 + 8 = __ | 58 + 6 = __ | 72 – 8 = __ | 81 – 3 = __ |

28

# Bilaga 2

Göteborgs Universitet
Madeleine Löwing

**Diagnos AS1** Namn ........................................ Klass ............

Räkna i rutorna till höger.

1

Lina köper en anteckningsbok för 48 kr och en penna för 24 kr. Hur mycket får hon betala?

Svar: ____________________

2

Morfar är 63 år och mamma är 37 år. Hur mycket äldre är morfar än mamma?

Svar: ____________________

3

Nicolas hoppar 528 cm i längdhopp. Hans lillasyster Stina hoppar 376 cm. Hur mycket längre hoppar Nicolas än Stina?

Svar: ____________________

4

Erik har 325 svenska frimärken och 247 utländska frimären. Hur många frimärken har han sammanlagt?

Svar: ____________________

54

Utprövningsversion februari 2007

Göteborgs Universitet
Madeleine Löwing

| | |
|---|---|
| 5<br><br>Marco köper ett par byxor för 346 kr och en skjorta för 179 kr. Hur mycket kostar det tillsammans?<br><br>Svar: ____________________ | |
| 6<br><br>Malin sparar till en cykel som kostar 525 kr. Hon har nu 378 kr. Hur mycket pengar fattas för att hon skall kunna köpa cykeln?<br><br>Svar: ____________________ | |
| 7<br><br>Ett band är 304 cm långt. Du klipper av 138 cm. Hur mycket är det då kvar av bandet?<br><br>Svar: ____________________ | |